Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Поляков, Описание эндоморфизмов алгебры арифметических функций с операциями сложения и суперпозиции, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 6, 891–893

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:11:49

Описание эндоморфизмов алгебры арифметических функций с операциями сложения и суперпозиции

Е. А. Поляков

В заметке дано описание всех эндоморфизмов алгебры одноместных арифметических функций с операциями сложения двух функций и суперпозиции двух функций.

Библиография: 2 названия.

Пусть Φ – совокупность всех одноместных арифметических функций, т.е. функций, всюду определенных на множестве натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ и со значениями в $\mathbb{N}$. Под числами будем понимать натуральные числа. Символами “+”, “*” будем обозначать соответственно операции сложения двух функций и суперпозиции двух функций. Эти операции определяются формулами

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f * g)(x) = f(g(x)).$$

Через $c_n(x)$ будем обозначать функцию-константу, тождественно равную числу n . Всякое гомоморфное отображение универсальной алгебры в себя называется ее эндоморфизмом.

В заметке дано описание всех эндоморфизмов алгебры $A = \langle \Phi; +, * \rangle$, которая является одной из редукций алгебр рекурсивных функций, введенных Мальцевым в [1]. Ранее, в [2], показано, что алгебра A не имеет автоморфизмов, отличных от тождественного. Эндоморфизм, при котором каждая функция из множества Φ переходит в функцию $c_0(x)$, будем называть *тривиальным*. Символом $\rightarrow$ будем обозначать эндоморфизм алгебры A .

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно видеть, что при любом эндоморфизме алгебры A $c_0(x) \rightarrow c_0(x)$.

ЛЕММА. Если при эндоморфизме алгебры A образ функции, тождественно равной единице, в нуле равен нулю, то эндоморфизм тривиальный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rightarrow$ – произвольный эндоморфизм алгебры A , и пусть

$$c_1(x) \rightarrow f(x), \quad \text{где } f(0) = 0.$$

Для любого числа n имеем $c_n(x) \rightarrow n \cdot f(x)$ и $c_n(c_0(x)) \rightarrow n \cdot f(c_0(x))$, откуда $c_n(x) \rightarrow c_0(x)$.

Покажем, что любая ограниченная функция $h(x)$ при эндоморфизме $\rightarrow$ переходит в $c_0(x)$. Так как h – ограниченная функция, то для некоторого числа k имеем, что

для всех x выполнена оценка $h(x) \leq k$. Рассмотрим функцию $g(x) = k - h(x)$. Пусть $h(x) \rightarrow h'(x)$, $g(x) \rightarrow g'(x)$; тогда $h(x) + g(x) = c_k(x) \rightarrow h'(x) + g'(x)$, откуда получаем, что $h'(x) + g'(x) = c_0(x)$ и $h'(x) = g'(x) = c_0(x)$.

Покажем, что функция $I(x) = x$ переходит при эндоморфизме в $c_0(x)$. Рассмотрим функции

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x = 2t, \\ 0, & \text{если } x = 2t + 1, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x = 2t + 1, \\ 0, & \text{если } x = 2t. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_i(f_i(x)) = f_i(x)$. Пусть $f_1(x) \rightarrow f'_1(x)$, $f_2(x) \rightarrow f'_2(x)$; так как $c_1(x) \rightarrow c_0(x)$, то

$$c_0(x) = f_1(f_1(x) + c_1(x)) \rightarrow f'_1(f'_1(x)) = f'_1(x) = c_0(x).$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 2t, \\ 1, & \text{если } x = 2t + 1. \end{cases}$$

Так как $\varphi(x) \rightarrow c_0(x)$, то

$$c_0(x) = f_2(f_2(x) + \varphi(x)) \rightarrow f'_2(f'_2(x)) = f'_2(x) = c_0(x).$$

Наконец, возьмем произвольную функцию $F(x)$, и пусть $F(x) \rightarrow F'(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} F(c_0(x)) &= c_{F(0)}(x) \rightarrow F'(c_0(x)) = c_0(x), \\ F(x) &= F(x) * I(x) \rightarrow F'(c_0(x)) = c_0(x). \end{aligned}$$

Эндоморфизм оказывается тривиальным.

С каждым натуральным числом k и арифметической функцией $d(x)$ свяжем отображение $\delta_k^d: A \rightarrow A$, определенное следующим образом:

$$\delta_k^d(f(x)) = k \cdot f(d(x)).$$

ТЕОРЕМА. *Отображение $\delta: A \rightarrow A$ является нетривиальным эндоморфизмом алгебры A тогда и только тогда, когда $\delta = \delta_k^d$ для некоторого числа $k \geq 1$ и арифметической функции $d(x)$ со свойством для всех x выполнено $d(kx) = x$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть $\rightarrow$ – нетривиальный эндоморфизм алгебры A . Пусть $c_1(x) \rightarrow h(x)$; ввиду леммы $h(0) \geq 1$.

Случай 1. Пусть $h(0) = 1$. В силу замечания

$$c_1(x) = c_1(x) * c_0(x) \rightarrow h(x) * c_0(x) = c_1(x).$$

Используя операцию сложения, получим, что $c_n(x) \rightarrow c_n(x)$. Возьмем произвольную функцию $F(x)$. Имеем

$$F(x) \rightarrow F'(x), \quad F(c_n(x)) \rightarrow F'(c_n(x)).$$

Так как функция-константа переходит в себя, то для всех n выполнено $F'(n) = F(n)$ и $\rightarrow$ – тождественный автоморфизм; $k = 1$ и $d(x) = x$.

Случай 2. Пусть $h(0) = k > 1$. Как и в случае 1 $c_1(x) \rightarrow c_k(x)$. Покажем, что если $f(x) \rightarrow g(x)$, то

$$\forall t \quad g(k \cdot t) = kf(t). \quad (1)$$

Пусть $t = 0$; имеем $c_m(x) \rightarrow c_{g(0)}(x)$, где $m = f(0)$. Если $m = 0$, то $g(0) = 0$; отсюда $g(k \cdot 0) = k \cdot f(0)$. Если же $m > 0$, то $c_m(x) \rightarrow m \cdot c_k(x)$; отсюда $g(x) = m \cdot k$ и $g(k \cdot 0) = k \cdot f(0)$. Пусть $t > 0$. Имеем $c_t(x) \rightarrow c_{k \cdot t}(x)$ и $f(c_t(x)) \rightarrow g(c_{kt}(x))$. Если $f(t) > 0$, то $c_{f(t)}(x) \rightarrow c_{k \cdot f(t)}(x)$ и $g(k \cdot t) = kf(t)$. Если же $f(t) = 0$, то $g(kt) = 0$ и снова $g(kt) = kf(t)$. Рассмотрим функцию $[x/k]$ (целая часть дроби x/k). Пусть $[x/k] \rightarrow q(x)$ и $x \rightarrow p(x)$. Согласно (1) $q(kt) = k[t/k]$ и $p(kt) = kt$ для всех $t \in \mathbb{N}$, откуда

$$x = [kx/x] \rightarrow q(k \cdot p(x)) = k[p(x)/k]. \quad (2)$$

Положим $d(x) = [p(x)/k]$. Используя (1) и (2), для произвольной функции $F(x)$ получим $F(x) \rightarrow k \cdot F(d(x))$.

Достаточность. Покажем, что отображение $\delta_k^d: A \rightarrow A$, где $k \geq 1$ и для всех x выполнено $d(kx) = x$, является нетривиальным эндоморфизмом алгебры A . Пусть

$$f(x) \rightarrow k \cdot f(d(x)), \quad g(x) \rightarrow k \cdot g(d(x)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &\rightarrow k \cdot (f(d(x)) + g(d(x))) = kf(d(x)) + kg(d(x)), \\ f(g(x)) &\rightarrow k \cdot f(g(d(x))) = k \cdot f(d(kg(d(x))))). \end{aligned}$$

Нетривиальность следует из того, что $c_1(x) \rightarrow c_k(x)$.

Очевидно, что автоморфизм возможен только в случае, когда $k = 1$ и $d(x) = x$.

Заметим, что при нетривиальном эндоморфизме алгебры A разные функции переходят в разные функции.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Мальцев, “Конструктивные алгебры Γ ”, *УМН*, **16:3** (1961), 3–60.
- [2] Е. А. Поляков, “О некоторых свойствах алгебр рекурсивных функций”, *Алгебра и логика*, **3:3** (1964), 39–57.

Е. А. Поляков

Шуйский государственный педагогический университет

Поступило

03.10.2005

Исправленный вариант

29.12.2006