Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Романишин, Л. А. Сеницкий, Об аддитивной D -устойчивости матрицы на основе критерия Харитонова, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 2, 265–268

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm420>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:38:33

УДК 517.9

ОБ АДДИТИВНОЙ D -УСТОЙЧИВОСТИ МАТРИЦЫ НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЯ ХАРИТОНОВА

И. М. Романишин, Л. А. Синицкий

На основе теоремы Харитонова приведены достаточные условия, которым должна удовлетворять $(n \times n)$ -мерная матрица A для того, чтобы $A - \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ была устойчивой при произвольных $d_i \geq 0, i = \overline{1, n}$.

Библиография: 10 названий.

На основе теоремы Харитонова [1] приведены достаточные условия, которым должна удовлетворять $(n \times n)$ -мерная матрица A для того, чтобы $A - D$ ($D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$) была устойчивой при произвольных $d_i \geq 0, i = \overline{1, n}$.

Матрицу A и ее характеристический полином будем называть *устойчивыми (полуустойчивыми)*, если все собственные значения матрицы A , т.е. нули характеристического полинома, имеют отрицательные (неположительные) действительные части.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [2]. Матрица A называется *аддитивно D -устойчивой*, если $A - D$ ($D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$) устойчива при произвольных $d_i \geq 0, i = \overline{1, n}$.

С точки зрения теории цепей (в случае математической модели линейной цепи в виде системы дифференциальных уравнений в нормальной форме) принадлежность матрицы A к классу аддитивно D -устойчивых матриц означает, что цепь остается устойчивой независимо от величины потерь в реактивных элементах, т.е. при включении последовательно с индуктивностями и параллельно емкостям произвольных резисторов с положительными сопротивлениями.

В теории систем управления аддитивная D -устойчивость означает устойчивость системы с отрицательной обратной связью с произвольным коэффициентом усиления [3]. Понятие аддитивной D -устойчивости находит также свое применение в задачах абсолютной устойчивости, при решении проблемы Айзермана [4], а также при исследовании нейронных цепей [5], в задачах эконометрии и математической экологии [6].

Подклассом аддитивно D -устойчивых матриц являются матрицы, для которых матричное уравнение Ляпунова имеет решение в виде диагональной матрицы с положительными элементами (в литературе такие матрицы называют *D -диссипативными* [6], *Lyapunov diagonally stable* [2]). Рассмотрению таких матриц посвящена работа [7] и др.

Частным случаем аддитивно D -устойчивых матриц являются матрицы, которые остаются устойчивыми при вычитании из одного или двух диагональных элементов произвольных неотрицательных чисел. Условия, которым должна удовлетворять $(n \times n)$ -мерная матрица A для того, чтобы $A - D$ ($D = \text{diag}(d_1, 0, \dots, 0)$) была устойчивой при

произвольном $d_1 \geq 0$, рассматривались в [3] на основе применения частотного критерия Найквиста, математического аппарата Лурье–Якубовича–Попова и др. В данной работе приведен критерий аддитивной D -устойчивости на основе применения теоремы Харитонова [1], который сводится к проверке устойчивости четырех полиномов Харитонова.

Известно [8], что характеристическое уравнение $(n \times n)$ -мерной матрицы A имеет вид

$$\lambda^n + s_1 \lambda^{n-1} + s_2 \lambda^{n-2} + \dots + s_n = 0,$$

где коэффициенты характеристического уравнения $s_i, i = \overline{1, n}$, являются суммами всех $(i \times i)$ -мерных главных миноров матрицы A , умноженных на $(-1)^i$. Необходимым условием устойчивости матрицы A является положительность коэффициентов характеристического уравнения $s_i, i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим структуру коэффициентов характеристического уравнения для матрицы $A - D$ ($D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n), d_i \geq 0, i = \overline{1, n}$). Для простоты понимания запишем характеристическое уравнение для (3×3) -матрицы $A - D$ ($D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3), d_i \geq 0, i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} & \lambda^3 + \lambda^2[-(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + d_1 + d_2 + d_3] \\ & + \lambda[A_{12} + A_{13} + A_{23} + d_2 d_3 + d_1 d_3 + d_1 d_2 \\ & - d_1(a_{22} + a_{33}) - d_2(a_{33} + a_{11}) - d_3(a_{11} + a_{22})] \\ & + [-\det A + d_1 d_2 d_3 - d_1 d_2 a_{33} - d_1 d_3 a_{22} - d_2 d_3 a_{11} \\ & + d_1 A_{23} + d_2 A_{13} + d_3 A_{12}] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где a_{ii} – диагональные элементы матрицы A , A_{ij} – главные миноры, включающие i -е и j -е строки и столбцы.

Можно показать, что для $(n \times n)$ -матрицы $A - D$ ($D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$) характеристическое уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned} & \lambda^n + \left(s_1 + \sum_{i=1}^n d_i\right) \lambda^{n-1} + \left(s_2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n d_i d_j + (-1) \sum_{i=1}^n d_i B_i^{(1)}\right) \lambda^{n-2} \\ & + \left(s_3 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{\substack{k=1, k \neq j \\ k \neq i}}^n d_i d_j d_k \right. \\ & \left. + (-1) \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n d_i d_j B_{ij}^{(1)} + (-1)^2 \sum_{i=1}^n d_i B_i^{(2)}\right) \lambda^{n-3} + \dots \\ & + s_n + \prod_{i=1}^n d_i + (-1) \underbrace{\sum \dots \sum}_{n-1} \underbrace{d_i d_j d_k \dots}_{n-1} \underbrace{B_{ijk\dots}}_{n-1} + \dots \\ & + (-1)^p \underbrace{\sum \dots \sum}_{n-p} \underbrace{d_i d_j d_k \dots}_{n-p} \underbrace{B_{ijk\dots}^{(p)}}_{n-p} + \dots + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n d_i B_i^{(n-1)} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\underbrace{B_{ijk\dots}^{(p)}}_{n-p}$ – сумма всех $(p \times p)$ -мерных главных миноров матрицы, которая получается из матрицы A после вычеркивания $n - p$ строк и столбцов с номерами $i, j, k, \dots$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [9]. Матрица A называется *парциально устойчивой* (*парциально полуустойчивой*), если все ее главные подматрицы устойчивы (полуустойчивы).

Необходимым условием аддитивной D -устойчивости является парциальная полуустойчивость. Легко проверить (например, при помощи критерия Рауса–Гурвица), что для (3×3) -матрицы парциальной устойчивости достаточно для аддитивной D -устойчивости. Такой критерий не установлен для $(n \times n)$ -матриц, и вопрос эффективного критерия аддитивной D -устойчивости матриц в общем случае остается открытым. Одна из попыток его решения представлена здесь.

Главные миноры размера $i \times i$ парциально полуустойчивых матриц, умноженные на $(-1)^i$, неотрицательны. Поэтому составляющие коэффициентов характеристического уравнения (2) неотрицательны. Это означает, что коэффициенты характеристического уравнения (2) принимают минимальные значения при $d_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, а максимальные – при максимальных значениях $d_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$. Максимальные значения $d_i^* \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, выбираем из условия принадлежности матрицы $A - D^*$ ($D^* = \text{diag}(d_1^*, d_2^*, \dots, d_n^*)$) к матрицам с диагональным преобладанием по строкам или столбцам, т.е.

$$d_i^* = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| + a_{ii}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

или

$$d_i^* = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| + a_{ii}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Для тех i , при которых выражения (3), (4) отрицательны, принимаем $d_i^* = 0$. При $d_i > d_i^*$, $i = \overline{1, n}$, матрица $A - D$ устойчива. Таким образом, задача аддитивной D -устойчивости свелась к условиям устойчивости интервальной матрицы, точнее интервального полинома вида (1) при

$$d_i \in [0, d_i^*], \quad d_i^* \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

и может быть эффективно решена на основе теоремы Харитонова.

ТЕОРЕМА. Для того чтобы матрица $A - D$ ($D^* = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$) была устойчивой при произвольных $d_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, достаточно, чтоб были устойчивыми четыре характеристических полинома $R_i(\lambda)$, $i = \overline{1, 4}$:

$$\begin{aligned} R_1(\lambda) &= s_n + s_{n-2}^* \lambda^2 + s_{n-4} \lambda^4 + s_{n-6}^* \lambda^6 + \dots + s_{n-1} \lambda + s_{n-3}^* \lambda^3 + \dots, \\ R_2(\lambda) &= s_n + s_{n-2}^* \lambda^2 + s_{n-4} \lambda^4 + s_{n-6}^* \lambda^6 + \dots + s_{n-1}^* \lambda + s_{n-3} \lambda^3 + \dots, \\ R_3(\lambda) &= s_n^* + s_{n-2} \lambda^2 + s_{n-4}^* \lambda^4 + s_{n-6} \lambda^6 + \dots + s_{n-1} \lambda + s_{n-3}^* \lambda^3 + \dots, \\ R_4(\lambda) &= s_n^* + s_{n-2} \lambda^2 + s_{n-4}^* \lambda^4 + s_{n-6} \lambda^6 + \dots + s_{n-1}^* \lambda + s_{n-3} \lambda^3 + \dots, \end{aligned}$$

где s_i , s_i^* , $i = \overline{1, n}$, – коэффициенты характеристических уравнений для матриц A и $A - D^*$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Устойчивость четырех характеристических полиномов Харитонова обеспечивает устойчивость матрицы $A - D$ при принадлежности d_i интервалу (5), в том числе и при $d_i = d_i^*$, $i = \overline{1, n}$. На основе непрерывности собственных значений матрицы от ее элементов заключаем, что матрица $A - D$ устойчива в окрестности $d_i = d_i^*$, $i = \overline{1, n}$, т.е. при $d_i \in [d_i^* - \varepsilon, d_i^* + \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое положительное число. При $d_i > d_i^*$ матрица $A - D$ является матрицей со строгим диагональным преобладанием по строкам или столбцам и, таким образом, устойчива в силу критерия Гершгорина [8].

Отметим, что критерий Харитонова [1] задает необходимые и достаточные условия устойчивости и интервальных полиномов. Однако приведенные условия аддитивной D -устойчивости матрицы на основе теоремы Харитонова являются только достаточными из-за того, что при изменении d_i , $i = \overline{1, n}$, коэффициенты характеристического полинома (2) не могут изменяться независимо, и имеются совместные ограничения на возмущения этих коэффициентов аналогично случаю эллиптических ограничений [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харитонов В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 11. С. 2086–2088.
- [2] Hershkowitz D. Recent directions in matrix stability // Linear Algebra Appl. 1992. V. 171. P. 161–186.
- [3] Романишин И. М., Синицкий Л. А. H_D -системы // Проблемы управления и информатики. 1996. Т. 1–2. С. 224–238.
- [4] Романишин И. М., Синицкий Л. А. О некоторых классах матриц и проблеме Айзермана // Проблемы управления и информатики. 1998. Т. 6. С. 14–24.
- [5] Kaszkurewicz E, Bhaya A. Comments on “Necessary and Sufficient Condition for Absolute Stability of Neural Networks” // IEEE Trans. on Circuits and System. 1995. V. 42. № 8. P. 497–499.
- [6] Пых Ю. А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. М.: Наука, 1983.
- [7] Barker G. R., Berman A., Plemmons R. J. Positive diagonal solutions to the Lyapunov equations // Linear and Multilinear Algebra. 1978. V. 5. P. 249–256.
- [8] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
- [9] Синицкий Л. А. О свойствах матриц, применяемых в теории электрических цепей // Теоретическая электротехника. 1989. № 47. С. 39–45.
- [10] Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 9. С. 45–54.

(И. М. Романишин) Физико-механический институт им. Г. В. Карпенко НАН Украины Поступило
(Л. А. Синицкий) Львовский государственный университет им. И. Франко 15.06.2001