Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Соколовская, Один метод построения полурешеток бикомпактных G -расширений, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 6, 916–925

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4191>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:04:49

Один метод построения полурешеток бикомпактных G -расширений

А. М. Соколовская

Предлагается метод построения G -пространств, полурешетки бикомпактных G -расширений которых получаются путем дизъюнктного объединения двух полурешеток, соответствующих разбиениям пространств в подпространствах, и отождествления их максимальных элементов. С помощью этого метода построены примеры G -тихоновских пространств, у которых полурешетка эквивалентных бикомпактификаций имеет достаточно простую структуру и в ней имеются минимальные, но не наименьшие элементы.

Библиография: 10 названий.

1. Введение и предварительные сведения. Для тихоновского пространства X определена полная верхняя полурешетка его бикомпактификаций $K(X)$. Для G -тихоновского пространства X множество всех его бикомпактных G -расширений $K_G(X)$ является подрешеткой полурешетки $K(X)$ [1; предложение 1], и ее изучение начато в работах [2]–[4].

В [5] показано, что семейство полурешеток бикомпактных G -расширений G -тихоновских пространств совпадает с семейством полурешеток бикомпактных G -расширений псевдокомпактных G -пространств с дискретной действующей группой, и построен пример G -пространства X , полурешетка $K_G(X)$ которого имеет счетное число минимальных элементов. Данные результаты были получены с использованием понятия эквивариантного разбиения пары.

Разбиение G -пространства Y на непересекающиеся подмножества Y_α , $\alpha \in A$, назовем *эквивариантным разбиением*, если для любых $\alpha \in A$, $g \in G$ существует $\beta \in A$ такое, что $gY_\alpha = Y_\beta$. Если X – инвариантное подпространство G -пространства Y , то эквивариантное разбиение Y на подмножества X и одноточечные подмножества $Y \setminus X$ назовем *эквивариантным разбиением Y в подпространстве X* . Пусть Y – G -пространство, X – его инвариантное подмножество. *Эквивариантным разбиением пары (X, Y)* назовем полунепрерывное сверху эквивариантное разбиение Y в подпространстве X на бикомпактные подмножества. Множество всех эквивариантных разбиений пары (X, Y) будем обозначать $K_G(X, Y)$. На множестве $K_G(X, Y) = \{\mathcal{R}_\alpha : \alpha \in A\}$ определен естественный частичный порядок: $\mathcal{R}_\alpha \geq \mathcal{R}_\beta$, если каждый элемент разбиения $\mathcal{R}_\alpha$ содержится в некотором элементе разбиения $\mathcal{R}_\beta$. Множество $K_G(X, Y)$ с введенным выше порядком является полной верхней полурешеткой, и семейство полурешеток бикомпактных G -расширений G -тихоновских пространств совпадает с семейством полурешеток эквивариантных разбиений пар бикомпактных G -пространств в инвариантных подмножествах.

В настоящей работе предлагается метод построения G -пространств, полурешетки бикомпактных G -расширений которых получаются путем дизъюнктного объединения двух полурешеток, соответствующих разбиениям пространств в подпространствах, и отождествлением их максимальных элементов. Такой подход позволяет строить примеры G -тихоновских пространств, у которых полурешетка $K_G(X)$ имеет достаточно простую структуру и в ней имеются минимальные ненаименьшие элементы.

Все рассматриваемые пространства предполагаются тихоновскими, отображения пространств – непрерывными. Основные понятия, касающиеся G -пространств, имеются в [6], [7].

Необходимую информацию о решетках можно найти в [8]. Так как в дальнейшем будут рассматриваться только полные верхние полурешетки, то будем их называть просто полурешетками.

Необходимую информацию о группах можно найти, например, в [9]. Свободное произведение групп обозначается символом $*$. Следующее утверждение вытекает из непрерывности композиции непрерывных отображений.

ЛЕММА 1. Пусть на пространстве X заданы непрерывные действия α_i дискретных групп G_i , $i \in I$. Рассмотрим их свободное произведение $*_{i \in I} G_i$ в дискретной топологии. Тогда отображение $\alpha: *_{i \in I} G_i \times X \rightarrow X$, заданное по правилу

$$\alpha(g_1 \cdots g_n, x) = \alpha_{i_1}(g_1, \alpha_{i_2}(g_2, \dots, \alpha_{i_n}(g_n, x) \dots)),$$

где $g_k \in G_{i_k}$ при $k = 1, \dots, n$ и $g_1 \cdots g_n \in *_{i \in I} G_i$, определено корректно и задает непрерывное действие на X .

2. Пространство bX_χ и его свойства. Везде ниже натуральное число n отождествляется с множеством $\{0, \dots, n-1\}$.

Пусть задано счетное семейство $\chi = \{(X_i, M_i, x_i) : i \in \omega\}$ пар с отмеченными точками (т.е. $x_i \in M_i \subset X_i$, $i \in \omega$). Через X_χ обозначим множество таких конечных последовательностей $\{t_i\}_{i \in n}$, $n \in \mathbb{N}$, что $t_0 \in X_0$, если $n = 1$, и $t_0 \in M_0$, $t_{n-1} \in X_{n-1} \setminus \{x_{n-1}\}$, $t_i \in M_i \setminus \{x_i\}$ при остальных $i \in n$, если $n > 1$. Положим

$$bX_\chi = X_\chi \cup \{\{t_i\}_{i \in \omega} : t_0 \in M_0 \text{ и } t_i \in M_i \setminus \{x_i\} \text{ при } i \geq 1\}.$$

В $bX := bX_\chi$ для точки $P = \{p_i\}_{i \in n} \in X := X_\chi$ и подмножества $O \subset X_{n-1} \setminus \{x_{n-1}\}$, содержащего точку p_{n-1} , положим

$$B_{P,O}^\uparrow = \{\{t_i\}_{i \in \tau} \in bX : \tau \in [n, \omega] \text{ и } t_i = p_i \text{ при } i \in n-1, t_{n-1} \in O\}.$$

Для точки $P = \{p_i\}_{i \in n} \in X$ и подмножества $O \subset X_n$, содержащего точку x_n , положим

$$B_{P,O}^\downarrow = bX \setminus B_{P',F}^\uparrow,$$

где $F = X_n \setminus O$ и точка $P' = \{p'_i\}_{i \in n+1}$ такова, что $p_i = p'_i$ при $i \in n$ и $p'_n \in F$. Если $F = \emptyset$ или $p_{n-1} \notin M_{n-1}$, то полагаем $B_{P,O}^\downarrow = bX$.

Везде ниже для множества $B_{P,O}^\uparrow$ ($B_{P,O}^\downarrow$), где $P = \{p_i\}_{i \in n}$, будем считать, что множество O открыто в X_{n-1} , $p_{n-1} \in O$, и если $n > 1$, то $x_{n-1} \notin O$ (O открыто в X_n и $x_n \in O$). Легко проверить, что семейство $\mathcal{B} = \{B_{P,O}^\uparrow, B_{Q,U}^\downarrow\}$, где O, P и U, Q удовлетворяют этому соглашению, есть предбаза топологии на bX . Топология на X определяется как индуцированная из bX .

По точке $P = \{p_i\}_{i \in n} \in X$, где $p_{n-1} \in M_{n-1}$, определим множество

$$C_P = \{\{p_1, \dots, p_{n-1}, t\} : t \in X_n \setminus \{x_n\}\} \cup P \subset X,$$

которое в дальнейшем будем называть *слоем* bX . Положим

$$C_\emptyset = \{\{t\} : t \in X_0\} \subset X.$$

Очевидно, что любые два слоя или дизъюнкты, или совпадают, или имеют ровно одну общую точку.

Введем следующие обозначения. Пусть $P, Q \in X$, тогда

- $P < Q$, если $Q \in C_P$ и $P \neq Q$;
- $P \approx Q$, если P и Q лежат в одном слое, но $P \not\leq Q$ и $Q \not\leq P$;
- $P \ll Q$, если существует такая последовательность $P_1, \dots, P_n$ точек X , что $P = P_1 < P_2 < \dots < P_n = Q$;
- если $P = \{p_i\}_{i \in n}$, то положим $|P| = n$ и будем говорить, что точка P имеет n координат.

Легко проверяются следующие свойства взаимного расположения элементов предбазы и слоев bX , которые потребуются в дальнейшем:

$$\text{если } P \approx Q, \text{ то } B_{P,O}^\uparrow \cup B_{Q,U}^\uparrow = B_{S,O \cup U}^\uparrow, \text{ где } S \approx P \text{ и } S_{|S|-1} \in O \cup U; \quad (1)$$

$$\text{если } P \not\leq Q, Q \not\leq P \text{ и } P \not\approx Q, \text{ то } B_{P,O}^\uparrow \cap B_{Q,U}^\uparrow = \emptyset;$$

$$\text{если } P \ll Q, \text{ то } B_{P,O}^\downarrow \subset B_{Q,U}^\downarrow;$$

выполнены равенства

$$C_P \cap B_{Q,O}^\uparrow \begin{cases} \cong O, & \text{если } P < Q, \\ = C_P, & \text{если } P \gg Q', \text{ где } Q' \approx Q \text{ и } Q'_{|Q'|-1} \in O, \\ = \emptyset, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (2)$$

$$C_P \cap B_{Q,O}^\downarrow \begin{cases} \cong O, & \text{если } P = Q, \\ = \emptyset, & \text{если } P \gg Q \text{ и } P_{|Q|} \notin O, \\ = C_P, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3)$$

Из определения множеств $B_{P,O}^{\uparrow(\downarrow)}$, свойств (2) и (3) следует

ЛЕММА 2. *Слой C_P , где $|P| = n$, гомеоморфен X_n ; $C_\emptyset \cong X_0$. Если X_i , $i \in \omega$, является T_1 -пространством, то любой слой замкнут в bX .*

Проверка справедливости следующих двух утверждений не представляет сложности.

ЛЕММА 3. *Пространство bX – хаусдорфово тогда и только тогда, когда пространства X_i , $i \in \omega$, хаусдорфовы.*

ЛЕММА 4. *Если подмножества M_i плотны в X_i , $i \in \omega$, $\chi' = \{(M_i, M_i, x_i) : i \in \omega\}$, $\chi = \{(X_i, M_i, x_i) : i \in \omega\}$, то пространство $X_{\chi'}$ естественным образом плотно вложено в пространство bX_χ .*

ЛЕММА 5. *Пространство bX – бикомпакт тогда и только тогда, когда пространство X_i , $i \in \omega$, бикомпакт.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость* следует из леммы 2. Докажем достаточность. По лемме Александра о предбазе (см., например, [10; 3.12.2]) достаточно из любого покрытия пространства элементами некоторой предбазы выбрать конечное подпокрытие. Возьмем открытое покрытие Ω пространства bX элементами из $\mathcal{B}$ и предположим, что из него нельзя выбрать конечного подпокрытия.

Тогда слой $C_\emptyset$ не может принадлежать объединению элементов Ω вида $B_{P,O}^\uparrow$. Действительно, в противном случае по свойству (2) слой $C_\emptyset$ принадлежит объединению элементов Ω вида $B_{P,O}^\uparrow$, где $|P| = 1$, и при этом $C_\emptyset \cap B_{P,O}^\uparrow = O$. Так как слой $C_\emptyset$ бикомпактен, то существует конечное подсемейство $\Omega' \subset \Omega$ множеств вида $B_{P,O}^\uparrow$, где $|P| = 1$, объединению которого принадлежит $C_\emptyset$. По свойству (1) $\bigcup \Omega' = B_{P,X_0}^\uparrow$, где $|P| = 1$. Но $B_{P,X_0}^\uparrow = bX$ при $|P| = 1$ и, значит, вопреки предположению найдутся конечное подсемейство $\Omega' \subset \Omega$ такие, что $bX = \bigcup \Omega'$. Поэтому, принимая во внимание свойство (3), имеем $C_\emptyset \subset B_{P_1,O_1}^\downarrow \in \Omega$.

Отметим, что

$$bX \setminus B_{P_1,O_1}^\downarrow \subset B_{Q,X_{|P_1|} \setminus \{x_{|P_1|}\}}^\uparrow, \quad \text{где } Q > P_1.$$

Поэтому, по соображениям, приведенным выше, слой C_{P_1} не может принадлежать объединению элементов Ω вида $B_{P,O}^\uparrow$. Слой C_{P_1} также не может принадлежать объединению элементов Ω вида $B_{P,O}^\uparrow$ и $B_{P,O}^\downarrow$ и не принадлежать объединению элементов Ω только одного вида. Действительно, в противном случае из свойств (2), (3) и леммы 2 следует существование конечного подсемейства $\Omega' \subset \Omega$ такого, что $B_{Q,X_{|P_1|} \setminus \{x_{|P_1|}\}}^\uparrow \subset \bigcup \Omega'$, где $Q > P_1$. Значит, вопреки предположению в Ω найдется конечное подсемейство, покрывающее bX .

Тем самым, слой C_{P_1} принадлежит объединению элементов $\Omega' \subset \Omega$ вида $B_{P,O}^\downarrow$. Если среди Ω' нет элемента, содержащего весь слой C_{P_1} , то по свойству (3) все элементы Ω' имеют вид $B_{P,O}^\downarrow$, где $P = P_1$. Но тогда по лемме 2 и свойству (3) из семейства Ω' можно выбрать конечное подсемейство, в объединении элементов которого содержится множество $B_{Q,X_{|P_1|} \setminus \{x_{|P_1|}\}}^\uparrow$, где $Q > P_1$. Это противоречит нашему предположению.

Значит, существует такой элемент $B_{P_2,O_2}^\downarrow$, что $C_{P_1} \subset B_{P_2,O_2}^\downarrow$. При этом $P_2 \gg P_1$, так как в противном случае из определения множеств вида $B_{P,O}^\downarrow$ следует

$$B_{Q,X_{|P_1|} \setminus \{x_{|P_1|}\}}^\uparrow \subset B_{P_2,O_2}^\downarrow,$$

где $Q > P_1$, что противоречит нашему предположению.

Исходя из нашего предположения, строим последовательность множеств

$$B_{P_i,O_i}^\downarrow \in \Omega, \quad \text{где } P_i \ll P_{i+1}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

По точкам $P_i = \{p_j^i\}_{j \in n_i}$, $i \in \mathbb{N}$, однозначно (так как $P_i \ll P_{i+1}$) строится точка $T = \{t_i\}_{i \in \omega} \in bX$, где $t_j = p_j^i$ при $j \in n_i$ и $i \in \mathbb{N}$, которая принадлежит некоторому элементу $B \in \Omega$. Если B вида $B_{P,O}^\uparrow$, то, принимая во внимание свойство (2), имеем $C_{P_i} \subset B_{P,O}^\uparrow$, где $|P_i| > |P|$. Но при построении последовательности $B_{P_i,O_i}^\downarrow$ слой C_{P_i} , $i \in \mathbb{N}$, не принадлежал объединению элементов вида $B_{P,O}^\uparrow$. Значит, в этом случае последовательность $B_{P_i,O_i}^\downarrow$, $i \in \mathbb{N}$, построить нельзя. Если B вида $B_{P,O}^\downarrow$, то, принимая во внимание свойство (3), имеем $C_{P_i} \subset B_{P,O}^\downarrow$, где $|P_i| > |P|$. Но это также противоречит возможности построения последовательности $B_{P_i,O_i}^\downarrow$, $i \in \mathbb{N}$.

Полученное противоречие показывает неверность нашего предположения. Значит, пространство bX бикомпактно.

3. Действие группы на пространстве bX_χ и его свойства. Пусть T_j – инвариантное подмножество G -пространства Z_j с действием α'_j дискретной группы H_j и $t_j \in T_j$, $j = 0, 1$. Положим

$$\chi = \{(X_i, M_i, x_i)\}_{i \in \omega},$$

где $(X_i, M_i, x_i) = (Z_0, T_0, t_0)$ при четных $i \in \omega$ и $(X_i, M_i, x_i) = (Z_1, T_1, t_1)$ при нечетных $i \in \omega$. Тогда определены пространство bX_χ и его подпространство $X_{\chi'}$, построенное по семейству $\chi' = (M_i, M_i, x_i)$. Слои пространства bX_χ ($X_{\chi'}$), гомеоморфные пространству Z_0 (T_0) назовем *четными*, а гомеоморфные Z_1 (T_1) – *нечетными*.

Определим действие α_j группы H_j на bX_χ , $j = 0, 1$. Если $h \in H_0$, $P = \{p_i\}_{i \in \tau}$, где $\tau \in [1, \omega]$, положим

$$\alpha_0(h, P) =: h(P) = Q = \{q_i\}_{i \in \tau},$$

где $q_0 = \alpha'_0(h, p_0)$ и $q_i = p_i$ при $i \neq 0$.

Если $h \in H_1$ и $\alpha'_1(h, z_1) = t_1$, то для точки $P = \{p_i\}_{i \in \tau} \in bX_\chi$, где $\tau \in [1, \omega]$, положим

$$\alpha_1(h, P) =: h(P) = Q = \{q_i\}_{i \in \tau'},$$

где $\tau' \in [1, \omega]$, и

если $P = \{t_0\}$, то $Q = \{t_0, \alpha'_1(h, t_1)\}$;

если $P = \{t_0, z_1\}$, то $Q = \{t_0\}$;

если $p_0 = t_0$, $p_1 = z_1$ и $\tau > 2$, то $\tau = \tau' + 2$, и $q_i = p_{i+2}$;

если $p_0 = t_0$, $p_1 \neq z_1$, то $\tau' = \tau$, $q_1 = \alpha'_1(h, p_1)$ и $q_i = p_i$ при $i \neq 1$;

если $p_0 \neq t_0$, то $\tau' = \tau + 2$, $q_0 = t_0$, $q_1 = \alpha'_1(h, t_1)$ и $q_i = p_{i-2}$ при $i \neq 0, 1$.

Легко видеть, что любое $h \in H_j$, $j = 0, 1$, определяет взаимно однозначное отображение bX_χ на себя.

Дополним свойства (1)–(3). Для $h \in H_0$ имеем

$$h(C_P) = \begin{cases} C_\emptyset, & \text{если } P = \emptyset, \\ C_{h(P)}, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (4)$$

$$h(B_{P,O}^\uparrow) = \begin{cases} B_{h(P),h(O)}^\uparrow, & \text{если } P = \{p_0\}, \\ B_{h(P),O}^\uparrow, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (5)$$

$$h(B_{P,O}^\downarrow) = B_{h(P),O}^\downarrow. \quad (6)$$

Для $h \in H_1$ такого, что $\alpha'(h, z_1) = t_1$, имеем

$$h(C_P) = \begin{cases} C_{\{t_0, \alpha'(h, t_1)\}}, & \text{если } P = \emptyset, \\ C_\emptyset, & \text{если } P = \{t_0, z_1\}, \\ C_{h(P)} & \text{иначе;} \end{cases} \quad (7)$$

$$h(B_{P,O}^\uparrow) = \begin{cases} B_{h(P),O}^\uparrow, & \text{если } P = \{p_0\} \text{ и } t_0 \in O, \\ B_{h(P),h(O)}^\downarrow, & \text{если } P = \{p_0, p_1\} \text{ и } z_1 \in O, \\ B_{h(P),h(O)}^\uparrow, & \text{если } P = \{p_0, p_1\} \text{ и } z_1 \notin O, \\ B_{h(P),O}^\uparrow & \text{иначе;} \end{cases} \quad (8)$$

$$h(B_{P,O}^\downarrow) = \begin{cases} B_{P,h(O)}^\downarrow, & \text{если } P = \{t_0\} \text{ и } z_1 \in O, \\ B_{h(P),O}^\uparrow, & \text{если } P = \{t_0, z_1\}, \\ B_{h(P),O}^\downarrow & \text{иначе.} \end{cases} \quad (9)$$

Из свойств (5), (6), (8) и (9) следует непрерывность действия α_j дискретной группы H_j на bX_χ , $j = 0, 1$. Принимая во внимание лемму 1, имеем следующее утверждение.

ЛЕММА 6. *На пространстве bX_χ непрерывно действует дискретная группа $G = H_0 * H_1$.*

Обозначим через α действие группы G на пространстве bX_χ . Из свойств (4) и (7) имеем следующие утверждения.

ЛЕММА 7. *Действие α переводит слои в слои с сохранением четности.*

ЛЕММА 8. *Множество $X_{\chi'}$ является инвариантным подмножеством пространства bX_χ .*

Пусть подмножество T_j всюду плотно в бикомпакте Z_j , $j = 0, 1$. Тогда из лемм 4–6 и 8 следует

ЛЕММА 9. *Пространство bX_χ является бикомпактным G -расширением G -пространства $X_{\chi'}$.*

ЛЕММА 10. *Если ограничение действия α'_j на T_j транзитивно, $j = 0, 1$, то и ограничение действия α на $X_{\chi'}$ транзитивно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для любой точки $P \in X_{\chi'}$ существует $g \in G$ такой, что $g(P) = \{t_0\}$. Доказательство будем проводить индукцией по количеству координат точки из $X_{\chi'}$.

Для $P = \{p_0\}$ достаточно взять $g \in H_0$ такой, что $\alpha'_0(g, p_0) = t_0$.

Пусть для всех точек $P = \{p_0, \dots, p_k\}$, где $k < n$, существует такой элемент $g_P \in G$, что $g_P(P) = \{t_0\}$. Для проведения шага индукции достаточно показать, что для $P = \{p_0, \dots, p_n\}$ существует такой $g \in G$, что для $g(P) = \{p'_0, \dots, p'_{n'}\}$ имеем $n' < n$.

Существуют $h_0 \in H_0$ и $h_1 \in H_1$ такие, что $\alpha'_0(h_0, p_0) = t_0$ и $\alpha'_1(h_1, p_1) = t_1$. Тогда для $g = h_1 h_0 \in G$ имеем $g(P) = \{p_2, \dots, p_n\}$ (если $n = 1$, то $g(P) = \{t_0\}$).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если ограничение действия α'_j на T_j транзитивно, $j = 0, 1$, то для любых слоев одинаковой четности C_P и C_Q пространства bX_χ (а значит, и подпространства $X_{\chi'}$) существует такой $g \in G$, что $g(C_P) = C_Q$.*

4. Полурешетка эквивариантов пары $(X_{\chi'}, bX_\chi)$.

ЛЕММА 11. *Если ограничение действия α'_j транзитивно на T_j , $j = 0, 1$, то для всех $k \in \mathbb{N}$ точки $\{t_0\}$ и $\{u_0 \neq t_0, u_1, \dots, u_{2k-1}\}$, а также точки $\{t_0\}$ и $\{t_0, u_1, \dots, u_{2k}\}$ не могут принадлежать одному элементу эквивариантной пары $(X_{\chi'}, bX_\chi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть при (не)четных $i \in \mathbb{N}$ элементы $h_i \in H_0$ ($h_i \in H_1$) таковы, что $\alpha'_0(h_i, u_i) = t_0$ ($\alpha'_1(h_i, u_i) = t_1$). Предположим, что $\{t_0\} \sim \{t_0, u_1, \dots, u_{2k}\}$

$(\{t_0\} \sim \{u_0 \neq t_0, u_1, \dots, u_{2k-1}\})$. Определим элемент g группы G формулой $g = h_{2k} \dots h_1$ ($g = h_{2k-1} \dots h_0$). Тогда из определения действия группы G имеем

$$\begin{aligned} g(\{t_0, u_1, \dots, u_{2k}\}) &= \{t_0\}, \\ g^n(\{t_0\}) &= \{\underbrace{h_{2k}t_0, \dots, h_1t_1}_1, \dots, \underbrace{h_{2k}t_0, \dots, h_1t_1}_n\} \\ (g(\{u_0 \neq t_0, u_1, \dots, u_{2k-1}\})) &= \{t_0\}, \\ g^n(\{t_0\}) &= \{t_0, \underbrace{h_{2k-1}t_1, \dots, h_0t_0}_1, \dots, \underbrace{h_{2k-1}t_1, \dots, h_0t_0}_n\}. \end{aligned}$$

Так как $\{t_0\} \sim g^n(\{t_0\})$, то данный элемент эквивариантности пары имеет предельную точку

$$\begin{aligned} &\{h_{2k}t_0, \dots, h_1t_1, \dots, h_{2k}t_0, \dots, h_1t_1, \dots\} \\ &(\{t_0, h_{2k-1}t_1, \dots, h_0t_0, \dots, h_{2k-1}t_1, \dots, h_0t_0, \dots\}) \end{aligned}$$

в $bX_\chi \setminus X_{\chi'}$. Значит, он не может быть бикомпактен. Полученное противоречие доказывает лемму.

Для G -пространства X и точки $x \in X$ через G_x обозначается стабилизатор точки x .

ЛЕММА 12. Пусть ограничение действия α'_j на T_j транзитивно, $j = 0, 1$. Пусть также G -пространство $\langle Z_0, H_0, \alpha'_0 \rangle$ удовлетворяет следующему свойству: для любой точки $y \in T_0 \setminus \{t_0\}$ выполнено

$$y \in ((H_0)_{t_0} \cdot y)^d. \quad (*)$$

Если x и y принадлежат одному элементу эквивариантности пары $(X_{\chi'}, bX_\chi)$, то существует $z \in X_{\chi'}$ такое, что $x, y \in C_z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Поскольку действие α'_i транзитивно на M_i , $i = 0, 1$, то по леммам 10 и 7 достаточно рассмотреть только случай, когда $x = \{t_0\}$. Тогда точка y имеет вид $\{y_0 \neq t_0, y_1, \dots, y_n\}$ или $\{t_0, y_1, \dots, y_n\}$. Поскольку x и y принадлежат одному элементу эквивариантности пары $(X_{\chi'}, bX_\chi)$, то по лемме 11 в первом случае $n = 2k$, во втором — $n = 2k + 1$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

В первом случае $\{t_0\} = x \sim y = \{y_0, \dots, y_{2k}\}$. По свойству $(*)$ $y_0 \in ((H_0)_{t_0} \cdot y_0)^d$. Из определения топологии на bX_χ и действия на нем имеем $\{y_0\} \in ((H_0)_{t_0} \cdot y)^d$. Так как $\{t_0\} = h(\{t_0\}) \sim h(y)$ для любых $h \in (H_0)_{t_0}$ и элементы эквивариантности пары $(X_{\chi'}, bX_\chi)$ бикомпактны, то

$$\{y_0\} \sim y = \{y_0, y_1, \dots, y_k\} \sim \{t_0\}.$$

Тогда для $h \in H_0$ такого, что $\alpha'_0(h, y_0) = t_0$, имеем

$$\{t_0\} = h(\{y_0\}) \sim h(y) = \{t_0, y_1, \dots, y_k\}.$$

Но по лемме 11 это невозможно.

Во втором случае $\{t_0\} = x \sim y = \{t_0, y_1, \dots, y_{2k+1}\}$. Тогда для элемента $h \in H_1$ такого, что $\alpha'_1(h, y_1) = t_1$, имеем

$$\{t_0, \alpha'_1(h, t_1)\} = h(x) \sim h(y) = \{y_2, \dots, y_{2k+1}\}.$$

По свойству(*) $y_2 \in ((H_0)_{t_0} \cdot y_2)^d$. Из определения топологии на bX_χ и действия на нем $\{y_2\} \in ((H_0)_{t_0} \cdot h(y))^d$. Так как элементы эквивариантной пары $(X_{\chi'}, bX_\chi)$ бикомпактны и $h(\{t_0, \alpha'_1(h, t_1)\}) = \{t_0, \alpha'_1(h, t_1)\}$ для любого $h \in (H_0)_{t_0}$, то $\{y_2\} \sim \{t_0, \alpha'_1(h, t_1)\}$. Тогда для $g \in H_0$ такого, что $\alpha'_0(g, y_2) = t_0$, имеем

$$g(\{y_2\}) = \{t_0\} \sim \{\alpha'_0(g, t_0), \alpha'_1(h, t_1)\}.$$

Но по лемме 11 это также невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ограничение действия α'_j транзитивно на T_j , $j = 0, 1$, и H_0 -пространство $\langle Z_0, H_0, \alpha'_0 \rangle$ удовлетворяет свойству (*). Тогда полурешетка эквивариантной пары $(X_{\chi'}, bX_\chi)$ изоморфна полурешетке, полученной объединением полурешеток эквивариантной пар (T_0, Z_0) и (T_1, Z_1) и отождествлением их наибольших элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в лемме 12, всякий элемент эквивариантной пары $(X_{\chi'}, bX_\chi)$ лежит в одном слое. Проверим, могут ли в данном эквивариантном разбиении найтись два неодноточечных элемента, лежащих в слоях разной четности. По лемме 10 можно считать, что первому элементу принадлежат точки $\{x_0\}$ и $\{x_0, y_1\}$, а второму – $\{x_0\}$ и $y_0 \neq x_0$. Но тогда $\{x_0, y_1\} \sim \{y_0\}$, что противоречит лемме 12. Для завершения доказательства осталось показать, что эквивариантные разбиения $(X_{\chi'}, bX_\chi)$, соответствующие эквивариантным (M_0, X_0) и (M_1, X_1) на слоях, являются полунепрерывными сверху, т.е. что насыщения замкнутых в bX_χ множеств относительно данных разбиений замкнуты в bX_χ . Рассмотрим насыщения множеств вида $bX_\chi \setminus B_{P,O}^\uparrow$ и $bX_\chi \setminus B_{P,O}^\downarrow$. Насыщения этих множеств совпадают с ним самим, если четность слоя, в котором берется множество O , совпадает с четностью слоев, в которых одноточечны элементы эквивариантной пары, и совпадают с множеством $bX_\chi \setminus B_{Q,U}^\uparrow$ ($bX_\chi \setminus B_{Q,U}^\downarrow$), где U – дополнение до множества, являющегося насыщением дополнения до открытого множества O , точка Q – любая точка, последняя координата которой принадлежит U , а все другие координаты совпадают с соответствующими координатами точки P . Так как рассматривается полунепрерывное сверху эквивариантное разбиение пар в слоях, то насыщение дополнения до открытого множества O замкнуто. Значит, U открыто и насыщения множеств вида $bX_\chi \setminus B_{P,O}^\uparrow$ и $bX_\chi \setminus B_{P,O}^\downarrow$ замкнуты. Поскольку множества вида $B_{P,O}^\uparrow$ и $B_{P,O}^\downarrow$ образуют предбазу топологии в bX_χ и замкнутость сохраняется при пересечениях и конечных объединениях, то имеет место и замкнутость насыщений относительно данных разбиений всех замкнутых множеств в bX_χ .

ЛЕММА 13. Пусть C – канторово множество с действием группы его гомеоморфизмов в дискретной топологии. Тогда для любых различных точек $x, y \in C$ выполнено $(H_0)_x y = C \setminus \{x\}$.

Рассмотрим следующие полурешетки:

- 1) Γ_n – полурешетка, состоящая из $n+1$ элементов, среди которых n минимальных и один наибольший элемент;

- 2) Γ_n^1 – полурешетка, полученная из объединения Γ_n и полурешетки L , построенная в [5; теорема 2, (2)].
- 3) Γ_n^2 – полурешетка, полученная из объединения Γ_n и полурешетки L , построенная в [5; теорема 2, (3)].
- 4) $\Gamma_{n,k}$ – полурешетка, полученная из объединения Γ_n и полурешетки L , построенная в [5; теорема 2, (1)] отождествлением их наибольших элементов.

ТЕОРЕМА 2. Пусть L – любая из полурешеток $\Gamma_n, \Gamma_n^1, \Gamma_n^2$ и $\Gamma_{n,k}$, $k, n \in \mathbb{N}$. Тогда существует G -пространство X и его инвариантное подмножество M такие, что полурешетка $K_G(M, X)$ изоморфна L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 13 непосредственно следует, что решетка Γ_1 получается, если взять $X(\Gamma_1) = C$, инвариантное подмножество $M = X(\Gamma_1)$ и группу $G = \text{Номео}(C)$ с дискретной топологией. Для построения G -пространства $X(\Gamma_2)$ ($X(\Gamma_2^1), X(\Gamma_2^2), X(\Gamma_{2,m}), m \in \mathbb{N}$) и его инвариантного подпространства, полурешетка эквивариантных пары которого изоморфна Γ_2 ($\Gamma_2^1, \Gamma_2^2, \Gamma_{2,m}, m \in \mathbb{N}$), можно взять G -пространство $X(\Gamma_1)$ и его инвариантное подпространство $X(\Gamma_1)$, построенное в [5; теорема 2, (2), (3), (1)], и применить теорему 1. При этом ограничение полученного действия на соответствующее подпространство транзитивно по лемме 10.

Пусть G -пространство $X(\Gamma_k)$ ($X(\Gamma_k^1), X(\Gamma_k^2), X(\Gamma_{k,m}), m \in \mathbb{N}$) и его инвариантные подпространства, полурешетка эквивариантных пары которых изоморфна Γ_k ($\Gamma_k^1, \Gamma_k^2, \Gamma_{k,m}, m \in \mathbb{N}$), где $k < n$, построены. Для построения G -пространства $X(\Gamma_n)$ ($X(\Gamma_n^1), X(\Gamma_n^2), X(\Gamma_{n,m}), m \in \mathbb{N}$) и его инвариантного подпространства, полурешетка эквивариантных пары которых изоморфна Γ_n ($\Gamma_n^1, \Gamma_n^2, \Gamma_{n,m}, m \in \mathbb{N}$), надо взять G -пространство $X(\Gamma_1)$ и G -пространство $X(\Gamma_{n-1})$ ($X(\Gamma_{n-1}^1), X(\Gamma_{n-1}^2), X(\Gamma_{n-1,m}), m \in \mathbb{N}$) и применить теорему 1. При этом ограничение получаемого действия на соответствующее подпространство транзитивно по лемме 10.

Из теоремы 2, леммы 9 и [5; теорема 1] следует

ТЕОРЕМА 3. Пусть L – любая из полурешеток $\Gamma_n, \Gamma_n^1, \Gamma_n^2$ и $\Gamma_{n,k}$, $k, n \in \mathbb{N}$. Тогда существует псевдокомпактное G -пространство X такое, что полурешетка $K_G X \cong L$. Более того, действующую группу можно считать дискретной.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что никакая из полурешеток Γ_n , $n > 2$, $\Gamma_n^1, \Gamma_n^2, \Gamma_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, не может быть полурешеткой бикомпактификаций тихоновского пространства.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теореме 3 дается полный ответ на вопрос [1; вопрос 2] о существовании минимальных элементов в полурешетке бикомпактных G -расширений G -тихоновского пространства.

Автор выражает благодарность участникам семинара по топологической алгебре под руководством О. В. Сипачевой, Е. А. Резниченко и К. Л. Козлова за плодотворные обсуждения и полезные вопросы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, “О бикомпактных G -расширениях”, *Матем. заметки*, **78:5** (2005), 695–709.
- [2] J. M. Smirnov, L. N. Stojanov, “On minimal equivariant compact extensions”, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **36:6** (1983), 733–736.

- [3] Ю. М. Смирнов, “Могут ли простые геометрические объекты быть максимальными компактными расширениями для $\mathbb{R}^n$ ”, *УМН*, **49:6** (1994), 213–214.
- [4] Ю. М. Смирнов, “Минимальные топологии на действующих группах”, *УМН*, **50:6** (1995), 217–218.
- [5] А. М. Соколовская, “Существование G -тихоновских пространств, полурешетки бикompактных G -расширений которых имеют минимальные не наименьшие элементы”, *Александровские чтения – 2006*, Тезисы докладов международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Павла Сергеевича Александрова, М., 2006, 37–38.
- [6] J. de Vries, “On the existense of G -compactifications”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **26:3** (1978), 275–280.
- [7] J. de Vries, *Topological transformation groups I. A categorical approach*, Mathematical Centre Tracts, **65**, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1975.
- [8] Г. Биркгоф, *Теория решеток*, Наука, М., 1984.
- [9] А. Г. Курош, *Теория групп*, Наука, М., 1967.
- [10] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986.

А. М. Соколовская

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

19.10.2006

Исправленный вариант

30.03.2007