Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Тараканов, Несколько замечаний об арифметических свойствах рекуррентных последовательностей на эллиптических кривых над конечным полем, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 6, 926–933

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4192>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 12:54:52

Несколько замечаний об арифметических свойствах рекуррентных последовательностей на эллиптических кривых над конечным полем

В. Е. Тараканов

В связи с проблемами в теории информации изучаются арифметические прогрессии, построенные на точках эллиптических кривых над конечным полем. Для одного из типов таких кривых устанавливается распределение квадратичных вычетов в соответствующих последовательностях x -координат точек прогрессии в случае, если кривая задана над простым полем. Приводится также некоторое описание множества всех прогрессий на эллиптических кривых над конечным полем.

Библиография: 11 названий.

Рекуррентные последовательности на эллиптических кривых над конечными полями в настоящее время интенсивно изучаются в связи с их приложениями в теории кодирования (см. [1]–[5]). Это обусловлено удобством вычисления элементов таких последовательностей и их хорошими статистическими свойствами. Здесь рассматривается один из видов таких последовательностей – арифметические прогрессии, которые могут использоваться при построении последовательностей псевдослучайных чисел. Мы установим для их элементов ряд свойств арифметического характера в случае, когда последовательность построена по эллиптическим кривым из некоторых классов, содержащих суперсингулярные эллиптические кривые (см. ниже).

Пусть $E = E_{a,b}$ – эллиптическая кривая (э.к.) над конечным полем $\mathcal{F}_q$ из q элементов характеристики $p \neq 2, 3$, заданная в нормальной форме Вейерштрасса:

$$E = E_{a,b} : \quad y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \in \mathcal{F}_q, \quad 4a^3 + 27b^2 \neq 0. \quad (1)$$

Точками э.к. E над произвольным полем $\mathcal{F}$ называются пары элементов (x, y) , принадлежащих какому-либо расширению поля $\mathcal{F}$ и удовлетворяющих (1); кроме того, точкой E считается “бесконечно удаленная” точка O (ей соответствует точка $(0, 1, 0)$ в проективном представлении E , отвечающем (1)). Если при этом $x, y \in \mathcal{F}$, то точка называется *рациональной*, или *$\mathcal{F}$ -точкой*. Нас будут интересовать лишь рациональные точки, поэтому говоря о “точках на E ”, мы будем подразумевать именно их. Точка O считается рациональной для любой э.к.

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4129.2006.1).

Как известно (см. [6]–[8]), точки $P = (x, y)$ э.к. E из (1), $x, y \in \mathcal{F}_q$, вместе с O образуют абелеву группу с нулем O (в аддитивной записи) относительно некоторой операции композиции точек, которую мы обозначаем символом $\oplus$ (или просто $+$, если нет опасности ее смешения со сложением элементов в $\mathcal{F}_q$). Обратный элемент для $P = (x, y)$ – это

$$\ominus P = (x, -y).$$

Если $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ – точки на E , заданной уравнением (1), и $P_2 \neq \ominus P_1$, то $P_1 \oplus P_2$ определяется как точка $P_3 = (x_3, y_3)$ с

$$x_3 = k^2 - x_1 - x_2, \quad y_3 = -(y_1 + k(x_3 - x_1)), \quad (2)$$

где

$$k = \begin{cases} (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)^{-1} & \text{при } x_1 \neq x_2, \\ (3x_1^2 + a)(2y_1)^{-1} & \text{при } P_1 = P_2; \end{cases} \quad (3)$$

для любой точки $P \in E$ полагаем также

$$P \oplus (\ominus P) = O, \quad P \oplus O = P. \quad (4)$$

Группа точек эллиптической кривой имеет ранг не более 2, т.е. в каноническом представлении группа $E_{a,b}$ над $\mathcal{F}_q$ изоморфна прямой сумме циклических групп порядков n_1 и n_2 :

$$E_{a,b} \cong Z_{n_1} \dot{+} Z_{n_2}, \quad n_2 \mid n_1, \quad n_1 n_2 = n, \quad (5)$$

где $n = |E_{a,b}|$ – порядок группы $E_{a,b}$; при этом также $n_2 \mid (q - 1)$ (см. [9]). Для приложений наибольший интерес представляет случай, когда $E_{a,b}$ – циклическая группа (т.е. когда $n_2 = 1$). Рассмотрим два класса э.к. частного вида:

$$E_a: \quad y^2 = x^3 + ax, \quad a \in \mathcal{F}_q, \quad a \neq 0, \quad (6)$$

$$E_b: \quad y^2 = x^3 + b, \quad b \in \mathcal{F}_q, \quad b \neq 0. \quad (7)$$

Для э.к. E над $\mathcal{F}_q$ известно, что силовская p -подгруппа группы E – это либо циклическая группа порядка p , либо единичная группа; в первом случае э.к. E называется *несуперсингулярной*, а во втором – *суперсингулярной*. Суперсингулярные э.к. в большинстве случаев имеют циклическую группу точек (при $q \equiv 1 \pmod{4}$, $q = p^t$, t нечетно, – всегда) (см. [10]). Обозначим $(\mathcal{F}_q^*)^r$, $r \geq 2$, подгруппу из всех r -х степеней элементов мультипликативной группы $\mathcal{F}_q^*$ поля $\mathcal{F}_q$. Рассмотрим на $\mathcal{F}_q^*$ квадратичный характер χ_q :

$$\chi_q(c) = \begin{cases} 1, & \text{если } c \in (\mathcal{F}_q^*)^2, \\ -1, & \text{если } c \notin (\mathcal{F}_q^*)^2, \end{cases} \quad (8)$$

доопределив его условием

$$\chi_q(0) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что любая э.к. E_a из (6) при $q \equiv 3 \pmod{4}$ и $\chi_q(a) = 1$, а также любая э.к. из (7) при $q \equiv 2 \pmod{3}$ имеют порядок $q + 1$. Следовательно, такие

э.к. являются суперсингулярными: их группы точек циклические. Мы будем далее рассматривать рекуррентные последовательности, построенные на э.к., главным образом, с уравнениями (6) или (7).

Пусть E – э.к. над $\mathcal{F}_q$, $P \neq O$, I – две ее точки. Рекуррентная последовательность $S_{P,I}$ с отличными от O элементами

$$S_{P,I}(l+1) = S_{P,I}(l) + P, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

называется *арифметической прогрессией* на E с начальным членом $I + P$ и разностью P . Последовательность (9) состоит не более, чем из m членов, где m – порядок точки P (наименьшее целое $m > 0$, для которого $mP = O$). Обозначим координаты точки $S_{P,I}(l)$:

$$x_l = x(I + lP), \quad y_l = y(I + lP).$$

С последовательностью (9) свяжем последовательность x -координат ее точек:

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_l, \quad \dots, \quad (10)$$

где $x_l = x(I + lP)$, $l = 1, 2, \dots$. Прогрессии на точках эллиптических кривых над конечным полем и последовательности координат их точек впервые были рассмотрены А. М. Зубковым в связи с порождением псевдослучайных числовых последовательностей. Для целого r назовем точку $Q \in E$ r -делимой, если на E существует точка R , для которой $rR = Q$. Например, для э.к. $E_{a,b}$ точка O является 2-делимой, если многочлен в правой части (1) имеет корень $\xi \in \mathcal{F}_q$, так как точками порядка 2 являются, как известно, точки $(\xi, 0)$ (и только они).

ТЕОРЕМА 1. Пусть E_a – эллиптическая кривая над полем $\mathcal{F}_q$ характеристики $p \neq 2, 3$ с уравнением (6), $P \neq O$, I – две точки на E_a . Пусть, далее, $S_{P,I}$ – прогрессия (9) на E_a и

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_l, \quad \dots$$

– последовательность (10), образования x -координатами ее точек $I + lP$, $l = 1, 2, \dots$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если I – 2-делимая точка, то при любой $P \neq O$

$$\chi_q(x_l) = 1 \quad \text{или} \quad 0 \quad (11)$$

для всех четных l ;

2) если $I + P$ – 2-делимая точка, то (11) выполнено для всех нечетных l ;

3) если обе точки I и P 2-делимы, то (11) выполнено при любом l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $E = E_{a,b}$ – произвольная эллиптическая кривая над полем $\mathcal{F}_q$ характеристики $p \neq 2, 3$, заданная уравнением (1):

$$y^2 = g(x) = x^3 + ax + b, \quad 4a^3 + 27b^2 \neq 0.$$

Найдем необходимое и достаточное условие 2-делимости для ее точек. Пусть точка $Q = (u, v) \in E_{a,b}$ 2-делима, т.е. на $E_{a,b}$ существует точка $R = (u_1, v_1)$, для которой $2R = Q$; при этом $v_1 \neq 0$, так как в противном случае было бы $2R = O \neq Q$. Согласно формуле (3) имеем

$$u = k^2 - 2u_1, \quad v = -(v_1 + k(v - v_1)), \quad (12)$$

где

$$k = (3u_1^2 + a)(2v_1)^{-1}. \quad (13)$$

Отсюда получается, что

$$(3u_1^2 + a)^2 = 4v_1^2(u + 2u_1) = 4(u + 2u_1)(u_1^3 + au_1 + b). \quad (14)$$

Из (12)–(14) следует, что координаты точки R удовлетворяют уравнениям:

$$u_1^4 - 4uu_1^3 - 2au_1^2 - (4au + 8b)u_1 + a^2 - 4bu = 0, \quad (15)$$

$$v = -(v_1 + k(u - u_1)), \quad (16)$$

где k определяется формулой (13).

Обратно, пусть $Q = (u, v)$ – точка на $E_{a,b}$. Если $u_1 \in \mathcal{F}_q$ – такое решение уравнения (15), что $\chi_q(g(u_1)) = 1$ и какой-либо из элементов $v_1 = \pm\sqrt{g(u_1)}$ удовлетворяет равенству (16) с k , определенным в (13), то $Q = 2R$ для рациональной точки $R = (u_1, v_1)$ на $E_{a,b}$.

Запишем уравнение (15) в следующем виде:

$$(u_1^2 - a)^2 - 4u(u_1^3 + au_1 + b) = 8bu_1. \quad (17)$$

Пусть теперь $E = E_a$ – э.к., заданная уравнением (6), т.е. $b = 0$. Если $Q = (u, v) = 2R$, где $R = (u_1, v_1)$, то из (17) получаем, что

$$4(u_1^3 + au_1)u = (u_1^2 - a)^2.$$

Так как $Q \neq O$, то $g(u_1) = u_1^3 + au_1 = v_1^2 \neq 0$, и мы приходим к равенству

$$u = (u_1^2 - a)^2(2v_1)^{-2}.$$

Следовательно, в э.к. с уравнением (6) для любой 2-делимой точки $Q \neq O$ имеем

$$\chi_q(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } Q \neq (0, 0), \\ 0, & \text{если } Q = (0, 0) \end{cases}$$

(последний случай возможен, очевидно, лишь тогда, когда $\chi_q(a) = 1$).

Заметим теперь, что если I – 2-делимая точка на E_a , то 2-делимой является любая точка $I + lP$ с четным l ; если 2-делима точка $I + P$, то 2-делимой будет любая точка в прогрессии (9), имеющая нечетный номер l ; наконец, если 2-делимы обе точки I и P , то 2-делима любая точка в (9). Следовательно, по доказанному выше для соответствующих элементов $x_l = x(I + lP)$ в последовательности (10) во всех указанных случаях имеем $\chi_q(x_l) = 1$ или 0. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если E_a – эллиптическая кривая с уравнением (6) над простым полем характеристики $p \neq 2, 3$ и $S_{P,I}$ – прогрессия (9) на E_a с разностью P и начальным членом I , то при 2-делимой I (2-делимой $I + P$) в соответствующей последовательности (10) x -координат точек из $S_{P,I}$ каждый член x_l с четным l (соответственно с нечетным l) есть квадратичный вычет по модулю p (или нуль).

В связи с теоремой 1 отметим, что условия 2-делимости для точек э.к., принадлежащих ее силовой 2-подгруппе, изучались в работах [9], [11].

Далее мы рассмотрим связи между элементами последовательностей (10) x -координат точек, принадлежащих прогрессиям (9), построенным для эллиптических кривых над конечным полем, заданных различными уравнениями (1). Напомним, что две э.к. E и E' над полем $\mathcal{F}$ изоморфны, если существуют такие рациональные над $\mathcal{F}$ отображения $\varphi: E \rightarrow E'$ и $\varphi^{-1}: E' \rightarrow E$, определенные в каждой точке, что $\varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot \varphi = \varepsilon$, где ε – тождественное отображение; при этом группы точек э.к. E и E' изоморфны: $E \cong E'$.

Приведем несколько известных фактов об изоморфизмах эллиптических кривых над конечными полями (см. [7], [8]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. а) Две э.к. над полем $\mathcal{F}_q$ характеристики $p \neq 2, 3$ с уравнениями (1)

$$E_{a,b}: y^2 = x^3 + ax + b \quad \text{и} \quad E_{a',b'}: y^2 = x^3 + a'x + b'$$

изоморфны над $\mathcal{F}_q$ тогда и только тогда, когда существует такой $u \in \mathcal{F}_q$, $u \neq 0$, что $a' = u^4a$, $b' = u^6b$; соответствующий изоморфизм задается следующим образом:

$$P = (x, y) \rightarrow P' = (u^2x, u^3y), \quad (18)$$

где $P \in E_{a,b}$, $P' \in E_{a',b'}$.

б) Предположим, что $a \neq 0$. Тогда при $q \equiv 3 \pmod{4}$, а также при $q \equiv 1 \pmod{4}$, $b \neq 0$ существует $(q-1)/2$ э.к., изоморфных $E_{a,b}$, а при $q \equiv 1 \pmod{4}$, $b = 0 - (q-1)/4$ э.к., изоморфных $E_a = E_{a,0}$. Если $a = 0$, то существует не менее $(q-1)/6$ э.к., изоморфных $E_b = E_{0,b}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Имеется всего не более четырех классов э.к. над $\mathcal{F}_q$, состоящих из изоморфных над $\mathcal{F}_q$ э.к. с уравнением (6), и не более шести таких классов эллиптических кривых с уравнением (7).

Изоморфизм между двумя э.к. есть, очевидно, отношение эквивалентности. Оно порождает разбиение всего множества э.к. над $\mathcal{F}_q$ на t подмножеств, каждое из которых состоит из изоморфных между собой кривых. Образуем множество

$$\{E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(t)}\}, \quad (19)$$

состоящее из произвольно взятых э.к. в каждом из классов изоморфных э.к. над $\mathcal{F}_q$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть E – эллиптическая кривая над полем $\mathcal{F}_q$ характеристики $p \neq 2, 3$ с уравнением (1) и E' – эллиптическая кривая, изоморфная E над $\mathcal{F}_q$, $\varphi: E \rightarrow E'$ – соответствующий изоморфизм. Пусть, далее, на E задана прогрессия $S_{P,I}$ (см. (9)) с разностью P и начальным членом $I = O$, и пусть

$$x(P), \quad x(2P), \quad \dots, \quad x(lP), \quad \dots$$

– соответствующая последовательность x -координат точек $S_{P,O}$. Тогда на E' существует такая точка P' , что для последовательности x -координат точек прогрессии $S_{P',O}$ на E' выполняются равенства

$$x(lP') = sx(lP), \quad l = 1, 2, \dots,$$

где s – некоторый элемент $\mathcal{F}_q$, для которого $\chi_q(s) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим каноническое разложение группы точек э.к. E (см. (5)):

$$E \cong Z_{n_1} + Z_{n_2}.$$

Пусть G_1 и G_2 – порождающие элементы группы Z_{n_1} и соответственно Z_{n_2} . Точка P представляется в виде

$$P = t_1 G_1 + t_2 G_2, \quad \text{где } 0 \leq t_1 < n_1, \quad 0 \leq t_2 < n_2.$$

Изоморфизм φ индуцирует изоморфизм групп точек (обозначаемый той же буквой φ) на E и на E' . Поэтому для $G'_1 = \varphi(G_1)$ и $G'_2 = \varphi(G_2)$ имеем

$$P' = \varphi(P) = t_1 G'_1 + t_2 G'_2, \quad 0 \leq t_1 < n_1, \quad 0 \leq t_2 < n_2; \quad (20)$$

при этом, очевидно, G'_1 и G'_2 – порождающие элементы циклических подгрупп порядков, соответственно n_1 и n_2 на E' . Рассмотрим теперь прогрессию $S_{P',O}$ на E' и соответствующую ей последовательность (10) x -координат точек $S_{P',O}$:

$$x(P'), \quad x(2P'), \quad \dots, \quad x(lP'), \quad \dots$$

Ясно, что

$$\varphi(lP) = l\varphi(P) = lP', \quad l = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Согласно предложению 1 (см. (18)) x -координаты точек изоморфных кривых при изоморфизме φ связаны соотношением

$$x(\varphi(Q)) = u^2 x(Q) \quad (22)$$

для любой $Q \in E$ и некоторого $u \in \mathcal{F}_q$, $u \neq 0$. Таким образом, из (21) и (22), полагая $u^2 = c$, получаем

$$x(lP') = cx(lP), \quad l = 1, 2, \dots$$

с $\chi_q(c) = \chi_q(u^2) = 1$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $S_{P,O}$ – прогрессия (9) на циклической э.к. $E = E_a$ с уравнением (6) или циклической э.к. $E = E_b$ с уравнением (7) над полем $\mathcal{F}_q$ характеристики $p \neq 2, 3$ и $P \in E$ – точка максимального порядка n . Тогда можно задать несколько (не более четырех для $E = E_a$ и не более шести для $E = E_b$) последовательностей

$$X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}), \quad (23)$$

состоящих из $n - 1$ элементов из $\mathcal{F}_q$, таких, что последовательность

$$X = (x(P), x(2P), \dots, x(lP), \dots)$$

x -координат точек из $S_{P,O}$ двумя следующими преобразованиями получается из некоторой последовательности (23):

- умножением каждого из членов (23) на один и тот же элемент $c(X', X) \in \mathcal{F}_q$ с $\chi_q(c(X', X)) = 1$;

б) перестановкой членов получающейся последовательности в соответствии с подстановкой их индексов:

$$\begin{pmatrix} l \\ lr \end{pmatrix}, \quad l = 1, 2, \dots, n-1,$$

где r – некоторое число, взаимно простое с n (lr приводится по модулю n).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E = E_a$. Согласно предложению 2 имеется не более четырех классов изоморфных э.к. с уравнением (6). Возьмем в (19) э.к. E' , изоморфную E , и обозначим через φ соответствующее изоморфное отображение $E \rightarrow E'$. На E' выберем произвольно порождающий элемент Q , зададим прогрессию $S_{Q,O}$ и, тем самым, последовательность

$$X' = (x(Q), x(2Q), \dots, x(lQ), \dots) \quad (24)$$

x -координат ее точек.

По теореме на E' существует такая точка P' , что для некоторого $c \in \mathcal{F}_q$ с $\chi_q(c) = 1$ имеем

$$x(lP') = cx(lP), \quad l = 1, 2, \dots,$$

при этом $P' = \varphi(P)$ (см. формулу (20)). Но P' , будучи образом порождающего элемента, должна сама быть порождающим элементом группы E' . Поэтому $P' = rQ$ для некоторого r , взаимно простого с n , и мы имеем

$$cx(lP) = x(lrQ), \quad l = 1, 2, \dots,$$

где $\chi_q(c) = 1$. Полагая $c(X', X) = c^{-1}$, находим, что последовательность X действительно получается двумя указанными преобразованиями из последовательности (24). Ясно, что в качестве (24) может выступать одна из нескольких (не более, чем из 4-х) наперед заданных “стандартных” последовательностей (23), образованная элементами $x'_l = x(lQ)$ – x -координатами точек lQ , $l = 1, 2, \dots$, прогрессии $S_{Q,O}$ на соответствующей э.к. E' из (19), изоморфной E , с разностью Q – произвольным порождающим элементом группы E' . В случае $E = E_b$ рассуждаем совершенно аналогично. Наше утверждение доказано.

Отметим, что аналогичное следствие может быть сформулировано и для э.к. общего вида (с $a, b \neq 0$), однако в этом случае число классов изоморфных э.к. (и, соответственно, “базовых” последовательностей (23)) при больших q весьма велико (близко к $2q$, как следует из предложения 1).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Gong, T. Berson, D. Stinson, “Elliptic curve pseudorandom sequences generator”, *Selected Areas in Cryptography* (Kingston, ON, 1999), Lecture Notes in Comput. Sci., **1758**, Springer, Berlin, 2000, 34–48.
- [2] G. Gong, C. Lam, “Linear recursive sequences over elliptic curves”, *Sequences and Their Applications* (Bergen, 2001), Discrete Math. Theor. Comput. Sci. (Lond.), Springer, London, 2002, 182–196.
- [3] C. P. Xing, “Constructions of sequences from algebraic curves over finite fields”, *Sequences and Their Applications* (Bergen, 2001), Discrete Math. Theor. Comput. Sci. (Lond.), Springer, London, 2002, 88–100.

- [4] Н. Коблиц, *Курс теории чисел и криптографии*, ТВП, М., 2001.
- [5] В. Е. Тараканов, “Линейные рекуррентные последовательности на эллиптических кривых и их применение в криптографии”, *Труды по дискретной математике*, т. 9, Физматлит, М., 2006, 340–356.
- [6] И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*, Наука, М., 1972.
- [7] J. H. Silverman, J. Tate, *Rational Points on Elliptic Curves*, Undergraduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1992.
- [8] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Mathematics, **106**, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [9] В. Е. Тараканов, “Свойства делимости точек эллиптических кривых над конечным полем”, *Труды по дискретной математике*, т. 4, Физматлит, М., 2001, 243–258.
- [10] R. Schoof, “Nonsingular plane curves over finite fields”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **46**:2 (1987), 183–211.
- [11] J. Miret, R. Moreno, A. Rao, M. Valis, “Determining the 2-Sylow subgroup of an elliptic curve over a finite field”, *Math. Comp.*, **74**:249 (2005), 411–427.

В. Е. Тараканов

Математический институт им. Стеклова РАН

Поступило

20.01.2007