Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Романов, Разложение Вольда в пространствах Банаха, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 6, 894–904

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4189>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 17:12:05

Разложение Вольда в пространствах Банаха

А. В. Романов

Предлагается естественный аналог разложения Вольда для случая линейной необратимой изометрии V в банаховом пространстве X . Получен критерий существования такого разложения. В рефлексивном пространстве этот критерий сводится к наличию линейной проекции $P: X \rightarrow VX$ с нормой единица.

Отдельно обсуждается вопрос о разложении Вольда для изометрии V_φ , индуцированной эпиморфизмом φ компакта H в пространстве непрерывных функций $C(H)$. Подробно рассмотрен пример отображения $z \rightarrow z^m$ окружности $|z| = 1$ с целым $m \geq 2$.

Библиография: 12 названий.

Введение. Хорошо известно [1]–[3], что линейная изометрия V в гильбертовом пространстве X порождает так называемое *разложение Вольда*. Речь идет о разложении X в бесконечную ортогональную прямую сумму вида $X = M \otimes K$, $K = \bigoplus_0^\infty V^n R$, где R – ортогональное дополнение к образу VX , подпространства M и K инвариантны относительно V , сужение V на M унитарно, а сужение V на K не имеет собственных векторов. Более того, оператор V не унитарен ни в каком инвариантном подпространстве $L \subset K$. Фактически, разложение Вольда позволяет свести изучение произвольных изометрий в гильбертовом пространстве к исследованию унитарных операторов и *вполне неунитарных* изометрий, обладающих специфической структурой *одностороннего сдвига*.

Данная статья содержит условия (см. теорему 2.1), необходимые и достаточные для реализации подобного разложения в пространствах Банаха. Обычная гильбертова ортогональность заменяется при этом на ортогональность по Биркгофу. Банальной составной частью соответствующего критерия служит наличие хотя бы одного линейного ортогонального (с нормой 1) проектора $P: X \rightarrow VX$. Показано (теорема 2.6), что в рефлексивном пространстве существование ортопроекции на VX необходимо и достаточно для справедливости разложения Вольда. Если же линейная изометрия V действует в *произвольном* пространстве Банаха X , то вопрос о существовании такого разложения связан не только со свойствами оператора V , но и с выбором подходящего элемента P из множества $\mathcal{P}_V$ всевозможных ортогональных проекторов на подпространство VX .

Специально рассмотрена интересная с точки зрения функционально-аналитического подхода к задачам топологической динамики ситуация, когда ареной действия служит пространство $C(H)$ непрерывных скалярных функций $x(\xi)$ на хаусдорфовом компакте H , а изометрия $V = V_\varphi$ в $C(H)$ индуцирована непрерывной сюръекцией $\varphi: H \rightarrow H$, т.е. $(Vx)(\xi) = x(\varphi\xi)$ для $\xi \in H$. Показано, в частности (см. п. 3), что

отображение $\varphi: z \rightarrow z^m$ окружности $S: |z| = 1$ с целым $m \geq 2$ (а точнее, индуцированная изометрия $V = V_\varphi$) порождает разложение Вольда в $C(S)$ при подходящем выборе проектора $P \in \mathcal{P}_V$. В то же время, для случая $m = 2$ предъявлен такой ортопроектор $P' \in \mathcal{P}_V$, что пара операторов (V, P') не порождает разложение Вольда пространства $C(S)$.

1. Предварительные формулировки. Пусть V – линейный изометрический оператор в вещественном или комплексном пространстве Банаха X . Иными словами, $\|Vx\| = \|x\|$ для $x \in X$. Подчеркнем, что все последующие результаты содержательны лишь в случае, когда $VX \neq X$ и, таким образом, оператор V неунитарен. Следуя [4], [5], скажем, что подпространство $X_1 \subset X$ ортогонально подпространству $X_2 \subset X$, и запишем $X_1 \perp X_2$, если $\|x_1\| \leq \|x_1 + x_2\|$ для любых $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$. Линейный проектор $P: X \rightarrow X_1$ с нормой 1 называем ортогональным. В негильбертовом случае для заданного подпространства $X_1 \subset X$ такой проектор существует далеко не всегда (этот вопрос обсуждается в книге [5]).

Будем исходить в дальнейшем из существования ортогональной линейной проекции $P: X \rightarrow VX$. Если $R = (I - P)X$, где $I = \text{id}$ в X , то подпространства $V^n R$ с $n \geq 1$ ортогональны подпространству R . Благодаря свойству изометричности оператора V отсюда следует также, что $V^n R \perp V^m R$ при всех $n > m$. Определим линейный ограниченный оператор T в X равенством $T = V^{-1}P$, где V^{-1} – левый обратный оператор, изометрически отображающий VX на X . Ясно, что $\|T\| = 1$, $TV = I$ и $VT = P$. Положим $P_0 = I$ и

$$P_n = V^n T^n, \quad n \geq 1. \quad (1)$$

Как мы видим, $\|P_n\| = 1$, $P_n = VP_{n-1}T$ и $P_n^2 = P_n$. Последнее соотношение получается из (1) с помощью тождества $TV = I$. Поскольку $TX = X$, то $P_n X = V^n X$ и операторы P_n суть ортопроекторы на подпространства $V^n X$. Имеем разложения в прямую сумму: $X = VX \oplus R$, $V^m X = V^{m+1} X \oplus V^m R$ и, как следствие, разложение

$$X = V^n X \oplus V^{n-1} R \oplus \dots \oplus VR \oplus R,$$

причем $V^n X \perp V^m R$ для $n > m \geq 0$ и $V^m R \perp V^k R$ для $n - 1 \geq m > k \geq 0$. Последовательность $\{P_n\}$ представляет собой убывающую цепочку коммутирующих проекторов, т.е. $P_n P_m = P_m P_n = P_n$ для $n \geq m$. Образ проектора $Q_n = P_n - P_{n+1}$ совпадает с подпространством $V^n R$ и справедливо равенство

$$I = P_n + \sum_{m=0}^{n-1} Q_m. \quad (2)$$

Условимся обозначать буквами s и w соответственно сильную и слабую сходимость элементов или ограниченных линейных операторов в пространствах Банаха. Символы Im и Ker будем использовать для обозначения образа и ядра линейных операторов. Полагаем

$$M = \bigcap_1^\infty \text{Im } V^n, \quad K = \left(\bigcap_1^\infty \text{Ker } P_n \right)^c,$$

где $\text{Im } V^n = \text{Im } P_n$ и $(\cdot)^c$ – операция сильного замыкания множеств в X . Очевидны включения $\text{Im } P_n \subset \text{Im } P_m$ и $\text{Ker } P_n \supset \text{Ker } P_m$ при $n > m$. Зафиксируем теперь элементарные свойства подпространств M и K .

ЛЕММА 1.1. *Справедливы утверждения:*

- а) $K = \{x \in X : s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n x = 0\}$ и $M \cap K = \{0\}$;
- б) если $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n x = x_0$, то $x_0 \in M$;
- в) $M \oplus K = \{x \in X : \exists s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n x\}$;
- г) M ортогонально K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K_1 – объединение по $n \geq 1$ системы множеств $\text{Ker } P_n$. Включение $\text{Ker } P_n \supset \text{Ker } P_m$ для $n > m$ обеспечивает сильную сходимость $P_n x \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ на линейале K_1 , а с учетом равенств $\|P_n\| = 1$ – и на его замыкании $K = (K_1)^c$. Обратно, если $p_n x \xrightarrow{s} 0$ для некоторого $x \in X$, то $(I - P_n)x \xrightarrow{s} x$. Но $x - P_n x \in \text{Ker } P_m$ при $m > n$, поэтому $x \in K$. Свойство б) следует из тождества $P_m P_n = P_n$ для $n > m$. Далее, $P_n x = x$ на M , стало быть, $M \cap K = \{0\}$ и проекторы P_n сильно сходятся на $M \oplus K$ при $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, если $P_n x \xrightarrow{s} x_0$, то $x_0 \in M$ и $x - x_0 \in K$, ибо $P_n(x - x_0) = P_n x - x_0$, а потому $P_n(x - x_0) \xrightarrow{s} 0$. Наконец, для элементов $x \in M$, $x_1 \in K$ справедливо соотношение $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x + x_1) = x$. Поскольку $\|P_n(x + x_1)\| \leq \|x + x_1\|$, то отсюда явствует, что $\|x\| \leq \|x + x_1\|$ и, тем самым, $M \perp K$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Как видно из доказательства леммы, утверждения а)–в) остаются в силе, если вместо сильной сходимости элементов $P_n x$ говорить об их слабой сходимости.

Подпространство $M \oplus K$ замкнуто и, вообще говоря, не совпадает с X . Предположим, однако, что существует

$$w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_\infty, \quad (3)$$

т.е. проекторы P_n слабо сходятся на X . Так как $P_m P_\infty = P_\infty$ и $\|P_m\| = 1$ для всех $m \geq 1$, то P_∞ – ортогональный проектор на подпространство M , причем $\text{Ker } P_\infty = K$. Переходя теперь в равенстве (2) к пределу по $n \rightarrow \infty$, получаем сходящееся в слабой операторной топологии разложение единицы

$$I = P_\infty + \sum_{m=0}^{\infty} Q_m \quad (4)$$

или (в терминах прямых сумм) разложение

$$X = M \oplus K, \quad K = \bigoplus_0^{\infty} V^n R \quad (5)$$

пространства X . Это разложение с $M = \text{Im } P_\infty$, $K = \text{Ker } P_\infty$ и $R = \text{Ker } P$ ортогонально в том смысле, что $M \perp K$ и

$$\bigoplus_m^{\infty} V^n R \perp \bigoplus_0^{m-1} V^n R$$

для любого $m \geq 1$. При этом $VK \subset K$, $VM = M$ и сужение $V|_M$ – унитарный оператор. По определению M содержит в себе каждое подпространство X_1 , удовлетворяющее условию $VX_1 = X_1$. Тем самым, M – максимальное инвариантное подпространство в X , на котором оператор V унитарен или, что то же самое, обратим. В частности, все собственные векторы оператора V принадлежат M .

По аналогии с гильбертовым случаем будем именовать соотношения (5) *разложением Вольда*. Разумеется, $K = \{0\}$ и $M = X$, если изначально оператор $V: X \rightarrow X$ унитарен. Согласно лемме 1.1 в) разложение в прямую сумму

$$X = M \oplus K \quad (6)$$

равносильно сильной сходимости проекторов P_n в (3), а значит, эквивалентно (5). Теперь можно сформулировать

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Соотношения (3)–(6) равносильны, причем слабая сходимость проекторов P_n в (3) влечет их сильную сходимость. Это же верно и для частных сумм в разложении единицы (4).

В гильбертовом пространстве (см. [1]–[3]) сходимость проекторов P_n имеет место для произвольной изометрии V , при этом обладающее характерной структурой сужение $V|_K$ называют *односторонним сдвигом* с порождающим подпространством R . В произвольном пространстве Банаха X разложение (5) для заданной изометрии V связано с выбором (возможно неединственным) ортопроекции P на образ $\text{Im } V$ и, соответственно, с выбором порождающего подпространства $R = \text{Ker } P$. Обозначаем, в дальнейшем, через $\mathcal{P}_V$ совокупность всех линейных ортогональных проекций на $\text{Im } V$. Данное множество, вообще говоря, *может быть пустым* – тогда говорить о разложении Вольда не имеет смысла. Если же множество $\mathcal{P}_V$ не пусто, то оно замкнуто в слабой операторной топологии, ограничено по норме и выпукло.

Желательно выяснить, при каких условиях пара операторов, состоящая из изометрии V и проектора $P \in \mathcal{P}_V$, порождает разложение Вольда пространства X . При этом вследствие эквивалентности соотношений (3) и (5) проще говорить об условиях слабой сходимости последовательности проекторов P_n . Отметим, что сопряженные проекторы P_n^* в X^* образуют убывающую коммутирующую цепочку, поскольку $P_n^* P_m^* = P_m^* P_n^* = p_n^*$ для $n \geq m$. Кроме того, $\|P_n^*\| = 1$ при $n \geq 1$.

Аннулятор

$$B^0 = \{y \in X^* : (x, y) = 0 \ \forall x \in B\}$$

произвольного множества $B \subset X$ представляет собой слабо* замкнутое подпространство в сопряженном пространстве X^* . В последующем изложении будут неоднократно использоваться *стандартные соотношения* (см., например, [4; гл. 6]) между ядром и образом линейного ограниченного оператора $A: X \rightarrow X$ и его сопряженного $A^*: X^* \rightarrow X^*$, а именно:

- i) $(\text{Im } A)^0 = \text{Ker } A^*$;
- ii) $(\text{Ker } A)^0 = \text{Im } A^*$, если образ $\text{Im } A$ замкнут.

В частности,

$$\text{Im } P^* = (\text{Ker } P)^0 = R^0 \quad \text{и} \quad \text{Im } V^* = (\text{Ker } V)^0 = X^*.$$

Покажем, что сужение оператора V^* на подпространство $R^0 \subset X^*$ изометрично. Для любого функционала $y \in R^0$ и $\varepsilon > 0$ найдем элемент $x \in X$ такой, что $|(x, y)| > (1 - \varepsilon)\|x\| \cdot \|y\|$. Так как $(x, y) = (Px, y)$ и $\|x\| \geq \|Px\|$, то

$$|(Px, y)| > (1 - \varepsilon)\|Px\| \cdot \|y\|.$$

Если $Px = Vx_1$, то $\|Px\| = \|x_1\|$, $(Vx_1, y) = (x_1, V^*y)$ и

$$|(x_1, V^*y)| > (1 - \varepsilon)\|x_1\| \cdot \|y\|,$$

откуда следует оценка $\|V^*y\| \geq \|y\|$. Но $\|V^*\| = \|V\| = 1$, поэтому $\|V^*y\| = \|y\|$, что и требовалось.

Итак, оператор V^* изометрично отображает R^0 на X^* . Положим $U = T^*$, где $T = V^{-1}P$ – оператор из формулы (1), тогда

$$\text{Im } U = (\text{Ker } T)^0 = (\text{Ker } P)^0 = R^0.$$

Далее, $TV = I$ и, если $I^* = \text{id}$ в X^* , то $V^*U = I^*$, а значит, оператор U изометрично отображает X^* на R^0 . Переходя в равенстве (1) к сопряженным операторам, находим

$$P_n^* = U^n(V^*)^n, \quad n \geq 1.$$

Так как $V^*X^* = X^*$, то $\text{Im } P_n^* = \text{Im } U^n$. Положим теперь

$$N = \bigcap_1^\infty \text{Im } U^n.$$

Поскольку $\text{Im } P_n^* = (\text{Ker } P_n)^0$, то $N = K^0$. Как видим, подпространства $N \subset X^*$ и $K \subset X$ зависят от оператора V и проектора $P \in \mathcal{P}_V$, тогда как подпространство $M \subset X$ зависит лишь от V . Отметим, что изометрия V не может порождать разложение Вольда в X , если на подпространство $M(V)$ не существует линейной ортогональной проекции.

2. Основные результаты. Оказывается, критерий существования разложения Вольда для изометрии V и ортогонального проектора $P \in \mathcal{P}_V$ можно сформулировать в терминах “критических” подпространств $M = M(V)$ и $N = N(V, P)$. Скажем, что M *разделяет* N , если $(x, y_1) \neq (x, y_2)$ для любых различных функционалов $y_1, y_2 \in N$ и подходящего элемента $x \in M$. Более удобная (равносильная) формулировка такова: M *разделяет* N , если $M^0 \cap N = \{0\}$. Определим линейал Y в сопряженном пространстве X^* как объединение по $n \geq 1$ расширяющейся системы множеств $\text{Ker } P_n^*$ и рассмотрим его аннулятор

$$Y^0 = \{x \in X : (x, y) = 0 \quad \forall y \in Y\}.$$

Так как $(\text{Im } P_n)^0 = \text{Ker } P_n^*$, то $(\text{Ker } P_n^*)^0 = (\text{Im } P_n)^c = \text{Im } P_n$ и $Y^0 = M$. Известное правило $(Y^0)^0 = (Y)^a$, где $(\cdot)^a$ – операция слабого* замыкания множеств в X^* , приводит к формуле

$$M^0 = \left(\bigcup_1^\infty \text{Ker } P_n^* \right)^a. \quad (7)$$

Сформулируем теперь основной результат данной статьи.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть для линейной изометрии V в банаховом пространстве X существует линейная ортогональная проекция P на $\text{Im } V$. Тогда пара операторов (V, P) порождает разложение Вольда (5), если и только если $M(V)$ *разделяет* $N(V, P)$.

Эта теорема оказывается следствием одного более общего утверждения. Рассмотрим последовательность $\{T_n\}$ ограниченных линейных операторов в X таких, что $\|T_n\| \leq \text{const}$ и $T_n T_m = T_m T_n = T_n$ при $n > m$. Положим

$$\mathcal{M} = \bigcap_1^\infty F(T_n), \quad \mathcal{N} = \bigcap_1^\infty F(T_n^*).$$

Здесь и далее $F(\cdot)$ – множество неподвижных векторов соответствующего оператора.

ЛЕММА 2.2. *Следующие условия эквивалентны:*

- а) операторы T_n слабо сходятся при $n \rightarrow \infty$;
- б) операторы T_n сильно сходятся при $n \rightarrow \infty$;
- в) $\mathcal{M}$ разделяет $\mathcal{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что б) $\Rightarrow$ а). Для произвольных различных функций $y_1, y_2 \in \mathcal{N}$ найдем элемент $x \in X$ со свойством $(x, y_1) \neq (x, y_2)$, тогда $(x, y_i) = (x, T_n^* y_i) = (T_n x, y_i)$ при $n \geq 1$, $i = 1, 2$. Если $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T_\infty$, то $(T_\infty x, y_1) \neq (T_\infty x, y_2)$. Поскольку $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} T_m T_n x = T_m T_\infty x$ и $T_m T_n = T_n$ для $n > m$, то $T_m T_\infty x = T_\infty x$ при всех $m \geq 1$, откуда $T_\infty x \in \mathcal{M}$ и импликация а) $\Rightarrow$ в) установлена.

Пусть теперь

$$D = \bigcup_1^\infty \text{Im}(I - T_n), \quad G = \{x \in X : \exists s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x\}.$$

Так как $\|T_n\| \leq \text{const}$, то G – замкнутое подпространство в X , а поскольку $T_n(I - T_m) = 0$ для $n > m$, то $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = 0$ на D и $G \supset D$. Далее, $\text{Im}(I - T_n)^0 = \text{Ker}(I^* - T_n^*) = F(T_n^*)$ и $D^0 = \mathcal{N}$, поэтому $G^0 \subset \mathcal{N}$. С другой стороны, $G \supset \mathcal{M}$, следовательно, $G^0 \subset \mathcal{M}^0$. Но по предположению пункта в) $\mathcal{M}^0 \cap \mathcal{N} = \{0\}$, стало быть, $G^0 = \{0\}$ и $G = X$. Тем самым получена импликация в) $\Rightarrow$ б), и лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Данную лемму можно вывести из общей версии операторной эргодической теоремы, принадлежащей Сато [6]. Соответствующие рассуждения, однако, не будут короче приведенных выше.

Вернемся к теореме 2.1. Разложение Вольда (5) равносильно соотношению (3) для проекторов P_n , поэтому достаточно применить лемму 2.2 с $T_n = P_n$, $\mathcal{M} = M(V)$, $\mathcal{N} = N(V, P)$, и теорема доказана.

Вопрос о сходимости (3) проекторов P_n часто сводится к простому сравнению размерности подпространств $M = M(V)$ и $N = N(V, P)$.

ЛЕММА 2.4. *Для произвольной линейной изометрии V в X и произвольного ортогонального проектора $P \in \mathcal{P}_V$ справедливы утверждения:*

- а) $\dim M \leq \dim N$;
- б) если M разделяет N , то $\dim M = \dim N$;
- в) если $\dim M < \infty$ и $\dim M = \dim N$, то M разделяет N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $K^0 = N$, то $\text{codim } K = \dim N$. Но $M \cap K = \{0\}$, поэтому $\text{codim } K \geq \dim M$, и пункт а) доказан. Далее, коль скоро M разделяет N , то по теореме 2.1 проекторы P_n слабо сходятся к P_∞ при $n \rightarrow \infty$, а значит, $P_n^* \rightarrow P_\infty^*$

в слабой* операторной топологии. Поскольку $P_m^* P_\infty^* = P_\infty^*$ и $\|P_m^*\| = 1$ для $m \geq 1$, то P_∞^* – ортопроектор на подпространство N . Таким образом, $M = \text{Im } P_\infty$ и $N = \text{Im } P_\infty^*$, откуда явствует, что $\dim M = \dim N$. Наконец, если $\dim M < \infty$ и $\dim M = \dim N$, то с учетом равенства $\text{codim } K = \dim M$ имеем $X = M \oplus K$ и $M^0 \cap N = \{0\}$. Тем самым, M разделяет N , и лемма доказана.

Подпространство $M = M(V)$ содержит все собственные векторы изометрического оператора V и, в частности, $M \supset F(V)$, где $F(V) = \text{Ker}(I - V)$. Точно также, подпространству $N = N(V, P)$ принадлежат все собственные векторы изометрического оператора U и, в частности, $N \supset F(U)$. С помощью тождества $V^*U = I^*$ находим, что N содержит в себе те и только те собственные векторы оператора V^* , которые, во-первых, отвечают собственным числам λ с $|\lambda| = 1$, а во-вторых, принадлежат аннулятору R^0 . Покажем, что проблема разложения Вольда для пары операторов (V, P) связана с возможностью включения $N \subset F(V^*)$, где $F(V^*) = \text{Ker}(I^* - V^*)$.

ЛЕММА 2.5. *Если M разделяет N , то условия $N \subset F(V^*)$ и $M = F(V)$ эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тождества $P_n = V^n T^n$ и $TV = I$ влекут формулу

$$P_n(I - V) = P_n - P_{n-1} + (I - V)P_{n-1}.$$

Поскольку $N = K^0$ и $\text{Im}(I - V)^0 = F(V^*)$, то $N^0 = K$ и $\text{Im}(I - V) \subset F(V^*)^0$. Условие $N \subset F(V^*)$ обеспечивает теперь вложение $\text{Im}(I - V) \subset K$, а тем самым, и сходимость операторов $P_n(I - V) \xrightarrow{s} 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $M^0 \cap N = \{0\}$, то теорема 2.1 гарантирует (см. замечание 1.3) соотношение $P_n - P_{n-1} \xrightarrow{s} 0$, а стало быть, и сильную сходимость $(I - V)P_{n-1} \rightarrow 0$. Но $P_{n-1}x = x$ на M , значит, $M = F(V)$.

Обратно, если $M = F(V)$ и M разделяет N , то $(I - V)P_{n-1} \xrightarrow{s} 0$ и $P_n - P_{n-1} \xrightarrow{s} 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но тогда и $P_n(I - V) \xrightarrow{s} 0$, откуда $\text{Im}(I - V) \subset K$. Переходя к аннуляторам, получаем включение $N \subset F(V^*)$ и лемма доказана.

Оказывается, в рефлексивном пространстве X условие “ M разделяет N ” выполняется автоматически.

ТЕОРЕМА 2.6. *Пусть для линейной изометрии V в рефлексивном банаховом пространстве X существует линейная ортогональная проекция P на $\text{Im } V$. Тогда пара операторов (V, P) порождает разложение Вольда пространства X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.1 достаточно показать, что $M(V)$ разделяет $N(V, P)$. В сопряженном пространстве X^* слабое* замыкание выпуклого множества совпадает с его сильным замыканием, поэтому равенство (7) принимает вид

$$M^0 = \left(\bigcup_1^\infty \text{Ker } P_n^* \right)^c.$$

Те же доводы, что и при выводе пункта а) леммы 1.1, позволяют установить сильную сходимость к нулю последовательности проекторов P_n^* на подпространстве M^0 . Но $P_n^*y = y$ на N для $n \geq 1$, следовательно, $M^0 \cap N = \{0\}$, и все доказано.

Согласно замечанию 1.3 утверждение теоремы эквивалентно сходимости (3) проекторов P_n . В рефлексивном пространстве сходимость убывающей последовательности равномерно ограниченных коммутирующих проекторов установлена еще Лорхом [7]. Это дает короткий альтернативный вывод теоремы 2.6, хотя и доказатель-

ство, приведенное выше, не выглядит сложным. С другой стороны, результат Лорха нетрудно получить как частный случай леммы 2.2, действуя так же, как при доказательстве теоремы 2.6.

Кроме того (см. [5; теорема 4.1.10]), каждое дополняемое подпространство рефлексивного пространства есть образ проектора с минимально возможной нормой. Таким образом, в теореме 2.6 достаточно предположить наличие для любого $\varepsilon > 0$ проекции $P_\varepsilon: X \rightarrow VX$ с $\|P_\varepsilon\| \leq 1 + \varepsilon$. Отметим еще в данной связи классический результат Пелчинского [8]: если V – изометрия в $X = l_p$, $1 \leq p < \infty$, то существует ортогональный проектор $P: X \rightarrow VX$. Между тем [5; следствие 4.2.2], в гладком пространстве Банаха, каковым является l_p при $p > 1$, на каждое подпространство существует не более одной ортопроекции. Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 2.7. *Произвольная изометрия в l_p , $1 < p < \infty$, порождает единственное разложение Вольда.*

Разложение Вольда типа (5) играет важную роль при построении [1]–[3] неклассической спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве на основе функциональной модели Секефальви-Надя-Фойаша. Конструктивная банахова версия такой теории, несомненно, представляла бы большой интерес. Стоит упомянуть с этой точки зрения работу [9], в которой обобщены на банахов случай результаты Халмоща [2; задача 116], связанные с описанием коммутанта одностороннего сдвига кратности 1 в пространстве Гильберта.

3. Случай $X = C(H)$. Линейные изометрии естественно возникают в топологической динамике. Если φ – непрерывное необратимое отображение хаусдорфова компакта H на себя, то действующий по закону

$$(Vx)(\xi) = x(\varphi\xi) \quad \text{для } \xi \in H \quad (8)$$

оператор $V = V_\varphi$ изометричен в снабженном $\sup$ -нормой пространстве $C(H)$ вещественных или комплексных непрерывных функций $x(\xi)$ на H . Поведение итераций V^n в $C(H)$ тесно связано с динамическими свойствами полукаскада $\{\varphi^n\}$, $n \geq 0$, на H . Было бы полезно выяснить при каких условиях на эпиморфизм φ оператор $V = V_\varphi$ порождает или не порождает разложение Вольда пространства $C(H)$ в зависимости от выбора проектора $P \in \mathcal{P}_V$. В связи с этой несомненно интересной задачей мы ограничимся пока рядом общих замечаний о существовании линейных ортогональных проекций на образ $\text{Im } V$, а также подробным анализом одного содержательного примера.

Отметим, что оператор $V = V_\varphi$ типа (8) осуществляет алгебраический гомоморфизм банаховой алгебры $C(H)$ и является марковским, т.е. $V1 = 1$ и $Vx \geq 0$ для $x \geq 0$. Нам будет удобней пользоваться равносильным определением марковского оператора, подразумевающим требования $V1 = 1$ и $\|V\| = 1$. При каждом $n \geq 1$ отношение эквивалентности

$$\xi_1 \sim \xi_2, \quad \text{если } \varphi^n \xi_1 = \varphi^n \xi_2,$$

индуцирует разбиение H на замкнутые множества вида $\xi^{(n)} = \varphi^{-n} \varphi^n \xi$, $\xi \in H$, причем $\xi \in \xi^{(n)}$. Образ $\text{Im } V^n$ оператора V^n состоит из всех непрерывных функций постоянных на каждом из множеств $\xi^{(n)}$ и представляет собой замкнутую подалгебру в $C(H)$, содержащую константы, а в комплексной ситуации еще и комплексно сопряженные элементы. Этими же свойствами обладает, как пересечение

всех $\text{Im } V^n$, и подалгебра $M(V)$. Если компакт H метризуем, то согласно результатам работ [10], [11] достаточным (но не необходимым!) условием существования в $C(H)$ ортогонального (марковского) проектора на подпространство $\text{Im } V$ служит открытость отображения φ . На самом деле, для открытой сюръекции $\varphi: H \rightarrow H$ в статье [10] доказано существование линейного оператора $T: C(H) \rightarrow C(H)$ со свойствами $\|T\| = 1$ и $TV = 1$, но тогда VT – марковский проектор на $\text{Im } V$. В общей ситуации, совокупность $\mathcal{P}_V$ такого рода проекторов может оказаться пустой, например, (см. [11]) для следующего отображения φ отрезка $[0, 3]$ на себя:

$$\varphi\xi = \begin{cases} \xi, & \xi \in [0, 1]; \\ 1, & \xi \in [1, 2]; \\ 2\xi - 3, & \xi \in [2, 3]. \end{cases}$$

В качестве обещанного примера рассмотрим линейное растягивающее отображение единичной окружности S . В мультипликативной записи это отображение задается формулой

$$\varphi_m z = z^m, \quad |z| = 1,$$

а в аддитивной записи – соотношением

$$\varphi_m \theta = m\theta \pmod{2\pi}.$$

Здесь $z = e^{i\theta}$ и m – натуральное число, отличное от единицы. Как известно [12], итерации φ_m демонстрируют весьма сложную, хаотическую динамику на S . Покажем, что соответствующая отображению $\varphi = \varphi_m$ изометрия $V = V_\varphi$ порождает или не порождает разложение Вольда пространства $C(S)$ в зависимости от выбора марковской проекции $P \in \mathcal{P}_V$.

Множество AF функций с абсолютно сходящимся рядом Фурье

$$x(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k)z^k$$

сильно плотно в $C(S)$. Один из марковских проекторов на $\text{Im } V$ можно взять в форме

$$(Px)(z) = m^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} x(z\nu_j), \quad (9)$$

где $x \in C(S)$ и ν_j – корни степени m из 1. Для функций $x(z)$ класса AF находим, что

$$(Px)(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(km)z^{km}.$$

Пользуясь индуктивно тождеством $P_n = VP_{n-1}V^{-1}P$ для проекторов вида (1) наряду с соотношениями $V: z^k \rightarrow z^{km}$ и $V^{-1}: z^{km} \rightarrow z^m$, приходим к равенству

$$(P_n x)(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(km^n)z^{km^n}, \quad x \in AF.$$

Поскольку $\|x\| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|x_k\|$ для $x \in AF$ и $\|P_n\| = 1$ при $n \geq 1$, то $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n x = \text{const}$ для всех $x \in C(S)$. Тем самым (см. замечание 1.3) установлено, что изометрия V и проектор P вида (9) порождают разложение Вольда в $C(S)$.

Выясним для полноты картины, как при этом устроены критические подпространства $M = M(V)$ и $N = N(V, P)$. Согласно теореме 2.1 M разделяет N . Так как $P_n 1 = 1$ для $n \geq 1$ и $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n x = \text{const}$ на $C(S)$, то $M = \{\text{const}\}$, стало быть, $\dim M = 1$ и по лемме 2.4 б) подпространство N одномерно. Заметим, что

$$P_n = m^{-n} \sum_{k=0}^{b(m,n)} \Phi(2\pi k m^{-n}),$$

где $b(m, n) = m^n - 1$ и $\Phi(\theta)$ – оператор сдвига в $C(S)$, действующий по правилу $\Phi(\theta): x(z) \rightarrow x(ze^{i\theta})$. Соответствующий оператор $\Phi^*(\theta)$ в сопряженном пространстве $C^*(S)$ имеет вид $\Phi^*(\theta)\mu = \mu_\theta$, где $\mu_\theta(E) = \mu(e^{-i\theta}E)$ для произвольной меры $\mu \in C^*(S)$ и борелевского множества $E \subset S$. Итак,

$$P_n^* \mu = m^{-n} \sum_{k=0}^{b(m,n)} \Phi^*(2\pi k m^{-n}) \mu, \quad \mu \in C^*(S),$$

следовательно, $P_n^* \gamma = \gamma$ для меры Лебега γ на S и любых $n \geq 1$, а потому подпространство $N(V, P)$ состоит из мер кратных γ .

Построим теперь (ограничившись случаем $m = 2$) марковский проектор $P \in \mathcal{P}_V$, обладающий тем свойством, что пара операторов (V, P) не порождает разложение Вольда пространства $C(S)$. Исходим при этом из аддитивной записи линейного растягивающего отображения $\varphi_2: S \rightarrow S$. Множество $\mathcal{P}_V$ в данной ситуации фактически описано Ллойдом [11; пример 2] и состоит из проекторов P_s , действующих на элементы $x \in C(S)$ по правилу

$$(P_s x)(\theta) = s(\theta)x(\theta) + s(\theta + \pi)x(\theta + \pi).$$

Здесь $s(\theta)$ – произвольная непрерывная функция на S , удовлетворяющая требованиям $0 \leq s(\theta) \leq 1$, $s(\theta) + s(\theta + \pi) = 1$ для $\theta \in S$. В частности, проектору (9) при $m = 2$ соответствует функция $s(\theta) \equiv 1/2$.

Положим $s(\theta) = \cos^2 3\theta/2$, тогда оператор $T_s = V^{-1}P_s$ в $C(S)$ выражается формулой

$$(T_s x)(\theta) = s\left(\frac{\theta}{2}\right)x\left(\frac{\theta}{2}\right) + s\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)x\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right),$$

а сопряженный оператор $U_s = T_s^*$ действует на меры Дирака $\delta(\theta) \in C^*(S)$ следующим образом:

$$U_s \delta(\theta) = s\left(\frac{\theta}{2}\right)\delta\left(\frac{\theta}{2}\right) + s\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\delta\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right).$$

Например,

$$U_s \delta(0) = s(0)\delta(0) + s(\pi)\delta(\pi) = \delta(0),$$

так как $s(0) = 1$ и $s(\pi) = 0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} U_s \left(\delta \left(\frac{2\pi}{3} \right) + \delta \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right) &= s \left(\frac{\pi}{3} \right) \delta \left(\frac{\pi}{3} \right) + s \left(\frac{4\pi}{3} \right) \delta \left(\frac{4\pi}{3} \right) \\ &\quad + s \left(\frac{2\pi}{3} \right) \delta \left(\frac{2\pi}{3} \right) + s \left(\frac{5\pi}{3} \right) \delta \left(\frac{5\pi}{3} \right) \\ &= \delta \left(\frac{2\pi}{3} \right) + \delta \left(\frac{4\pi}{3} \right), \end{aligned}$$

ибо $s(2\pi/3) = s(4\pi/3) = 1$ и $s(\pi/3) = s(5\pi/3) = 0$. Подпространство $N = N(V, P_s)$ содержит все инвариантные векторы оператора U_s , поэтому $\dim N \geq 2$. Но $M(V) = \{\text{const}\}$, следовательно, $\dim M = 1$ и по лемме 2.4 б) подпространство M не разделяет N . Теорема 2.1 позволяет теперь сделать вывод, что пара операторов (V, P_s) не порождает разложение Вольда пространства $C(S)$.

Заключение. Разложение Вольда дает полезную информацию о структуре линейного изометрического оператора V , действующего в произвольном банаховом пространстве X . Особого внимания с этой точки зрения заслуживает класс изометрий $V_\varphi: C(H) \rightarrow C(H)$, индуцированных непрерывными отображениями φ хаусдорфова компакта H на себя. Было бы интересно выяснить, при каких топологических условиях на компакт H и эпиморфизм φ оператор V_φ порождает разложение Вольда пространства непрерывных функций $C(H)$, а также, каким образом наличие или отсутствие такого разложения связано с динамикой полукаскада $\{\varphi^n\}$, $n \geq 0$, на H . Данная тематика может стать предметом последующих публикаций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1970.
- [2] П. Р. Халмош, *Гильбертово пространство в задачах*, Мир, М., 1970.
- [3] Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980.
- [4] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы*, ч. 1. Общая теория, УРСС, М., 2004.
- [5] В. П. Одинец, М. Я. Якубсон, *Проекторы и базисы в нормированных пространствах*, УРСС, М., 2004.
- [6] R. Sato, "On abstract mean ergodic theorems", *Tohoku Math. J.* (2), **30**:4 (1978), 575–581.
- [7] E. R. Lorch, "On a calculus of operators in reflexive vector spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **45**:2 (1939), 217–234.
- [8] A. Pelczynski, "Projections in certain Banach spaces", *Studia Math.*, **19**:2 (1960), 209–228.
- [9] R. M. Crownover, "Commutants of shifts on Banach spaces", *Michigan Math. J.*, **19**:3 (1972), 233–247.
- [10] E. Michael, "A linear mapping between function spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15**:3 (1964), 407–409.
- [11] S. P. Lloyd, "On extreme averaging operators", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14**:2 (1963), 305–310.
- [12] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.

А. В. Романов

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)
E-mail: Vitkar48@inbox.ru

Поступило

19.01.2007

Исправленный вариант

17.04.2007