Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. П. Павлоцкий, М. Стрианезе, О равномерной устойчивости локальных экстремумов интегральной кривой ОДУ второго порядка, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 384–391

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm42>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 11:26:29

УДК 517.925.5

О РАВНОМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛОКАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ ИНТЕГРАЛЬНОЙ КРИВОЙ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

И. П. Павлотский, М. Стрианезе

Уравнение второго порядка может иметь сингулярные множества первого и второго типа, S_1 и S_2 (см. введение), где интегральная кривая $x(y)$ не существует в обычном смысле, но куда может быть продолжена через первый интеграл [1]–[5]. Обозначим Y декартову ось $y = 0$. Если в точке локального экстремума функции $x(y)$ существует ее производная, то эта точка находится на $S_1 \cup Y$. Экстремумы, где $y'(x)$ не существует, могут находиться на S_2 . В [5]–[8] исследовалась устойчивость и неустойчивость экстремумов на $S_1 \cup S_2$ при малых возмущениях уравнения, причем устойчивость взаимного расположения максимумов и минимумов $x(y)$ на сингулярном множестве изучалась, в основном, локально, т.е. в малых окрестностях сингулярных точек. В настоящей работе найдены достаточные условия сохранения типа локального экстремума на конечной части S_1 или S_2 , когда возмущение на всей этой части не превышает некоторой явно указанной величины, одной и той же на всем сингулярном множестве.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Продолжение интегральной кривой на сингулярное множество. Напишем для удобства уравнение второго порядка в виде системы

$$a(x, y)\dot{y} = P(x, y), \quad \dot{x} = y, \quad a(x, y) \in C^{1,1}, \quad P(x, y) \in C^{1,1}, \\ (x, y) \in M \subseteq \mathbb{R}^2, \quad t \in T \subseteq \mathbb{R},$$

полагая, что траектории $[\varphi(t), \dot{\varphi}(t)]$ существуют на M . Заметим, что из системы следует:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{ya(x, y)}{P(x, y)} \in C^{1,1}, \quad \text{если } P(x, y) \neq 0.$$

Множество $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a(x, y) = 0, P(x, y) \neq 0\}$ назовем *сингулярным множеством первого типа*, а множество $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P(x, y) = 0, ya(x, y) \neq 0\}$ – *сингулярным множеством второго типа*. Точки $(x, y) \in S_1 \cup S_2$ *сингулярные*. Предполагается, что $\mu(S_1 \cup S_2) = 0$, где μ – лебегова мера в $\mathbb{R}^2$. Очевидно, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Ясно также, что первый интеграл $I(x, y)$ на S_1 не существует, но во многих случаях может быть продолжен в классе $C^{1,1}$ на $S_1 \cup S_2$ или его часть. В [1]–[3] было определено продолжение траектории на S_1 через продолжение $I(x, y)$ и приведены примеры. Мы будем говорить также об интегральной кривой $x(y)$, продолженной через $I(x, y)$ на сингулярное множество. Продолжение траекторий на S_2 определяется аналогично их продолжению на S_1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $I(x, y) \in C^{1,1}$ – продолжение первого интеграла на $M \cup S_2$. Кривая $[x(t), y(t)]$ называется *продолжением траектории* $[\varphi(t), \dot{\varphi}(t)]$ на $M \cup S_2$, если $\forall t \in T: x(t) = \varphi(t), y(t) = \dot{\varphi}(t)$, и $I(x(t), y(t)) = C$ на $M \cup S_2$, где C постоянная.

Обозначим $\Xi_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: I(x, y) = C\}$. Продолженная интегральная кривая и продолженная траектория достигают S_i , $i = 1, 2$, только если для некоторого $C: \Xi_c \cap S_i \neq \emptyset$. Глобальный первый интеграл может не существовать либо его отыскание затруднительно. Тогда для продолжения $x(y)$ можно попробовать использовать локальные первые интегралы [9]. В [4] приведены достаточные условия продолжаемости $x(y)$ на S_1 и S_2 через локальные интегралы. В частности, в разделе 4 в примере 2) продолжение $x(y)$ на S_2 через локальный интеграл существует для любой сингулярной точки. В дальнейшем всегда будем считать, что продолжение $x(y)$ на сингулярное множество или интересующую нас его часть существует.

Несколько упростим ситуацию, рассматривая только частные случаи:

$$a(x, y)\dot{y} = 1, \quad \dot{x} = y, \quad a(x, y) \in C^{1,1}; \quad (1)$$

$$\dot{y} = P(x, y), \quad \dot{x} = y, \quad P(x, y) \in C^{1,1}, \quad (2)$$

так как переход к общему случаю не представляет затруднений.

Для терминологического удобства будем называть (x_0, y_0) *точкой локального экстремума функции* $x(y)$, действующей из $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, если $x(y)$ имеет локальный экстремум при $y = y_0$ и $x_0 = x(y_0)$.

Напомним кратко некоторые свойства продолжения $x(y)$ на сингулярные множества, полученные ранее в цитированных работах.

Все стационарные точки $x(y)$ находятся на $S_1 \cup Y$ и сплошь покрывают это множество. Если $a(x, y)$ имеет в точке $x(y) \in S_1 \cup Y$ достаточное число производных по y , то всегда можно сказать, убывает, возрастает или имеет в (x, y) экстремум определенного типа функция $x(y)$ [10].

Перейдем к сингулярному множеству второго типа. Для уравнения (2) $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: P(x, y) = 0, y \neq 0\}$ и

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{P(x, y)}, \quad P(x, y) \neq 0,$$

т.е. dx/dy не существует для продолженной кривой $x(y)$ в сингулярной точке

$$(x_0, y_0) = (x(y_0), y_0) \in S_2, \quad y_0 \neq 0,$$

где $P(x_0, y_0) = 0$. Если при этом

$$\left(\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0 - 0)} \frac{dx}{dy} \right) \left(\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0 + 0)} \frac{dx}{dy} \right) = -\infty,$$

то (x_0, y_0) – точка локального экстремума функции $x(y)$. Например, если первая скобка стремиться к $(-\infty)$, имеем локальный минимум. Если произведение скобок стремиться к $(+\infty)$, то в (x_0, y_0) экстремума нет.

2. Локальная и равномерная устойчивость при малом возмущении.

Вместе с (1) и (2) рассмотрим возмущенные уравнения

$$[a(x, y) + \varepsilon b(x, y)]\dot{y} = 1, \quad \dot{x} = y, \quad b(x, y) \in C^{1,1}, \quad (3)$$

$$\dot{y} = P(x, y) + \varepsilon \pi(x, y), \quad \dot{x} = y, \quad \pi(x, y) \in C^{1,1}. \quad (4)$$

Они, соответственно, имеют сингулярные множества $S_1^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a(x, y) + \varepsilon b(x, y) = 0\}$ и $S_2^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P(x, y) + \varepsilon \pi(x, y) = 0, y \neq 0\}$. Будем предполагать, что интегральные кривые $x^*(y)$ этих уравнений продолжены на S_1^* и S_2^* или их части.

Локальная устойчивость (неустойчивость) экстремумов при переходе от (1) к (3) и от (2) к (4) изучалась в [5]–[8]. Здесь мы приведем ту часть результатов, которая требуется в следующем основном разделе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $O(x_0, y_0)$ – окрестность сингулярной точки (x_0, y_0) . Кривые $x(y)$ и $x^*(y)$ имеют в точке $O(x_0, y_0)$ *поведение одинакового типа* если

1) $x(y)$ возрастает (убывает) в любой точке $(x(y), y) \in O \cap (S_1 \cup S_2)$, а $x^*(y)$ возрастает (убывает) в любой точке $(x^*(y), y) \in O \cap (S_1^* \cup S_2^*)$,

либо

2) $x(y)$ имеет локальный минимум (максимум) в любой точке $(x(y), y) \in O \cap (S_1 \cup S_2)$, а $x^*(y)$ имеет локальный минимум (максимум) в любой точке $(x^*(y), y) \in O \cap (S_1^* \cup S_2^*)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сингулярная точка (x_0, y_0) называется *точкой локальной устойчивости кривой $x(y)$ относительно перехода от (1) к (3) и от (2) к (4)*, если существует число $\varepsilon_0(x_0, y_0)$ и окрестность $O(x_0, y_0)$ такие, что $x(y)$ и $x^*(y)$ имеют в $O(x_0, y_0)$ поведение одинакового типа при условии $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0(x_0, y_0)$.

В [8], в частности, доказана

ТЕОРЕМА 1. Если в полуплоскости $y > 0$ или $y < 0$ точка $(x_0, y_0) \in S_1$ и $a_y(x_0, y_0) \neq 0$, то (x_0, y_0) – точка локальной устойчивости кривой $x(y)$ при переходе от (1) к (3).

Имеет место также (см. [5]) следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(x_0, y_0) \in S_2$ – точка локального экстремума функции $x(y)$. Тогда (x_0, y_0) – точка локальной устойчивости $x(y)$ при переходе от (2) к (4). Любая точка $(x_0, y_0) \in S_2$, не являющаяся локальным экстремумом, неустойчива.

Во многих случаях, когда уравнение моделирует реальный процесс и возможны возмущения, желательно знать единственную мажоранту для $|\varepsilon|$ (см. (3) и (4)) на конечной части $\widetilde{S}_1 \subseteq S_1$ или $\widetilde{S}_2 \subseteq S_2$ сингулярного множества, гарантирующую устойчивость всюду на $\widetilde{S}_1$ или на $\widetilde{S}_2$. Сформулируем понятие равномерной устойчивости всюду на $\widetilde{S}_1$ относительно перехода к возмущенному уравнению. Для $\widetilde{S}_2$ это понятие формулируется аналогично. В типичном случае $\widetilde{S}_1$ – кривая ненулевой длины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\widetilde{S}_1 \subseteq S_1$ внутри области G (G – область в $\mathbb{R}^2$). Кривая $x(y)$ *равномерно устойчива на $\widetilde{S}_1$ относительно перехода от (1) к (3)*, если существует число $\tilde{\varepsilon}$ и такая область G , что $x(y)$ и $x^*(y)$ при условии $0 < |\varepsilon| < \tilde{\varepsilon}$ имеют в G поведение одного типа.

3. Равномерная устойчивость локальных экстремумов на сингулярных множествах. Будем рассматривать только упрощенные уравнения (1)–(4). Чтобы придать формулировкам более краткую форму, предварительно введем два неравенства

$$0 < |\varepsilon| < \min \left[\frac{\inf_k |a_y(x, y)|}{\sup_k |b_y(x, y)|}, \frac{\min(|\inf_k a(x, y)|, \sup_k a(x, y))}{|\sup_k b(x, y)|} \right], \quad (5)$$

$$0 < |\varepsilon| < \min \left[\frac{\inf_k |P_y(x, y)|}{\sup_k |\pi_y(x, y)|}, \frac{\min(|\inf_k P(x, y)|, \sup_k P(x, y))}{|\sup_k \pi(x, y)|} \right]. \quad (6)$$

Укажем достаточные условия равномерной устойчивости локальных экстремумов интегральной кривой $x(y)$, продолженной на конечные части сингулярных множеств.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ – компакт, $K \cap Y = \emptyset$, $K \cap S_1 \neq \emptyset$, выполнено условие (5). Тогда если $\inf_k a_y(x, y) > 0$, то в полуплоскости $y > 0$ ($y < 0$) все точки множеств $K \cap S_1$ и $K \cap S_1^*$ являются локальными минимумами (максимумами) интегральных кривых $x(y)$ и $x^*(y)$ соответственно. Переход от (1) к (3) равномерно устойчив на $K \cap S_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул

$$\frac{dx}{dy} = ya(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{dx^*}{dy} = y[a(x, y) + \varepsilon b(x, y)],$$

следует, что $dx/dy = 0$ на S_1 и $dx^*/dy = 0$ на S_1^* . Рассмотрим только полуплоскость $y > 0$. Тогда в точке (x, y) множества $K \cap S_1$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = ya_y(x, y) > 0,$$

так как $a_y(x, y) \geq \inf_k a_y(x, y) > 0$. То есть (x, y) – точка локального минимума продолженной функции $x(y)$.

На $K \cap S_1^*$: $d^2x^*/dy^2 = y[a_y(x, y) + \varepsilon b_y(x, y)]$. По условию теоремы эта производная положительна всюду на K , если $\inf_k a_y(x, y) \geq |\varepsilon| |\sup_k b(x, y)|$, т.е. при условии

$$0 < |\varepsilon| < \frac{\inf_k a_y(x, y)}{|\sup_k b_y(x, y)|}. \quad (7)$$

В полуплоскости $y < 0$ все точки $(x, y) \in K \cap S_1$ являются локальными максимумами функции $x(y)$, а при условии (7) $d^2x^*/dy^2 < 0$ всюду на K .

Теперь покажем, что $K \cap S_1^* \neq \emptyset$, если $|\varepsilon|$ достаточно мал. Пусть (x_0, y_0) – произвольная внутренняя точка множества $K \cap S_1$. Рассмотрим приращение $\Delta a = a(x, y) - a(x_0, y_0) = a(x, y)$. Не существует такой окрестности точки (x_0, y_0) , где всюду было бы $\Delta a > 0$, так как в таком случае (x_0, y_0) была бы точкой локального экстремума функции $a(x, y)$, в противоречие с условием $a(x, y) > 0$. Очевидно, окрестность (x_0, y_0) , где всюду $\Delta a = 0$, тоже не существует. Следовательно, на K функция $a(x, y)$ принимает значения обоих знаков.

Пусть $\lambda = \min(|\inf_k a(x, y)|, |\sup_k a(x, y)|)$. В частности, $a(x, y)$ принимает на K все значения из отрезка $[-\lambda, \lambda]$. Поскольку $a(x, y)$ и $b(x, y)$ непрерывны, уравнение $a(x, y)$

$+ \varepsilon b(x, y) = 0$, определяющее точки (x, y) множества S_1^* , имеет решения на K , если $\lambda > |\varepsilon| |\sup_k a(x, y)|$, т.е. если

$$0 < |\varepsilon| < \frac{\min(|\inf_k a(x, y)|, \sup_k a(x, y))}{|\sup_k b(x, y)|}. \quad (8)$$

Объединяя (7) и (8), получим условие (5).

В тривиальных случаях, $|\sup_k b(x, y)| = 0$ или $|\sup_k b_y(x, y)| = 0$, число $|\varepsilon|$ может иметь любое значение.

Итак, при указанных условиях, $K \cap S_1^* \neq \emptyset$, и в любой точке множества $K \cap S_1^*$ продолженная функция $x^*(y)$ имеет локальный минимум, если $y > 0$, либо локальный максимум при $y < 0$. Иначе говоря, при переходе от уравнения (1) к возмущенному уравнению (3) (при переходе от интегральной кривой $x(y)$ к интегральной кривой $x^*(y)$) типы локальных экстремумов не меняются на K . По определению и в силу (5) переход от (1) к (3) равномерно устойчив на $K \cap S_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ – компакт, $K \cap Y \neq \emptyset$, $K \cap S_1 \neq \emptyset$ и $\inf_{K \cap S_1} a_y(x, y) < 0$. Тогда по теореме 1 существуют множества $\widetilde{S}_1 \subseteq K \cap S_1$ и $\widetilde{S}_1^* \subseteq K \cap S_1^*$ такие, что в полуплоскости $y > 0$ ($y < 0$) они покрыты только локальными максимумами (минимумами) функций $x(y)$ и $x^*(y)$ соответственно. Для любой точки множества $\widetilde{S}_1$ переход от (1) к (3) локально устойчив.

Если $\inf_{K \cap S_1} a_y(x, y) = a_y(x^*, y^*)$, то (x^*, y^*) – внутренняя точка множества $\widetilde{S}_1$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ – компакт, $K \cap Y \neq \emptyset$, $K \cap S_2 \neq \emptyset$, выполнено условие (4). Тогда если $\inf_k P_y(x, y) > 0$, то в полуплоскости $y > 0$ ($y < 0$) все точки множеств $K \cap S_2$ и $K \cap S_2^*$ являются локальными минимумами (максимумами) функций $x(y)$ и $x^*(y)$ соответственно. Переход от (2) к (4) равномерно устойчив на $K \cap S_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся рассмотрением локального минимума, когда K в полуплоскости $y > 0$, так как случай $y < 0$ совершенно аналогичен.

Из (2) следует

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{P(x, y)}, \quad P(x, y) \neq 0,$$

а из (4) получаем

$$\frac{dx^*}{dy} = \frac{y}{P(x, y) + \varepsilon \pi(x, y)}, \quad P(x, y) + \varepsilon \pi(x, y) \neq 0.$$

Если $(x, y) \in S_2$ – точка локального минимума продолженной кривой $x(y)$, то в этой точке

$$P(x, y) = 0, \quad P_y(x, y) > 0.$$

Аналогично, если $(x^*, y^*) \in K \cap S_2^*$ – локальный минимум продолженной кривой $x^*(y)$, то

$$P(x^*, y^*) + \varepsilon \pi(x^*, y^*) = 0, \quad P_y(x^*, y^*) + \varepsilon \pi_y(x^*, y^*) > 0.$$

Поскольку на K выполнено $P_y(x^*, y^*) \geq \inf_k P_y(x, y) > 0$, локальный минимум в (x^*, y^*) гарантируется неравенством

$$|\varepsilon| < \frac{\inf_k P_y(x, y)}{|\sup_k \pi_y(x, y)|}. \quad (9)$$

Теперь покажем, что $K \cap S_2^* \neq \emptyset$, если $|\varepsilon| > 0$ достаточно мал. Пусть (x_0, y_0) – внутренняя точка множества $K \cap S_2$. Рассуждая относительно $P(x, y)$ так же, как мы рассуждали относительно $a(x, y)$ при доказательстве предыдущей теоремы, приходим к заключению, что в любой окрестности точки (x_0, y_0) функция $P(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. В частности, на K функция принимает все значения из отрезка $[-\lambda_1, \lambda_1]$, где $\lambda_1 = \min(|\inf_k P(x, y)|, \sup_k P(x, y))$. Из непрерывности $P(x, y)$ и $\pi(x, y)$ следует, что уравнение $P(x, y) + \varepsilon \pi(x, y) = 0$, определяющее S_2^* , имеет решения, если

$$\lambda_1 > |\varepsilon| \left| \sup_k \pi(x, y) \right|. \quad (10)$$

Объединяя (9) и (10), получаем условие (6).

В тривиальных случаях, когда $|\sup_k \pi(x, y)| = 0$ или $|\sup_k \pi_y(x, y)| = 0$, можно взять любое значение $|\varepsilon| > 0$.

Следовательно, в условиях теоремы $K \cap S_2^* \neq \emptyset$ и функции $x(y)$ на $K \cap S_2$ имеют экстремумы того же типа, что и функции $x^*(y)$ на $K \cap S_2^*$. Таким образом, по определению и в силу выполненности условия (6) переход от уравнения (2) к возмущенному уравнению (4) равномерно устойчив на $K \cap S_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ – компакт, $K \cap Y \neq \emptyset$, $K \cap S_2 = \emptyset$ и $\inf_{K \cap S_2} P_y(x, y) < 0$. Тогда по теореме 2 существуют множества $\widetilde{S}_2 \subseteq K \cap S_2$ и $\widetilde{S}_2^* \subseteq K \cap S_2^*$ такие, что в полуплоскости $y > 0$ ($y < 0$) они покрыты только локальными максимумами (минимумами) продолженных функций $x(y)$ и $x^*(y)$ соответственно. Для любой точки множества $\widetilde{S}_2$ переход от (2) к (4) локально устойчив.

Если $\inf_{K \cap S_2} P_y(x, y) = P_y(x^*, y^*)$, то (x^*, y^*) – внутренняя точка множества S_2 .

Аналогично тому, как были доказаны теоремы 3 и 4, доказываются теоремы 5 и 6.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены все условия теоремы 3 (кроме $\inf_k a_y(x, y) > 0$) и $\sup_k a_y(x, y) < 0$. Тогда в полуплоскости $y > 0$ ($y < 0$) функции $x(y)$ и $x^*(y)$ имеют, соответственно, на множествах $K \cap S_1$ и $K \cap S_1^*$ только локальные максимумы (минимумы). Переход от (1) к (3) равномерно устойчив на $K \cap S_1$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнены все условия теоремы 4 (кроме $\inf_k P_y(x, y) > 0$) и $\sup_k P_y(x, y) < 0$. Тогда в полуплоскости $y > 0$ ($y < 0$) функции $x(y)$ и $x^*(y)$ имеют, соответственно, на множествах $K \cap S_2$ и $K \cap S_2^*$ только локальные максимумы (минимумы). Переход от (2) к (4) равномерно устойчив на $K \cap S_2$.

Достаточные условия устойчивости и равномерной устойчивости в классическом смысле для нелинейных ОДУ второго порядка можно найти, например, в книге [11].

4. Примеры. Приведем один пример на применение теоремы 3, когда сингулярное множество относится к первому типу, и один пример на применение теоремы 6 для сингулярного множества второго типа.

1) В [12] изучалось движение релятивистского осциллятора с лагранжианом

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{c^2}} - qx^2 \left(1 - \frac{y^2}{2c^2} \right), \quad q > 0,$$

где m – масса движущейся точки, а c – скорость света. Уравнение Эйлера–Лагранжа имеет сингулярное множество S_1 , определяемое обращением в нуль коэффициента при $\dot{y}$, равного

$$a(x, y) = -qx^2 - \frac{mc^2}{(1 - y^2/c^2)^{3/2}}.$$

Положим $c > c_2 > c/2 > c_1 > 0$ и выберем компакт

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \sqrt{\frac{m}{q}} \frac{c_2}{(1 - c_2^2/c^2)^{3/4}}, y \in [c_1, c_2] \right\}.$$

Как нетрудно видеть,

$$a_y(x, y) = \frac{3my}{(1 - y^2/c^2)^{5/2}} \Rightarrow \inf_k a_y(x, y) = \frac{3mc_1}{(1 - c_1^2/c^2)^{5/2}} > 0.$$

Не отыскивая $\inf_k a(x, y)$ и $\sup_k a(x, y)$, укажем одно положительное и одно отрицательное значения $a(x, y)$ на K , т.е. занизим мажоранту $|\varepsilon|$. Из простых вычислений получим

$$a\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{q}} \frac{c}{(3/4)^{3/4}}, \frac{c}{2}\right) = \frac{2mc^2}{\sqrt{3}}, \quad a\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{m}{q}} \frac{c}{(7/16)^{3/4}}, \frac{c}{2}\right) = -\frac{2mc^2}{5}.$$

Не конкретизируя возмущения $b(x, y)$, выпишем “ослабленное” условие (5):

$$0 < |\varepsilon| < \min \left[\frac{3mc_1}{(1 - c_1^2/c^2)^{5/2} \sup_k |b_y(x, y)|}, \frac{2mc^2}{5|\sup_k b(x, y)|} \right].$$

При этом условии все точки $K \cap S_1$ являются локальными минимумами (максимумами) функции $x(y)$, равномерно устойчивыми относительно возмущения $\varepsilon b(x, y)$.

Можно заметить, что с уменьшением c_1 устойчивость падает и может исчезать при нулевой скорости движения.

2) Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля [11]

$$\dot{y} = -x + y(1 - x^2).$$

Оно имеет сингулярное множество второго типа, представляющееся на плоскости кривой $y = x/1 - x^2$, имеющей асимптоты $x = \pm 1$ и распадающейся на три несвязные ветви. Положим $q > 1 > \alpha > 0$ и рассмотрим компакт $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + \alpha \leq x \leq q, -q \leq y \leq -\alpha\}$ через который проходит часть верхней ветви S_2 , расположенной над асимптотой $x = 1$.

Поскольку $P(x, y) = -x + y(1 - x^2)$ и $P_y(x, y) = 1 - x^2$, получаем

$$\sup_k P_y(x, y) = -\alpha(\alpha + 2) < 0.$$

Как и в предыдущем случае, найдем на K только одно положительное и одно отрицательное значения $P(x, y)$ (занизим мажоранту $|\varepsilon|$): $P(3, -2/3) = 7/3$, $P(5/4, -2/3)$

$= -7/8$. Заметим, что в рассматриваемом случае $|\sup_k P_y(x, y)| = \inf_k |P_y(x, y)|$. “Ослабленное” неравенство (5), гарантирующее равномерную устойчивость на $K \cap S_2$ относительно возмущения $\varepsilon \pi(x, y)$, имеет вид

$$0 < |\varepsilon| < \min \left[\frac{\alpha(\alpha + 2)}{\sup_k |\pi_y(x, y)|}, \frac{7}{8|\sup_k \pi(x, y)|} \right].$$

При этом условии все точки кривой $K \cap S_2$ являются локальными минимумами функции $x(y)$, $y > 0$.

Заметим аналогично с первым примером: уменьшая $|\alpha|$, мы приближаемся к оси $y = 0$ и снижаем устойчивость.

Авторы благодарят Б. И. Садовникова за сотрудничество.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Павлоцкий И. П., Стрианезе М., Тоскано Р. Продолжение решения дифференциального уравнения на сингулярное множество // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 3. С. 313–319.
- [2] Pavlotsky I. P., Strianese M., Toscano R. Prolongation of the integral curve on the singular set via the first integral // J. Interdisciplinary Math. 1999. V. 2. № 2, 3. P. 101–119.
- [3] Pavlotsky I. P., Strianese M. Extension of solution of ODE via the singular set // Nonlinear Anal. 2002. № 43. P. 4313–4317.
- [4] Pavlotsky I. P., Strianese M. Prolongation of integral curves of ODE of second order on the singular set via the local first integral. Preprint N1 of Univ. of Salerno, Italy, 2002.
- [5] Павлоцкий И. П., Садовников Б. И., Стрианезе М. Локальная устойчивость сингулярного множества второго типа обыкновенного дифференциального уравнения // Докл. РАН. 2002. Т. 1. № 2.
- [6] Павлоцкий И. П., Стрианезе М. Устойчивость сингулярного множества динамической системы // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 3. С. 296–303.
- [7] Павлоцкий И. П., Стрианезе М. Устойчивость сингулярного множества обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно εx - и εy -возмущений. // Докл. НАН Украины. 2002. № 4. С. 23–26.
- [8] Павлоцкий И. П., Стрианезе М. О локальной устойчивости экстремумов интегральных кривых ОДУ второго порядка // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 5. С. 742–753.
- [9] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М., 1990.
- [10] Kaplun Yu., Samoilenko V. Hr., Pavlotsky I. P., Strianese M. A global theorem on implicit function and its application to the theory of ordinary differential equations // Докл. НАН Украины. 2001. № 6. P. 38–41.
- [11] Sansone G., Conti R. Equazioni differenziale non lineari. Roma: Cremonese, 1956.
- [12] Pavlotsky I. P., Vilasi G. Some peculiar properties of relativistic oscillator in the post-Galilean approximation // Phys. A. 1995. V. 214. P. 68–81.