Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Вторичное деквантование в алгебраической и тропической геометрии, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 6, 953–954

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4194>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:42:22

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Вторичное деквантование в алгебраической и тропической геометрии

В. П. Маслов

Виро [1] применил метод деквантования [2] для изучения свойств объектов алгебраической геометрии, которые привели к возникновению новой науки – тропической геометрии. В этой науке получены выдающиеся результаты Г. Михалкиным, Б. Штурмфельсом, И. Итенбергом и др. [3]–[7].

Процедура деквантования дает однопараметрическое семейство, зависящее от параметра – масштаба. В (двойных) логарифмических координатах она совпадает с исходным объектом алгебраической геометрии.

Сделаю замену в полиноме (см. [8])

$$P_n = \sum_{i,j}^{m,n} a_{ij} x_i^j, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

$$P_n = \exp \left\{ - \exp \left\{ \frac{\tilde{P}_n}{h} \right\} \right\}, \quad x_i = \exp \left\{ - \exp \left\{ \frac{\tilde{x}_i}{h} \right\} \right\}, \quad a_{ij} = \exp \left\{ - \exp \left\{ \frac{\tilde{a}_{ij}}{h} \right\} \right\}, \quad (2)$$

и переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, мы перейдем к алгебре $\oplus \rightarrow \min$, $\odot \rightarrow \max$, т.е.

$$\min_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m} [\max(\tilde{a}_{ij}, \tilde{x}_i)]. \quad (3)$$

В общем случае (1) при $h \rightarrow 0$ остаются только те значения $\tilde{x}_i$, в которых минимум (1) достигается хотя бы при двух значениях i ($i = i_1, i = i_2$). В противном случае одно из значений x_{i_s} подавляет все остальные и этому варианту отвечает пустое множество (см. ниже 3)).

В частности, прямая, заданная в плоскости над полукольцом $R(\min, \max)$ многочленом $ax + by + c$ является объединением следующих множеств:

- 1) при $a \leq b \leq c$ (“еж” с тремя иглами, одна из которых обломана):
 $(x, y) \mid x = y$ при условии $b \leq x \leq c$, т.е. $\max(a, x) = \max(b, y) = x \leq c$;
 $(x, y) \mid x = c$ при условии $y \geq c$, т.е. $\max(a, x) = c \leq \max(b, y)$;
 $(x, y) \mid y = c$ при условии $x \geq c$, т.е. $\max(b, y) = c \leq \max(a, x)$;
- 2) при $a < c \leq b$ (полупрямая):
 $(x, y) \mid x = c$, т.е. $\max(a, x) = c \leq \max(b, y)$;
- 3) при $c < a \leq b$ получается пустое множество.

В полукольце $(\min, \max)$ скалярное произведение имеет вид

$$(a(x), b(x)) = \min_x [\max(a(x), b(x))]$$

и δ -функция имеет вид $\delta(x, \xi) = \infty$ при $x \neq \xi$ и $\delta(x, \xi) = -\infty$ при $x = \xi$.

Изменение во времени задается ядром оператора $G(x, \xi, t)$, при $t = 0$ обращающимся в δ -функцию и обладающим свойством

$$\min_{\xi} [\max(G(x, \xi, t_1), G(\xi, \eta, t_2))] = G(x, \eta, t_1 + t_2).$$

Скалярное произведение позволяет определить G^* . Собственная функция оператора с ядром $G(x, \xi, 1)$ удовлетворяет соотношению

$$\min_{\xi} [\max(G(x, \xi, 1), \Psi_{\lambda}(\xi))] = \max\{\lambda, \Psi_{\lambda}(x)\}.$$

Аналогичное соотношение имеет место для G^* и Ψ_{λ}^* . В результате должно получиться соотношение

$$\min_{\lambda} [\max(\Psi_{\lambda}^*(x), \min_x [\max(\Psi_{\lambda}(x), \varphi(x))])] = \varphi(x).$$

Однако это будет иметь место, лишь если координаты x (так же, как и выше) рассматриваются в этом же полукольце. Так, собственная функция оператора сдвига на 1 определяется из соотношения

$$\Psi_{\lambda}(\min(x, 1)) = \max(\lambda, \Psi_{\lambda}(x)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda}(x) &\geq \lambda && \text{при } 0 < x \leq 1, \\ \Psi_{\lambda}(x) &\leq \lambda && \text{при } x > 1. \end{aligned}$$

Для Ψ^* имеем $\Psi^*(\max(x, 1)) = \max(\lambda, \Psi_{\lambda}^*(x))$.

Преобразование $\tilde{\varphi}(\lambda) = \min_x [\max(\Psi_{\lambda}(x), \varphi(x))]$ соответствует преобразованию Фурье в обычном анализе и преобразованию Лежандра в идемпотентном анализе (в алгебре $(\min, +)$).

При одновременной замене переменных и функции (2) параметр h играет роль масштаба. При $h \rightarrow 0$ масштаб графика $\tilde{P}_n(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ уменьшается. Образно говоря, при $h \ll 1$ мы рассматриваем график при $h = 1$ в перевернутый бинокль.

Рассмотрим теперь в некотором смысле обратную задачу. Пусть имеется временной ряд “фрактального” характера. Рассмотрим достаточно большой отрезок этого ряда и построим два графика: один, – сжав этот ряд до размера листа бумаги, и другой, – взяв повторный логарифм от абсцисс и ординат точек этого временного ряда.

Соединим точки второго графика ломаной линией, а затем проведем “осредненную” кривую так, чтобы площадь сегментов над кривой и под кривой совпадала.

Далее полученную кривую аппроксимируем полиномом невысокой степени.

Теперь первый график рассмотрим “в перевернутый бинокль”, уменьшая масштаб. В результате установим соответствие между алгебраическим объектом (полиномом) и идемпотентным $(\min, \max)$ объектом.

Задача. По уменьшенному в масштабе (до фрактального вида временного ряда экспериментальных точек и далее до скелета новой “амебы”) графику экспериментатора определить график в $(\min, \max)$ алгебре и восстановить объект алгебраической геометрии.

Приношу глубокую благодарность Г. Шпизу за обсуждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] O. Viro, *3rd European Congress of Mathematics*, Barcelona, 2000; [arXiv: math/0005163](#)
 [2] G. L. Litvinov, *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics*, Contemp. Math., **377**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 1–17. [3] G. Mikhalkin, *Tropical geometry and its application*; [arxiv: math.AG/0601041](#) [4] I. Itenberg, V. Kharlamov, E. Shustin, *Int. Math. Res. Not.*, 2003, № 49, 2639–2653. [5] B. Sturmfels, *Solving Systems of Polynomial Equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **97**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002. [6] D. Alessandrini, *Logarithmic limit sets of real semi-algebraic sets*; [arxiv: math.AG/0707.0845](#) [7] D. Siersma, M. van Manen, *Power diagrams and their applications*; [arxiv: math.AG/0508037](#) [8] В. П. Маслов, *Докл. РАН*, **393**:1 (2003), 20–24.

В. П. Маслов

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило

13.06.2007