Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Зубков, Асимптотика числа неповторных булевых функций в элементарном базисе, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 6, 822–828

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4193>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:25:38

Асимптотика числа неповторных булевых функций в элементарном базисе

О. В. Зубков

В работе получена асимптотическая аппроксимация числа K_n неповторных булевых функций от n переменных в элементарном базисе $\{\&, \vee, -\}$ при $n \rightarrow \infty$ с относительной погрешностью $O(1/\sqrt{n})$. Как следствие, получено подтверждение гипотезы о существовании констант δ и α таких, что

$$K_n \sim \delta \cdot \alpha^{n-1} \cdot (2n-3)!!,$$

и найдены эти константы.

Библиография: 7 названий.

Формула над базисом булевых функций B называется *бесповторной*, если каждая переменная входит в нее не более одного раза. Булева функция f называется *бесповторной* в базисе B , если найдется бесповторная формула над B , реализующая f . Под элементарным будем понимать базис $B_0 = \{\&, \vee, -\}$. Вопросы, связанные с нахождением и оценкой числа неповторных булевых функций в элементарном базисе, рассматриваются в [1]–[5].

В книге Риордана [6] описывается общая идея нахождения числа двухполюсных последовательно-параллельных сетей, частному виду которых можно взаимно однозначно поставить в соответствие бесповторные формулы над базисом B_0 . Здесь же получено комбинаторное соотношение, содержащее полином и его производную, из которого можно получать итеративным путем число K_n неповторных булевых функций от n переменных в элементарном базисе.

В явном виде рекуррентная формула для числа K_n получена в [5]. Будучи нелинейной, эта формула не поддается раскрытию рекуррентности известными способами. В то же время, сравнение базисов по числу неповторных в них функций является актуальной задачей, в связи с чем значимым становится нахождение асимптотик и явных формул для этого числа.

В [1; с. 60–63] автором данной работы приводится метод подсчета упомянутых функций, принципиально отличающийся от использованного в [5]. На основе этого метода в [4] получена формула для вычисления числа K_n в виде конечной суммы, содержащей числа Эйлера второго порядка. Здесь же получено представление числа K_n в виде сходящегося ряда, содержащего числа Стирлинга второго рода. Наконец, в [2] представлен метод нахождения числа неповторных булевых функций в элементарном базисе в виде сходящегося ряда, содержащего только

показательно-степенную функцию и факториал:

$$K_n = 2 \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^{n+s-1}}{s! \cdot (2\sqrt{e})^s}. \quad (1)$$

Другое направление исследований, связанное с нахождением оценок для числа K_n , представлено в [3]. Здесь были получены следующие оценки:

$$2 \cdot 2^{n-1} \cdot (2n-3)!! < K_n < 2 \cdot 4^{n-1} \cdot (2n-3)!!, \quad (2)$$

где $(2n-3)!! = \prod_{i=1}^{n-1} (2i-1)$ – произведение всех нечетных чисел от 1 до $2n-3$.

Оценки (2) позволяют высказать гипотезу о том, что существуют некоторые вещественные константы δ и α из отрезка $[2, 4]$ такие, что K_n асимптотически равно $\delta \cdot \alpha^{n-1} \cdot (2n-3)!!$.

В данной работе получены две асимптотики для числа K_n , одна из которых подтверждает эту гипотезу, другая же в явном виде указывает порядок роста числа неповторных булевых функций от n переменных при $n \rightarrow \infty$ с относительной погрешностью $O(1/\sqrt{n})$.

ТЕОРЕМА. Для числа K_n неповторных булевых функций от n переменных в элементарном базисе B_0 верна следующая асимптотическая аппроксимация при $n \rightarrow \infty$:

$$K_n = 2 \cdot \sqrt{\frac{e^{3-2n}}{n-2} \left(\frac{2n-3}{2 \ln 2 - 1} \right)^{2n-1}} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В (1) воспользуемся известной аппроксимацией Стирлинга

$$s! = \sqrt{2\pi s} \cdot \left(\frac{s}{e} \right)^s \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{s} \right) \right)$$

и учтем, что

$$\frac{1}{1 + O(1/s)} = 1 + O\left(\frac{1}{s} \right).$$

Получим

$$K_n = 2 \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^s \cdot s^{n-1}}{\sqrt{2\pi s} \cdot (2\sqrt{e})^s} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{s} \right) \right).$$

Раскроем скобки и введем следующие обозначения:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^{n-1,5}}{(2/\sqrt{e})^s} = Z_1(n), \quad 2 \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^s \cdot s^{n-1}}{\sqrt{2\pi s} \cdot (2\sqrt{e})^s} \cdot O\left(\frac{1}{s} \right) = Z_2(n),$$

тогда $K_n = Z_1(n) + Z_2(n)$.

Идея дальнейших преобразований заключается в переходе от суммы

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^{n-1,5}}{(2/\sqrt{e})^s}$$

к интегралу

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1,5}}{(2/\sqrt{e})^x} dx$$

с дальнейшей оценкой модуля разности между этими двумя величинами. Введем еще одно обозначение:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{n-1,5}}{(2/\sqrt{e})^x} dx = Z_3(n),$$

и найдем значение этого несобственного интеграла, сделав замену $(2/\sqrt{e})^x = e^t$. Получим

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1,5}}{(2/\sqrt{e})^x} dx = \int_0^\infty \frac{t^{n-1,5}}{e^t} dt \cdot \left(\frac{1}{\ln(2/\sqrt{e})} \right)^{n-0,5}.$$

Возьмем последний интеграл по частям:

$$\int_0^\infty \frac{t^{n-1,5}}{e^t} dt = \frac{1}{n-0,5} \int_0^\infty \frac{t^{n-0,5}}{e^t} dt.$$

Теперь воспользуемся тем, что

$$\int_0^\infty t^{n-0,5} e^{-t} dt = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$$

(см. [7]). Таким образом,

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1,5}}{(2/\sqrt{e})^x} dx = \left(\frac{1}{\ln(2/\sqrt{e})} \right)^{n-0,5} \cdot \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}} \cdot \sqrt{\pi}.$$

В итоге,

$$Z_3(n) = \frac{2}{\sqrt{2 \ln 2 - 1}} \cdot \left(\frac{1}{2 \ln 2 - 1} \right)^{n-1} \cdot (2n-3)!! \quad (3)$$

Избавимся в (3) от двойного факториала при помощи уже упоминавшейся аппроксимации Стирлинга:

$$(2n-3)!! = \left(\frac{2n-3}{n-2} \right)^{n-2} \cdot \frac{(2n-3)^{n-1}}{e^{n-1} \cdot 2^{n-2}} \cdot \frac{\sqrt{2n-3}}{\sqrt{n-2}} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Подставив это в (3), получим

$$Z_3(n) = \frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{n-2}} \cdot \left(\frac{n-1,5}{e \ln(2/\sqrt{e})} \right)^{n-0,5} \cdot \left(\frac{n-1,5}{n-2} \right)^{n-2} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Используя известные асимптотические аппроксимации $e^z = 1 + O(z)$ и $\ln(1+z) = z + O(z^2)$, справедливые при $z \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{n-1,5}{n-2} \right)^{n-2} &= \exp \left((n-2) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{2(n-2)} \right) \right) \\ &= \exp \left((n-2) \cdot \left(\frac{1}{2(n-2)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) \\ &= \sqrt{e} \cdot \exp \left(O\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \sqrt{e} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$Z_3(n) = \frac{2e}{\sqrt{n-2}} \cdot \left(\frac{n-1,5}{e \ln(2/\sqrt{e})} \right)^{n-0,5} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (4)$$

Так как

$$K_n = Z_3 \left(1 + \frac{Z_1(n) - Z_3(n)}{Z_3(n)} + \frac{Z_2(n)}{Z_3(n)} \right),$$

оценим $|Z_1(n) - Z_3(n)|/Z_3(n)$ и $|Z_2(n)|/Z_3(n)$.

а) Оценим модуль разности

$$\left| \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^{n-1,5}}{(2/\sqrt{e})^s} - \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1,5}}{(2/\sqrt{e})^x} dx \right|$$

(см. рис. 1).

Рис. 1

Функция $F(x) = x^{n-1,5}/(2/\sqrt{e})^x$ имеет ровно одну точку максимума при $x \geq 0$. Площадь фигуры Σ , составленной из прямоугольников с единичными основаниями и высотами $F(s)$, $s = 0, 1, 2, \dots$, ограниченной на рис. 1 сплошной жирной линией, равна

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^{n-1,5}}{(2/\sqrt{e})^s}.$$

Интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1,5}}{(2/\sqrt{e})^x} dx$$

равен площади подграфика функции $F(x)$. Модуль разности между этими величинами не превышает суммарной площади заштрихованных прямоугольников плюс площадь залитой черным цветом самой верхней части подграфика, которая обозначена на рис. 1 через S_{hi} . Обозначим через S_{max} площадь наибольшего из составляющих фигуру Σ прямоугольников.

Видно, что сумма площадей тех заштрихованных прямоугольников, которые не являются частью фигуры Σ , составляет $S_{\max}$; сумма площадей тех заштрихованных прямоугольников, которые являются частью фигуры Σ , так же равна $S_{\max}$. Отсюда

$$\left| \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^{n-1,5}}{(2/\sqrt{e})^s} - \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1,5}}{(2/\sqrt{e})^x} dx \right| \leq 2S_{\max} + S_{\text{hi}} \leq 2 \max_{x \geq 0} F(x). \quad (5)$$

Отметим, что, используя данный метод, можно доказать неравенство

$$\left| \sum_{s=a}^b G(s) - \int_a^b G(x) dx \right| \leq 2 \max_{x \in (a,b)} G(x)$$

для любой гладкой одновершинной неотрицательной на интервале (a, b) функции $G(x)$.

Найдем максимум функции $F(x)$, который достигается в точке $x > 0$ такой, что $F'(x) = 0$. Получим уравнение

$$x^{n-2,5} \cdot \left((n-1,5) - x \ln \left(\frac{2}{\sqrt{e}} \right) \right) = 0,$$

и $x = (n-1,5)/\ln(2/\sqrt{e})$ – точка максимума $F(x)$. В этой точке функция $F(x)$ имеет значение

$$\frac{(n-1,5)^{n-1,5}}{(\ln(2/\sqrt{e}))^{n-1,5} \cdot (2/\sqrt{e})^{(n-1,5)/\ln(2/\sqrt{e})}}.$$

С учетом (4) и (5) имеем

$$\frac{|Z_1(n) - Z_3(n)|}{Z_3(n)} \leq \frac{\sqrt{n-2}}{n-1,5} \cdot C_1 \cdot \frac{e^n}{(2/\sqrt{e})^{n/\ln(2/\sqrt{e})}} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

где C_1 – константа, равная

$$\frac{2(2/\sqrt{e})^{1,5/\ln(2/\sqrt{e})} \cdot \ln(2/\sqrt{e})}{\sqrt{2\pi} \cdot e\sqrt{e}}.$$

Осталось заметить, что

$$\frac{e^n}{(2/\sqrt{e})^{n/\ln(2/\sqrt{e})}} = 1,$$

так как

$$\ln \left(\frac{e^n}{(2/\sqrt{e})^{n/\ln(2/\sqrt{e})}} \right) = n - \frac{n}{\ln(2/\sqrt{e})} \cdot \ln(2/\sqrt{e}) = 0.$$

В итоге

$$\frac{|Z_1(n) - Z_3(n)|}{Z_3(n)} \leq \frac{C_1 \cdot \sqrt{n-2}}{n-1,5} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (6)$$

б) Имеем

$$|Z_2(n)| \leq \frac{2c}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^{n-2,5}}{(2/\sqrt{e})^s},$$

где c – некоторая константа. Введем следующие обозначения:

$$\frac{2c}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^{n-2,5}}{(2/\sqrt{e})^s} = Z_4(n), \quad \frac{2c}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^{n-2,5}}{(2/\sqrt{e})^x} dx = Z_5(n).$$

Тогда

$$\frac{|Z_2(n)|}{Z_3(n)} \leq \frac{|Z_5(n)|}{Z_3(n)} + \frac{|Z_4(n) - Z_5(n)|}{Z_3(n)}.$$

Проведя рассуждения, аналогичные сделанным при вычислении $Z_3(n)$ в формуле (3), получим

$$Z_5(n) = \frac{2c}{\sqrt{2\ln 2 - 1}} \cdot \left(\frac{1}{2\ln 2 - 1} \right)^{n-2} \cdot (2n-5)!!.$$

Снова учтем (3) и получим

$$\frac{|Z_5(n)|}{Z_3(n)} = \frac{c \cdot (2\ln 2 - 1)}{2n - 3} = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (7)$$

Оценку для $|Z_4(n) - Z_5(n)|$ найдем по аналогии с (5):

$$\left| \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^{n-2,5}}{(2/\sqrt{e})^s} - \int_0^{\infty} \frac{x^{n-2,5}}{(2/\sqrt{e})^x} dx \right| \leq 2 \max_{x \geq 0} \frac{x^{n-2,5}}{(2/\sqrt{e})^x}.$$

Искомый максимум равен

$$\frac{(n-2,5)^{n-2,5}}{(\ln(2/\sqrt{e}))^{n-2,5} \cdot (2/\sqrt{e})^{(n-2,5)/\ln(2/\sqrt{e})}}.$$

С учетом (4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{|Z_4(n) - Z_5(n)|}{Z_3(n)} &\leq \frac{4c}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(n-2,5)^{n-2,5}}{(\ln(2/\sqrt{e}))^{n-2,5} \cdot (2/\sqrt{e})^{(n-2,5)/\ln(2/\sqrt{e})}} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{n-2}}{2e} \cdot \frac{(e \ln(2/\sqrt{e}))^{n-0,5}}{(n-1,5)^{n-0,5}} \cdot \frac{1}{1 + O(1/n)} \\ &\leq \frac{\sqrt{n-2}}{(n-2,5)^2} \cdot \frac{2c \cdot (2/\sqrt{e})^{2,5/\ln(2/\sqrt{e})} \cdot (\ln(2/\sqrt{e}))^2}{\sqrt{2\pi} \cdot e\sqrt{e}} \\ &\quad \times \frac{e^n}{(2/\sqrt{e})^{n/\ln(2/\sqrt{e})}} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{n-2}}{(n-2,5)^2} \cdot C_2 \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) = O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Учитывая эту оценку, а также (6) и (7), окончательно получим

$$\begin{aligned} K_n &= Z_3(n) \cdot \left(1 + \frac{Z_1(n) - Z_3(n)}{Z_3(n)} + \frac{Z_2(n)}{Z_3(n)} \right) \\ &\leq Z_3(n) \cdot \left(1 + \frac{|Z_1(n) - Z_3(n)|}{Z_3(n)} + \frac{|Z_5(n)|}{Z_3(n)} + \frac{|Z_4(n) - Z_5(n)|}{Z_3(n)} \right) \\ &= Z_3(n) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) = Z_3(n) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right). \quad (8) \end{aligned}$$

Подставляя в (8) представление для $Z_3(n)$ в виде (4), имеем

$$K_n = \frac{2e}{\sqrt{n-2}} \cdot \left(\frac{n-1,5}{e \cdot \ln(2/\sqrt{e})} \right)^{n-0,5} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

Проведя заключительные преобразования, получим

$$K_n = 2 \cdot \sqrt{\frac{e^{3-2n}}{n-2} \left(\frac{2n-3}{2\ln 2-1} \right)^{2n-1}} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right),$$

что и требовалось для доказательства теоремы.

Как следствие, можно получить подтверждение высказанной ранее гипотезы для

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{2\ln 2-1}} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1}{2\ln 2-1}.$$

А именно, выполнено

СЛЕДСТВИЕ. Для числа K_n неповторных булевых функций от n переменных в элементарном базисе B_0 при $n \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$K_n \approx \frac{2}{\sqrt{2\ln 2-1}} \cdot \left(\frac{1}{2\ln 2-1} \right)^{n-1} \cdot (2n-3)!!.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (8) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n/Z_3(n) = 1$, и, учитывая представление для Z_3 в виде (3), получим требуемое утверждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. С. Балюк, С. Ф. Винокуров, А. И. Гайдуков, О. В. Зубков, К. Д. Кириченко, В. И. Пантелеев, Н. А. Перязев, Ю. В. Перязева, *Избранные вопросы теории булевых функций*, ред. С. Ф. Винокуров, Н. А. Перязев, Физматлит, М., 2001.
- [2] О. В. Зубков, “Нахождение числа неповторных булевых функций в элементарном базисе в виде сходящегося ряда”, *Труды VII Международной конференции “Дискретные модели в теории управляющих систем”*, Изд-во Макс Пресс, М., 2006, 125–129.
- [3] О. В. Зубков, *Оценки числа неповторных булевых функций в бинарных базисах*, Дискретная математика и информатика, **15**, Изд-во Иркутского ун-та, Иркутск, 2002.
- [4] О. В. Зубков, “Нахождение числа неповторных булевых функций в элементарном базисе при помощи чисел Стирлинга второго рода”, *Вестн. Бурятского ун-та. Сер. 13. Матем., информ.*, **2**, Изд-во Бурятского ун-та, Улан-Удэ, 2005, 12–16.
- [5] Н. А. Перязев, “Представление функций алгебры логики неповторными формулами”, *Тезисы сообщений XI Межреспубликанской конференции по математической логике*, КазГУ, Казань, 1992, 110.
- [6] Дж. Риордан, *Введение в комбинаторный анализ*, ИЛ, М., 1963.
- [7] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды: Элементарные функции*, Наука, М., 1981.

О. В. Зубков

Иркутский государственный педагогический университет

E-mail: oleg.zubkov@mail.ru

Поступило

13.05.2006

Исправленный вариант

29.01.2007