Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Пекарский, Новое доказательство неравенства Сем-меса для производной рациональной функции, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 2, 258–264

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm419>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 16:22:28

УДК 517.53

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА СЕММЕСА ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

А. А. Пекарский

В открытом круге $|z| < 1$ комплексной плоскости рассматриваются следующие пространства функций: $\mathcal{B}$ – пространство Блоха; H_p^α , $\alpha \geq 0$, $0 < p \leq \infty$, – пространство Харди–Соболева; B_p^α , $\alpha \geq 0$, $0 < p \leq \infty$, – пространство Харди–Бесова. Показано, что если все полюсы рациональной функции R степени n , $n = 1, 2, 3, \dots$, лежат в области $|z| > 1$, то $\|R\|_{H_{1/\alpha}^\alpha} \leq cn^\alpha \|R\|_{\mathcal{B}}$, $\|R\|_{B_{1/\alpha}^\alpha} \leq cn^\alpha \|R\|_{\mathcal{B}}$, где $\alpha > 0$, а $c > 0$ зависит лишь от α . Второе из этих неравенств в случае полуплоскости было получено Семмесом в 1984 году. Доказательство Семмеса основано на ганкелевых операторах, а наше – на специальном интегральном представлении рациональной функции.

Библиография: 7 названий.

Семмес [1], используя ганкелевы операторы, получил (см. ниже (2)) неравенство типа Бернштейна, связывающее квазинормы рациональной функции (р.ф.) в пространствах Блоха $\mathcal{B}$ и Харди–Бесова $B_{1/\alpha}^\alpha$. В связи с этим см. также работы Пеллера [2], [3], Рохберга [4] и автора [5]. Здесь предлагается прямое, существенно более простое доказательство неравенства (2). Наше доказательство основано на специальном интегральном представлении р.ф. (см. ниже лемма 1). Это позволяет, с одной стороны, существенно упростить доказательство результатов из [1] и [4] о наилучших рациональных приближениях в пространстве Блоха. С другой стороны, наше доказательство показывает, что указанные результаты можно получить без обращения к теории ганкелевых операторов. Отметим еще, что в [1] неравенство (2) доказано для полуплоскости, а мы проводим его доказательство для круга.

Введем необходимые обозначения. Пусть D и T суть соответственно открытый круг $|z| < 1$ и его граница – окружность $|z| = 1$. Через m_1 и m_2 обозначим соответственно меру Лебега, рассматриваемую на жордановых спрямляемых кривых $S \subset \mathbb{C}$, и плоскую меру Лебега в $\mathbb{C}$. Через $L_p(S)$, $0 < p \leq \infty$, обозначим пространство Лебега комплексных функций на S , наделенных стандартной квазинормой $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(S)}$.

Для функции f , аналитической в D , и $\alpha > 0$ через $\mathcal{J}^\alpha f$ обозначаем производную Римана–Лиувилля порядка α . Именно, если $\hat{f}(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, есть k -й коэффициент Маклорена f , то $(\mathcal{J}^\alpha f)^\wedge(k) = (\Gamma(k + \alpha + 1)/\Gamma(k + 1))\hat{f}(k)$, где Γ – гамма-функция Эйлера. Очевидно, $(\mathcal{J}^n f)(z) = (z^n f(z))^{(n)}$ для $n \in \mathbb{N}$. Будем также считать $\mathcal{J}^0 f := f$ и $\mathcal{J} f := \mathcal{J}^1 f$.

В работе рассматриваются следующие пространства функций, аналитических в D : H_p , $0 < p \leq \infty$, – пространство Харди (см., например, [6]); H_p^α , $\alpha \geq 0$, $0 < p \leq \infty$, – пространство Харди–Соболева; B_p^α , $\alpha \geq 0$, $0 < p \leq \infty$, – пространство Харди–Бесова;

$\mathcal{B}$ – пространство Блоха. Именно, $f \in H_p^\alpha$, если $\mathcal{J}^\alpha f \in H_p$. При этом полагаем $\|f\|_{H_p^\alpha} = \|\mathcal{J}^\alpha f\|_{H_p}$. Далее, $f \in B_p^\alpha$, если конечна квазинорма

$$\|f\|_{B_p^\alpha} := \left[\frac{1}{\pi} \int_D |(\mathcal{J}^{\alpha+1} f)(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-1} dm_2(z) \right]^{1/p} \quad \text{при } 0 < p < \infty;$$

$$\|f\|_{B_\infty^\alpha} := \sup_{z \in D} |(\mathcal{J}^{\alpha+1} f)(z)|(1 - |z|^2) \quad \text{при } p = \infty.$$

Пространство B_∞^0 называется *пространством Блоха* и обозначается через $\mathcal{B}$.

Положительные величины, в разных местах, вообще говоря, разные, обозначаем через $c, c_1, c_2, \dots; c(\dots), c_1(\dots), c_2(\dots), \dots$.

Основным результатом данной статьи является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть R – рациональная функция степени n , $n = 1, 2, 3, \dots$, все полюсы которой лежат вне круга $\overline{D}$. Тогда

$$\|R\|_{H_{1/\alpha}^\alpha} \leq c_1(\alpha) n^\alpha \|R\|_{\mathcal{B}}, \quad (1)$$

$$\|R\|_{B_{1/\alpha}^\alpha} \leq c_2(\alpha) n^\alpha \|R\|_{\mathcal{B}}. \quad (2)$$

Как известно (см., например, [5]), $H_2^\alpha = B_2^\alpha$, $H_p^\alpha \subsetneq B_p^\alpha$ при $p > 2$ и $H_p^\alpha \supsetneq B_p^\alpha$ при $p < 2$. Поэтому неравенства (1) и (2) равносильны при $\alpha = 1/2$; (1) сильнее (2) при $\alpha < 1/2$ и (2) сильнее (1) при $\alpha > 1/2$.

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теоремы 1.

Нам понадобится следующая формула типа формул Джрбашяна и Бергмана: если функция f аналитична в D и $(\xi f(\xi))' \ln(1/|\xi|)$ суммируема в D , то

$$f(z) = \frac{2}{\pi} \int_D \frac{(\xi f(\xi))' \ln(1/|\xi|)}{(1 - \bar{\xi}z)^2} dm_2(\xi), \quad z \in D. \quad (3)$$

В справедливости (3) можно убедиться по следующей схеме:

- 1) используя полярные координаты, доказать (3) для функции $f(z) = z^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$;
- 2) доказать (3) для полиномов;
- 3) с помощью предельного перехода получить (3) в общем виде.

Для $a \in D$ введем аналитическую в D функцию $\psi_a(z) = (1 - \bar{a}z)^{-1}$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z , находим, что при $\alpha \geq 0$

$$(\mathcal{J}^\alpha \psi_a)(z) = \Gamma(\alpha + 1)(1 - \bar{a}z)^{-\alpha-1}, \quad (4)$$

где ветвь многозначной функции $(1 - \xi)^{-\alpha-1}$ выбрана так, что $(1 - \xi)^{-\alpha-1} > 0$ при $\xi \in (-\infty, 1)$.

Пусть R – р.ф. из теоремы 1. Ее полюсы запишем в виде $1/\bar{a}_k$, $k = 1, \dots, n$, где $a_k \in D$. Введем

$$B(z) := \prod_{k=0}^n \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}, \quad a_0 := 0,$$

– произведение Бляшке порядка $n + 1$.

ЛЕММА 1. Для любых $\alpha > 0$ и $z \in \overline{D}$ имеет место равенство

$$(\mathcal{J}^\alpha R)(z) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\pi} \int_D (\xi R(\xi))' \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \bar{\xi} \left(\frac{1 - \overline{B(\xi)B(z)}}{1 - \bar{\xi}z} \right)^{\alpha+1} \right] \ln \frac{1}{|\xi|} dm_2(\xi). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При фиксированном $z \in \overline{D}$ обе части (5) непрерывно зависят от полюсов R . Следовательно, можем считать числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ попарно различными. Тогда, раскладывая R на простые дроби, будем иметь

$$R(z) = \sum_{k=0}^n b_k \psi_{a_k}(z),$$

где b_k – некоторые коэффициенты. Поэтому нам достаточно убедиться в справедливости (5) для каждой функции $R = \psi_{a_k}$. Пусть g_{a_k} – правая часть (5) с ψ_{a_k} вместо R . Поскольку $(\xi \psi_{a_k}(\xi))' = (1 - \bar{a}_k \xi)^{-2}$, то

$$\overline{g_{a_k}(z)} = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\pi} \int_D \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \left(\frac{1 - B(\xi)\overline{B(z)}}{1 - \xi \bar{z}} \right)^{\alpha+1} \right] \frac{\ln(1/|\xi|)}{(1 - \bar{\xi}a_k)^2} dm_2(\xi).$$

С учетом (3) и равенства $B(a_k) = 0$ отсюда получим, что $\overline{g_{a_k}(z)} = \Gamma(\alpha+1)(1 - \bar{z}a_k)^{-\alpha-1}$, т.е. (см. (4)) $g_{a_k}(z) = (\mathcal{J}^\alpha \psi_{a_k})(z)$. Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 и неравенства $\rho \ln(1/\rho) \leq (1 - \rho^2)/2$, $0 < \rho \leq 1$, получаем, что для любых $a > 0$ и $z \in \overline{D}$

$$|(\mathcal{J}^\alpha R)(z)| \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)\|R\|_{\mathcal{B}}}{\pi} \int_D \left| \frac{\partial(\xi Q(\xi, z)^{\alpha+1})}{\partial \xi} \right| \frac{dm_2(\xi)}{|\xi|}, \quad (6)$$

где

$$Q(\xi, z) := \frac{1 - \overline{B(z)B(\xi)}}{1 - \bar{\xi}z}.$$

Несложно убедиться, что при всех ξ и z из $\overline{D}$ выполняется соотношение

$$\left| \frac{\partial(\xi Q(\xi, z)^{\alpha+1})}{\partial \xi} \right| \leq \frac{(\alpha+1)|Q(\xi, z)|^\alpha}{|1 - \xi \bar{z}|} (|B'(\xi)| + |Q(\xi, z)|). \quad (7)$$

Пусть $a \in D$ и $\alpha > 0$. В дальнейшем неоднократно будут применяться неравенства

$$\int_\Gamma \frac{dm_1(\eta)}{|1 - \bar{a}\eta|^{\alpha+1}} \leq \frac{c_1(\alpha)}{(1 - |a|)^\alpha}, \quad (8)$$

$$\int_D \frac{dm_2(\xi)}{|1 - \bar{a}\xi|^{\alpha+2}|\xi|} \leq \frac{c_2(\alpha)}{(1 - |a|)^\alpha}. \quad (9)$$

Соотношение (8) доказано в [5] и [7, гл. 10]. Для получения (9) нужно перейти к полярным координатам и воспользоваться (8).

Нам понадобится также *радиальная максимальная функция* M^* . Именно, для функции f , определенной в D , положим

$$(M^* f)(\eta) := \sup_{\rho \in (0,1)} |f(\rho\eta)|, \quad \eta \in T.$$

Согласно теореме Харди–Литтлвуда (см., например, [6]) если $f \in H_p$ и $0 < p < \infty$, то

$$\int_T (M^* f)^p dm_1 \leq c \int_T |f|^p dm_1. \quad (10)$$

Здесь под $f(\eta)$ для $f \in H_p$ и $\eta \in T$ подразумеваются некасательные предельные значения $f(z)$, $z \in D$.

ЛЕММА 2. Для любых $\alpha > 0$ и $z \in T$ выполняется неравенство

$$|(\mathcal{J}^\alpha R)(z)| \leq c(\alpha) \|R\|_{\mathcal{B}} \int_T \left| \frac{\partial(\xi Q(\xi, z)^{\alpha+1})}{\partial \xi} \right|^{(\alpha+1)/(\alpha+2)} dm_1(\xi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для фиксированного $z \in T$ введем функцию

$$f_z(\xi) = \frac{\partial(\xi Q(\xi, z)^{\alpha+1})}{\partial \xi},$$

принадлежащую всем классам H_p . Из (7) следует, что $|f_z(\xi)| \leq 6^\alpha / (1 - |\xi|)^{\alpha+2}$. Поэтому, переходя к полярным координатам $\xi = \rho\eta$, $0 \leq \rho < 1$, $\eta \in T$, из (6) получим

$$|(\mathcal{J}^\alpha R)(z)| \leq c_1(\alpha) \|R\|_{\mathcal{B}} \int_T dm_1(\eta) \int_0^1 \min \left\{ \frac{1}{(1-\rho)^{\alpha+2}}, (M^* f_z)(\eta) \right\} d\rho.$$

Следовательно,

$$|(\mathcal{J}^\alpha R)(z)| \leq c_2(\alpha) \|R\|_{\mathcal{B}} \int_T (M^* f_z)(\eta)^{(\alpha+1)/(\alpha+2)} dm_1(\eta).$$

Остается воспользоваться неравенством (10). Лемма 2 доказана.

В связи с леммой 2 и неравенством (7) на окружности T рассмотрим следующие функции (определенные при указанных значениях параметров β , γ и δ):

$$\begin{aligned} K(z, \beta) &:= \int_T |Q(\eta, z)|^\beta dm_1(\eta), \quad \beta > 1; \\ N(z, \beta, \gamma) &:= \int_T \frac{|Q(\eta, z)|^\beta}{|1 - \bar{z}\eta|^\gamma} dm_1(\eta), \quad \beta > 0, \quad 0 < \gamma < 1, \quad \beta + \gamma > 1; \\ S(z, \beta, \gamma) &:= \int_T \frac{|Q(\eta, z)|^\beta}{|1 - \bar{z}\eta|^\gamma} |B'(\eta)|^\gamma dm_1(\eta), \quad \beta > 0, \quad 0 < \gamma < 1, \quad \beta + \gamma > 1; \\ \Lambda(z, \delta) &:= \sum_{k=0}^n \frac{1}{|1 - \bar{a}_k z|} \left(\frac{1 - |a_k|}{|1 - \bar{a}_k z|} \right)^\delta, \quad \delta > 0. \end{aligned}$$

Для функции K справедлива оценка (см. [5] или [7, гл. 10]):

$$K(z, \beta) \leq c(\beta) \Lambda \left(z, \frac{1}{\beta + 1} \right)^{\beta-1}, \quad z \in T. \quad (11)$$

В следующих леммах 3 и 4 получены необходимые нам соотношения для функций N и S .

ЛЕММА 3. Для любых $z \in T$ выполняется неравенство

$$N(z, \beta, \gamma) \leq c(\beta, \gamma) \Lambda(z, \delta)^{\beta+\gamma-1},$$

где $\delta = \delta(\beta, \gamma) \in (0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\beta > 0$ и $0 < \gamma < 1$, то можем подобрать положительные числа p и q , удовлетворяющие условиям $1/p + 1/q = 1$, $p\gamma < 1$ и $q\beta > 1$. Положим $\delta = 1/(q\beta + 1)$ и $E(z) = \{\eta \in T : |1 - \bar{z}\eta| \leq 1/\Lambda(z, \delta)\}$. Используя неравенство Гёльдера, находим, что вклад в интеграл от N по множеству $E(z)$ не превосходит

$$\left(\int_{E(z)} \frac{dm_1(\eta)}{|1 - \bar{z}\eta|^{p\gamma}} \right)^{1/p} \left(\int_{E(z)} |Q(\eta, z)|^{q\beta} dm_1(\eta) \right)^{1/p} \leq c_1 \Lambda(z, \delta)^{\gamma-1/p} K(z, q\beta)^{1/q} \\ \leq c_2 \Lambda(z, \delta)^{\beta+\gamma-(1/p+1/q)} = c_2 \Lambda(z, \delta)^{\beta+\gamma-1}.$$

Здесь при получении последнего неравенства мы воспользовались соотношением (11).

Для оценки вклада в интеграл от N по множеству $T \setminus E(z)$ воспользуемся неравенством $|Q(\xi, z)| \leq 2/|1 - \bar{z}\xi|$, $z, \xi \in T$. С учетом условия $\beta + \gamma > 1$ находим, что указанный вклад не превосходит

$$\int_{T \setminus E(z)} \frac{2^\beta}{|1 - \bar{z}\eta|^{\beta+\gamma}} dm_1(\eta) \leq c_3 \Lambda(z, \delta)^{\beta+\gamma-1}.$$

Этим лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. *Имеет место неравенство*

$$\int_T S(z, \beta, \gamma)^{1/(\beta+2\gamma-1)} dm_1(z) \leq c(\beta, \gamma)n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\eta \in T$ и $\delta \in (0, 1]$ имеем

$$|B'(\eta)| = \sum_{k=0}^n \frac{1 - |a_k|^2}{|1 - \bar{a}_k \eta|^2} \leq 2\Lambda(\eta, 1) \leq 2\Lambda(\eta, \delta).$$

Поэтому, используя теорему Фубини, лемму 3, неравенства (8) и (11), получим искомое утверждение в случае $\beta + 2\gamma = 2$:

$$\int_T S(z, \beta, \gamma) dm_1(z) = \int_T N(\eta, \beta, \gamma) |B'(\eta)|^\gamma dm_1(\eta) \\ \leq c_1 \int_T \Lambda(\eta, \delta)^{\beta+\gamma-1} \Lambda(\eta, \delta)^\gamma dm_1(\eta) \leq c_2 n.$$

Общий случай сведем к рассмотренному частному случаю. С этой целью выберем положительные числа β_0, β_1, p_0 и p_1 , удовлетворяющие условиям $\beta_0 + \beta_1 = \beta$, $1/p_0 + 1/p_1 = 1$, $p_0\beta_0 > 1$ и $p_1(\beta_1 + 2\gamma) = 2$. Существование таких чисел следует из наложенных на β и γ ограничений. Из неравенства Гёльдера получаем

$$S(z, \beta, \gamma) \leq K(z, \beta_0, p_0)^{1/p_0} S(z, p_1\beta_1, p_1\gamma)^{1/p_1}.$$

Далее заметим, что

$$\beta + 2\gamma - 1 = \left(\beta_0 - \frac{1}{p_0} \right) + \frac{1}{p_1}. \quad (12)$$

Поэтому можем применить неравенство Гёльдера в следующей форме:

$$\|S(\cdot, \beta, \gamma)\|_{1/(\beta+2\gamma-1)} \leq \|K(\cdot, p_0\beta_0)\|_{1/(p_0\beta_0-1)}^{1/p_0} \|S(\cdot, p_1\beta_1, p_1\gamma)\|_1^{1/p_1}.$$

Согласно (8), (11) и отмеченному выше частному случаю (в данной ситуации $p_1\beta_1 + 2p_1\gamma = 2$) получим

$$\|S(\cdot, \beta, \gamma)\|_{1/(\beta+2\gamma-1)} \leq c_3 n^{\beta_0-1/p_0} n^{1/p_1}.$$

Остается еще раз воспользоваться равенством (12). Лемма 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА (1). Используя лемму 2 и неравенство (7), получаем, что при $z \in T$

$$|(\mathcal{J}^\alpha R)(z)| \leq c(\alpha) \|R\|_{\mathcal{B}} \left\{ N\left(z, \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha+2}, \frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right) + S\left(z, \frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha+2}, \frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right) \right\}.$$

Здесь функция N удовлетворяет указанным выше ограничениям на параметры при всех $\alpha > 0$, а функция S — лишь при $\alpha > (\sqrt{5} - 1)/2$. Поэтому из лемм 3 и 4 мы получим неравенство (1) для $\alpha > (\sqrt{5} - 1)/2$.

Пусть сейчас $0 \leq \alpha \leq (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.61 \dots$. Заметим, что при $\alpha \in (0, 1)$ имеет место равенство

$$(\mathcal{J}^\alpha R)(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (\mathcal{J}R)(\rho\eta) \rho^\alpha (1-\rho)^{-\alpha} d\rho, \quad \eta \in T. \quad (13)$$

Для его доказательства нужно разложить R в ряд Маклорена и почленно проинтегрировать.

Из определений нормы в пространстве $\mathcal{B}$ и радиальной максимальной функции M^* для $\rho \in [0, 1)$ и $\eta \in T$ получаем, что

$$|(\mathcal{J}R)(\rho\eta)| \leq \min \left\{ \frac{\|R\|_{\mathcal{B}}}{1-\rho}, (M^* \mathcal{J}R)(\eta) \right\}.$$

С учетом (13) отсюда находим

$$|(\mathcal{J}^\alpha R)(\eta)| \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \min \left\{ \frac{\|R\|_{\mathcal{B}}}{1-\rho}, (M^* \mathcal{J}R)(\eta) \right\} \frac{d\rho}{(1-\rho)^\alpha}.$$

Следовательно,

$$|(\mathcal{J}^\alpha R)(\eta)| \leq c(\alpha) \|R\|_{\mathcal{B}}^{1-\alpha} (M^* \mathcal{J}R)(\eta)^\alpha.$$

Остается воспользоваться соотношением (10) и тем, что для $\alpha = 1$ неравенство (1) уже получено. Неравенство (1) доказано полностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА (2). Для $\eta \in T$ и $\rho \in [0, 1)$ имеют место соотношения

$$|(\mathcal{J}^{\alpha+1} R)(\rho\eta)| \leq (M^* \mathcal{J}^{\alpha+1} R)(\eta), \quad (14)$$

$$|(\mathcal{J}^{\alpha+1} R)(\rho\eta)| \leq \frac{c_1(\alpha) \|R\|_{\mathcal{B}}}{(1-\rho)^{\alpha+1}}. \quad (15)$$

Первое из них следует из определения функции M^* . Для доказательства второго заметим, что $(\mathcal{J}^\alpha \psi_a^2)(z) = \Gamma(\alpha+1)(1+\alpha\bar{a}z)(1-\bar{a}z)^{-\alpha-2}$ (здесь ψ_a функция из (4)). Значит, из (3) получим

$$(\mathcal{J}^\alpha f)(z) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\pi} \int_D \frac{1+\alpha\bar{\xi}z}{(1-\bar{\xi}z)^{\alpha+2}} (\xi f(\xi))' \ln \frac{1}{|\xi|} dm_2(\xi), \quad z \in D, \quad (16)$$

где функция f удовлетворяет тем же условиям, что и в (3). Из (9) и (16) следует неравенство (15).

Из определения (квази)нормы в $B_{1/\alpha}^\alpha$, (14) и (15) следует соотношение

$$\|R\|_{B_{1/\alpha}^\alpha}^{1/\alpha} \leq c_2 \int_T dm_1(\eta) \int_0^1 \min \left\{ \frac{\|R\|_{\mathcal{B}}^{1/\alpha}}{(1-\rho)^2}, \frac{(M^* \mathcal{J}^{\alpha+1} R)(\eta)^{1/\alpha}}{(1-\rho)^{1-1/\alpha}} \right\} d\rho.$$

Вычисляя внутренний интеграл, получим, что

$$\|R\|_{B_{1/\alpha}^\alpha} \leq c_3 \|R\|_{\mathcal{B}}^{1/(\alpha+1)} \left[\int_T (M^* \mathcal{J}^{\alpha+1} R)(\eta)^{1/(\alpha+1)} dm_1(\eta) \right]^\alpha.$$

Остается воспользоваться соотношениями (10) и (1) (с $\alpha + 1$ вместо α). Неравенство (2) доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Semmes S. Trace ideal criteria for Hankel operators and application to Besov space // Integral Equations and Operator Theory. 1984. V. 7. P. 241–281.
- [2] Пеллер В. В. Операторы Ганкеля класса σ_p и их приложения (рациональная аппроксимация, гауссовские процессы, проблема мажорации операторов) // Матем. сб. 1980. Т. 113. № 4. С. 538–582.
- [3] Пеллер В. В. Описание операторов Ганкеля класса σ_p при $p > 0$, исследование скорости рациональной аппроксимации и другие приложения // Матем. сб. 1983. Т. 122. № 4. С. 481–510.
- [4] Rochberg R. Decomposition theorems for Bergman spaces and their applications // Operator and Functional Theory. Proc. NATO Adv. Study Inst. (Lancaster, July 16–24, 1984): D. Reidel Publ. Company, 1985. P. 225–277.
- [5] Пекарский А. А. Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации // Матем. сб. 1984. Т. 124. № 4. С. 571–588.
- [6] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
- [7] Lorentz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
E-mail: vuv@univer.belpak.grodno.by

Поступило
10.09.1998