Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Сорокина, Н. В. Силенок, Критические Ω -
расслоенные формации конечных групп, *Матем. заметки*,
2002, том 72, выпуск 2, 269–282

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm421>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 03:11:26

УДК 512.542

КРИТИЧЕСКИЕ Ω -РАССЛОЕННЫЕ ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

М. М. Сорокина, Н. В. Силенок

Пусть $\mathfrak{H}$ – класс конечных групп. Ω -расслоенная формация конечных групп $\mathfrak{F}$ с направлением φ называется минимальной Ω -расслоенной не $\mathfrak{H}$ -формацией с направлением φ , или иначе, $\mathfrak{H}_\Omega$ -критической формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но каждая собственная Ω -расслоенная подформация с направлением φ из $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{H}$ содержится. В статье приводится полное описание строения минимальных Ω -расслоенных не $\mathfrak{H}$ -формаций конечных групп двух различных направлений.

Библиография: 16 названий.

Общая проблема изучения $\mathfrak{H}_\theta$ -критических формаций, где θ – произвольная непустая совокупность формаций, $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп, впервые была поставлена Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп в 1980 году [1]. В работе [2] Скибой получено решение этой проблемы в случае, когда θ – совокупность всех локальных формаций, а $\mathfrak{H} \in \theta$ – формация классического типа. Ведерниковым и Сорокиной решена задача Шеметкова для композиционных и композиционных (нормально) наследственных формаций [3], [4]. В последние годы интенсивно исследовались частично локальные и частично композиционные формации (см., например, [5], [6]). В работе [6] Ведерниковым и Коптюх изучены Ω -композиционные наследственные критические формации. Исследованию ω -локальных критических формаций посвящены работы Селькина и Скибы (см., например, [7]). Введенная в 1999 году Ведерниковым концепция частичной веерности и частичной расслоенности позволила на языке функций описать все формации конечных групп [8]–[10]. Отметим, что локальные и композиционные формации являются частными случаями веерных и расслоенных формаций соответственно. Целью данной работы является описание строения некоторых Ω -расслоенных критических формаций конечных групп.

Рассматриваются только конечные группы. Основные определения и обозначения можно найти в [9]–[13]. Приведем лишь некоторые из них. Пусть $\mathcal{I}$ – класс всех простых групп, Ω – непустой подкласс класса $\mathcal{I}$, $\mathfrak{G}_\Omega$ – класс всех Ω -групп, т.е. групп G таких, что $K(G) \subseteq \Omega$, где $K(G)$ – класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G ; полагают, что $1 \in \mathfrak{G}_\Omega$; $O_\Omega(G)$ – $\mathfrak{G}_\Omega$ -радикал группы G ; функции $f: \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, $g: \mathcal{I} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, $\varphi: \mathcal{I} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$, принимающие одинаковые значения на изоморфных группах из области определения, называются соответственно ΩF -функцией, F -функцией и FR -функцией. Формация $\Omega F(f, \varphi) = (G: G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G))$

называется Ω -расслоенной формацией с Ω -спутником f и с направлением φ ; формация $F(g, \varphi) = (G : G/O_{\varphi(A)} \in g(A) \text{ для всех } A \in K(G))$ называется *расслоенной формацией со спутником g и с направлением φ* [9].

Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп. Следуя [2], Ω -расслоенную формацию $\mathfrak{F}$ с направлением φ назовем *минимальной Ω -расслоенной не $\mathfrak{H}$ -формацией с направлением φ* , или иначе, *$\mathfrak{H}\Omega$ -критической формацией с направлением φ* , если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные Ω -расслоенные подформации с направлением φ из $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{H}$ содержатся. Аналогично определяются минимальные расслоенные не $\mathfrak{H}$ -формации с направлением φ .

Пусть $A \in \mathfrak{I}$, $O_{A', A}(G) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ -радикал группы G , где $\mathfrak{G}_{A'}$, $\mathfrak{G}_A$ – гашуцово произведение классов $\mathfrak{G}_{A'}$ и $\mathfrak{G}_A$. Формация $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ называется *Ω -канонической*, или коротко, *ΩK -формацией*, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любой группы $A \in \mathfrak{I}$, и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega KF(f) = (G : G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega'), G/O_{A', A}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G))$ [9]. Приведем описание минимальных Ω -канонических не $\mathfrak{H}$ -формаций ($\mathfrak{H}\Omega K$ -критических формаций).

ТЕОРЕМА 1. Пусть h – максимальный внутренний Ω -спутник непустой ΩK -формации $\mathfrak{H}$, f – минимальный Ω -спутник ΩK -формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}\Omega K$ -критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \Omega KF(G)$, где G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, и либо $f(A)$ является $h(A)$ -критической формацией при $K(P) = (A) \subseteq \Omega$, либо $f(\Omega')$ является $h(\Omega')$ -критической формацией, если $K(P) \not\subseteq \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}\Omega K$ -критическая формация и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда группа G является монолитической с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$. Поскольку $\Omega KF(G) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\Omega KF(G) \not\subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} = \Omega KF(G)$. Согласно следствию 5.4 из [9] $f(\Omega') = \text{form}(G/O_{\Omega}(G))$, $f(A) = \text{form}(G/O_{A', A}(G))$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$. По теореме 2 из [10] $h(\Omega') = \mathfrak{H}$ и для любого $A \in \Omega$ $h(A) = \mathfrak{G}_A h(A) = \mathfrak{G}_A h_1(A)$, где h_1 – произвольный внутренний Ω -спутник формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $K(P) = (A) \subseteq \Omega$. Покажем, что формация $f(A)$ является $h(A)$ -критической. Рассмотрим случай, когда $h(A) = \emptyset$. Пусть h_2 – минимальный Ω -спутник формации $\mathfrak{H}$. Допустим, что $A \in K(\mathfrak{H})$. Тогда по следствию 5.4 из [9] из $\mathfrak{H} = \Omega KF(\mathfrak{H})$ следует, что $h_2(A) \neq \emptyset$ и, значит, $h(A) = \mathfrak{G}_A h_2(A) \neq \emptyset$. Противоречие. Следовательно, $A \notin K(\mathfrak{H})$ и поэтому $A \notin \mathfrak{H}$. Так как $A \in \Omega \cap K(G)$, то $f(A) \neq \emptyset$. Ввиду леммы 7 из [10] $A \in \mathfrak{G}_A f(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $A \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ и, значит, $G = A$. Тогда $f(A) = \text{form}(A/O_{A', A}(A)) = (1)$ и формация $f(A)$ является $h(A)$ -критической.

Пусть теперь $h(A) \neq \emptyset$. Предположим, что $f(A) \subseteq h(A)$. Тогда $G/O_{A', A}(G) \in h(A)$ и из $G/O_A(G) \cong (G/P)/(O_A(G)/P) \in \mathfrak{H}$ ввиду леммы 2 из [10] следует $G \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Поэтому $f(A) \not\subseteq h(A)$. Пусть $\mathfrak{M}$ – собственная подформация из $f(A)$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq h(A)$ и M – группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus h(A)$. Тогда M является монолитной группой с монолитом $R = M^{h(A)}$. Если $R \in \mathfrak{G}_A$, то $M \in \mathfrak{G}_A h(A) = h(A)$, что невозможно. Следовательно, $R \in \mathfrak{G}_{A'}$ и $O_A(M) = 1$. Рассмотрим регулярное сплетение $T = A \wr M = [K]M$, где база сплетения K – элементарная A -группа. Так как $T/K \cong M \in \mathfrak{M}$, то ввиду леммы 7 из [10] $T \in \mathfrak{G}_A \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{G}_A f(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $\Omega KF(T) \subseteq \mathfrak{F}$. В силу леммы 3.1.9 из [13] $O_{A', A}(T) = K$. Если $\Omega KF(T) = \mathfrak{F}$, то $f(A) = \text{form}(T/O_{A', A}(T)) = \text{form } M \subseteq \mathfrak{M}$, что невозможно. Таким образом, $\Omega KF(T)$

$\subseteq \mathfrak{F}$ и, значит, $\Omega K F(T) \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $M \cong T/O_{A',A}(T) \in h(A)$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq h(A)$ и формация $f(A)$ является $h(A)$ -критической.

Пусть $K(P) \not\subseteq \Omega$. Покажем, что $f(\Omega')$ – $h(\Omega')$ -критическая формация. Так как $P \not\subseteq O_\Omega(G)$, то $O_\Omega(G) = 1$ и $f(\Omega') = \text{form } G \not\subseteq \mathfrak{H} = h(\Omega')$. Пусть $\mathfrak{M}$ – собственная подформация из $f(\Omega')$ и $\mathfrak{M}_1 = \Omega K F(\mathfrak{M})$. Из $\mathfrak{M} \subset f(\Omega') \subseteq \mathfrak{F}$ получаем $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}$, т.е. $\mathfrak{F} = \Omega K F(\mathfrak{M})$. Тогда по следствию 5.4 из [9]

$$f(\Omega') = \text{form}(M/O_\Omega(M) : M \in \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}.$$

Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} = h(\Omega')$ и формация $f(\Omega')$ является $h(\Omega')$ -критической.

Достаточность. Поскольку $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{B}$ – собственная ΩK -подформация из $\mathfrak{F}$ и b – ее минимальный Ω -спутник. По следствию 5.1 из [9] $b \leq f$. Покажем, что $b \leq h$. Пусть $A \in \Omega \setminus K(G)$. Тогда $f(A) = \emptyset$ и, значит, $b(A) = \emptyset \subseteq h(A)$.

Пусть $A \in \Omega \cap K(G)$. Если $A \notin K(P)$, то $P \in \mathfrak{G}_{A'}$, $A \in K(G/P)$ и ввиду леммы 1 из [10] $G/O_{A',A}(G) \cong (G/P)/(O_{A',A}(G)/P) = (G/P)/O_{A',A}(G/P) \in h(A)$. Поэтому $b(A) \subseteq f(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G)) \subseteq h(A)$. Пусть $A \in K(P)$. Предположим, что $b(A) = f(A)$. Тогда $G/O_{A',A}(G) \in b(A)$. Из монолитичности группы G следует, что $O_{A',A}(G) = O_A(G)$ и, значит, ввиду леммы 7 из [10] $G \in \mathfrak{G}_A b(A) \subseteq \mathfrak{B}$. Противоречие. Следовательно, $b(A) \subset f(A)$ и ввиду $h(A)$ -критичности формации $f(A)$ имеем $b(A) \subseteq h(A)$. Таким образом, $b(A) \subseteq h(A)$ для любого $A \in \Omega$.

Покажем, что $b(\Omega') \subseteq h(\Omega')$. Если $K(P) \subseteq \Omega$, то $P \subseteq O_\Omega(G)$ и

$$b(\Omega') \subseteq f(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G)) = \text{form}((G/P)/(O_\Omega(G)/P)) \subseteq \mathfrak{H} = h(\Omega').$$

Пусть $K(P) \not\subseteq \Omega$. Предположим, что $b(\Omega') = f(\Omega')$. Поскольку $P \not\subseteq O_\Omega(G)$, то $O_\Omega(G) = 1$ и $G \in \text{form } G = \text{form}(G/O_\Omega(G)) = f(\Omega') = b(\Omega') \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Следовательно, $b(\Omega') \subset f(\Omega')$ и поэтому $b(\Omega') \subseteq h(\Omega')$. Это означает, что $b \leq h$ и, значит, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Тем самым, установлено, что формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega K}$ -критической. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\mathfrak{H} = \emptyset$, то $\mathfrak{H}_{\Omega K}$ -критической является лишь единичная формация (1). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать случай, когда $\mathfrak{H} \neq \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть h – максимальный внутренний спутник непустой K -формации $\mathfrak{H}$, f – минимальный спутник K -формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_K$ -критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = K F(G)$, где G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, и формация $f(A)$ является $h(A)$ -критической формацией для $A \in K(P)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть h – максимальный внутренний Ω -спутник непустой n -кратно Ω -канонической формации $\mathfrak{H}$, f – минимальный $\Omega K_{(n-1)}$ -спутник n -кратно Ω -канонической формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ является минимальной n -кратно Ω -канонической не $\mathfrak{H}$ -формацией тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \Omega K F_n(G)$, где G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, и либо $f(A)$ является минимальной $(n-1)$ -кратно Ω -канонической не $h(A)$ -формацией при

$K(P) = (A) \subseteq \Omega$, либо $f(\Omega')$ является минимальной $(n-1)$ -кратно Ω -канонической не $h(\Omega')$ -формацией, если $K(P) \not\subseteq \Omega$.

Отметим, что Ω -спутник n -кратно Ω -канонической формации называется $\Omega K_{(n-1)}$ -спутником, если все его непустые значения являются $(n-1)$ -кратно Ω -каноническими формациями.

Формационно критическая группа G называется f -базисной, если формация $\text{form } G$ содержит единственную максимальную подформацию [4]. Формация $\mathfrak{M}$ называется максимальной подформацией формации $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$ и для любой формации $\mathfrak{B}$, удовлетворяющей условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$, имеет место $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$. Аналогично определяется максимальная ΩK -подформация ΩK -формации.

ЛЕММА 1. Пусть G – монолитическая группа с монолитом P , $K(P) = (B) \subseteq \Omega$, $G/O_B(G)$ – f -базисная группа и $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация из $\text{form}(G/O_B(G))$. Тогда формация $\mathfrak{F} = \Omega K F(G)$ имеет единственную максимальную ΩK -подформацию $\mathfrak{H}$, обладающую внутренним Ω -спутником h таким, что $h(B) = \mathfrak{M}$, $h(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G))$, $h(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G))$ для всех $A \in (\Omega \cap K(G)) \setminus (B)$ и $h(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – минимальный Ω -спутник формации $\mathfrak{F} = \Omega K F(G)$, h – ΩF -функция, описанная в формулировке леммы, $\mathfrak{H} = \Omega K F(H) = (H : H/O_\Omega(H) \in h(\Omega') \text{ и } H/O_{A',A}(H) \in h(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(H))$. Согласно следствию 5.4 из [9] $f(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G))$, $f(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G))$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$. Покажем, что $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная ΩK -подформация из $\mathfrak{F}$. Так как G – монолитическая группа и $B \in K(P)$, то $O_{B',B}(G) = O_B(G)$ и $f(B) = \text{form}(G/O_B(G))$. Тогда $h(B) \subset f(B)$ и $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{B}$ – собственная ΩK -подформация из $\mathfrak{F}$ и b – ее минимальный Ω -спутник. По следствию 5.1 из [9] $b \leq f$. Покажем, что $b \leq h$. Если $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus (B))$, то $h(A) = f(A)$ и $b(A) \subseteq h(A)$. Предположим, что $b(B) = f(B)$. Тогда $G/O_B(G) = G/O_{B',B}(G) \in b(B) \subseteq \mathfrak{B}$ и в силу леммы 2 из [10] $G \in \mathfrak{B}$, что невозможно. Поэтому $b(B) \subset f(B) = \text{form}(G/O_B(G))$. Согласно условию $b(B) \subseteq \mathfrak{M} = h(B)$. Следовательно, $b \leq h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Тем самым, установлено, что $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная ΩK -подформация формации $\mathfrak{F}$.

Покажем, что h является внутренним Ω -спутником формации $\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{M} \subset f(B) \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}_1 = \Omega K F(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}$, то

$$f(B) = \text{form}(M/O_{B',B}(M) : M \in \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M} \subset f(B).$$

Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $h(B) = \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $A \in (\Omega \cap K(G)) \setminus (B)$. Обозначим через $\mathfrak{X}$ множество всех тех собственных секций группы $G/O_B(G)$, которые принадлежат $\text{form}(G/O_B(G))$. Поскольку $G/O_B(G)$ – формационно критическая группа, то $G/O_B(G) \notin \text{form } \mathfrak{X}$ и $\text{form } \mathfrak{X} \subset \text{form}(G/O_B(G))$. По условию $\text{form } \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$ и, значит, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Ввиду леммы 4.13 из [14, гл. II] группа $G/O_B(G)$ монолитична. Пусть $N/O_B(G)$ – монолит группы $G/O_B(G)$ и $C \in K(N/O_B(G))$. Рассмотрим случай, когда $C \in \Omega$. Поскольку $N/O_B(G) \subseteq O_C(G/O_B(G))$, то

$$(G/O_B(G))/O_C(G/O_B(G)) \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}.$$

Так как $O_B(G/O_B(G)) = 1$, то $C \not\subseteq B$ и, значит, $h(C) = f(C)$. Из $G/O_B(G) \in \mathfrak{F}$ имеем $(G/O_B(G))/O_{C',C}(G/O_B(G)) \in f(C) = h(C)$ и по лемме 2 из [10] $G/O_B(G) \in \mathfrak{H}$. Пусть теперь $C \notin \Omega$. Тогда $N/O_B(G) \subseteq O_{\Omega'}(G/O_B(G))$ и, значит,

$$(G/O_B(G))/O_{\Omega'}(G/O_B(G)) \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}.$$

Далее, из $G/O_B(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что

$$(G/O_B(G))/O_{\Omega}(G/O_B(G)) \in f(\Omega') = h(\Omega').$$

Таким образом, по лемме 2 из [10] $G/O_B(G) \in \mathfrak{H}$. Тогда из $O_B(G) \in \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ получим

$$h(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G)) = \text{form}((G/O_B(G))/(O_{A',A}(G)/O_B(G))) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Поскольку $O_B(G) \subseteq O_{\Omega}(G)$, то

$$h(\Omega') = \text{form}(G/O_{\Omega}(G)) = \text{form}((G/O_B(G))/(O_{\Omega}(G)/O_B(G))) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Таким образом, h является внутренним Ω -спутником формации $\mathfrak{H}$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть G – монолитическая группа с монолитом P , $K(P) = (B)$, $G/O_B(G)$ – f -базисная группа и $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация из $\text{form}(G/O_B(G))$. Тогда формация $\mathfrak{F} = KF(G)$ имеет единственную максимальную K -подформацию $\mathfrak{H}$, обладающую внутренним спутником h таким, что $h(B) = \mathfrak{M}$, $h(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G))$ для всех $A \in K(G) \setminus (B)$ и $h(A) = \emptyset$, если $A \in \mathcal{I} \setminus K(G)$.

ЛЕММА 2. Пусть G – f -базисная группа с монолитом P , $K(P) \not\subseteq \Omega$, $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация из $\text{form } G$. Тогда формация $\mathfrak{F} = \Omega KF(G)$ имеет единственную максимальную ΩK -подформацию $\mathfrak{H}$, обладающую внутренним Ω -спутником h таким, что $h(\Omega') = \mathfrak{M}$, $h(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G))$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$ и $h(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – минимальный Ω -спутник формации $\mathfrak{F} = \Omega KF(G)$, h – ΩF -функция, описанная в формулировке леммы, $\mathfrak{H} = \Omega KF(h)$. Так как согласно следствию 5.4 из [9] $f(A) = h(A)$ для любого $A \in \Omega$ и ввиду $P \not\subseteq O_{\Omega}(G)$ справедливо $h(\Omega') = \mathfrak{M} \subset \text{form } G = \text{form}(G/O_{\Omega}(G)) = f(\Omega')$, то $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная ΩK -подформация из $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{B}$ – собственная ΩK -подформация из $\mathfrak{F}$ и b – ее минимальный Ω -спутник. По следствию 5.1 из [9] $b \leq f$. Покажем, что $b \leq h$. Для любого $A \in \Omega$ имеем $b(A) \subseteq f(A) = h(A)$. Предположим, что $b(\Omega') = f(\Omega')$. Тогда $G \cong G/O_{\Omega}(G) \in b(\Omega') \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Следовательно, $b(\Omega') \subset f(\Omega') = \text{form } G$ и поэтому $b(\Omega') \subseteq \mathfrak{M} = h(\Omega')$. Таким образом, $b \leq h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Тем самым, установлено, что $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная ΩK -подформация из $\mathfrak{F}$.

Покажем, что h является внутренним Ω -спутником ΩK -формации $\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \Omega KF(\mathfrak{M})$. Как и при доказательстве леммы 1, нетрудно проверить, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому $h(\Omega') = \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $A \in \Omega \cap K(G)$ и $\mathfrak{X}$ – множество всех тех собственных секций из G , которые принадлежат $\text{form } G$. Поскольку G – формационно критическая группа, то $G \notin \text{form } \mathfrak{X}$ и, значит, $\text{form } \mathfrak{X} \subset \text{form } G$. По условию $\text{form } \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$ и поэтому $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Так как $P \subseteq O_{A',A}(G)$, то $G/O_{A',A}(G) \in \mathfrak{X}$ и $h(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G)) \subseteq \mathfrak{H}$. Тем самым, доказано, что h является внутренним Ω -спутником формации $\mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Формационно критическую группу G назовем ΩK -базисной (соответственно K -базисной), если формация $\Omega KF(G)$ (соответственно $KF(G)$) содержит единственную максимальную ΩK -подформацию (соответственно K -подформацию).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая ΩK -формация, h – ее максимальный внутренний Ω -спутник. ΩK -формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}\Omega K$ -критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \Omega KF(G)$, где G – ΩK -базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ такая, что выполняется одно из следующих условий:

- 1) $G = P$ – простая группа из Ω ;
- 2) $G = [P]H$, $K(P) = (A) \subseteq \Omega$, $P = O_A(G)$, $C_G(P) \subseteq P$, H – f -базисная группа с монолитом $Q = H^{h(A)}$ и максимальная подформация из $\text{form } H$ содержится в $h(A)$;
- 3) G – f -базисная группа такая, что $K(P) \not\subseteq \Omega$, $P = G^{h(\Omega')}$ и максимальная подформация из $\text{form } G$ содержится в $h(\Omega')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть f – минимальный Ω -спутник ΩK -формации $\mathfrak{F}$. По теореме 1 $\mathfrak{F} = \Omega KF(G)$, где G – монолитическая группа из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем при $K(P) = (A) \subseteq \Omega$ формация $f(A)$ является $h(A)$ -критической, а при $K(P) \not\subseteq \Omega$ формация $f(\Omega')$ $h(\Omega')$ -критическая. По следствию 5.4 из [9] $f(\Omega') = \text{form}(G/O_{\Omega}(G))$, $f(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G))$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$. Согласно теореме 2 из [10] $h(\Omega') = \mathfrak{H}$ и для любого $A \in \Omega$ справедливо

$$h(A) = \mathfrak{G}_A h(A) = \mathfrak{G}_A h_1(A),$$

где h_1 – произвольный внутренний Ω -спутник формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $A \in K(P) \subseteq \Omega$. Рассмотрим случай, когда $A \notin K(\mathfrak{H})$. Так как $A \in K(G)$, то $f(A) \neq \emptyset$ и ввиду леммы 7 из [10] $P \in \mathfrak{G}_A \subseteq \mathfrak{G}_A f(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\Omega KF(P) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\Omega KF(P) \subset \mathfrak{F}$, то $\Omega KF(P) \subseteq \mathfrak{H}$ и $A \in K(\mathfrak{H})$, что невозможно. Поэтому $\Omega KF(P) = \mathfrak{F}$ и можем считать, что $G = P$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_A$. Действительно, как отмечено выше, $\mathfrak{G}_A \subseteq \mathfrak{F}$. С другой стороны, из $P \in \mathfrak{G}_A$ ввиду того, что $\mathfrak{G}_A$ – ΩK -формация, получаем $\mathfrak{F} = \Omega KF(P) \subseteq \mathfrak{G}_A$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_A$. Пусть $\mathfrak{F}_1$ – собственная ΩK -подформация из $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_1 \neq \emptyset$. Если $A \in K(\mathfrak{F}_1)$, то ввиду леммы 7 из [10] $\mathfrak{G}_A \subseteq \mathfrak{F}_1$, что невозможно. Следовательно, $K(\mathfrak{F}_1) = \emptyset$ и, значит, $\mathfrak{F}_1 = (1)$ – единственная максимальная ΩK -подформация из $\mathfrak{F}$. Согласно лемме 4.14 из [14, гл. II] группа P является формационно критической. Тем самым, установлено, что формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1).

Пусть теперь $A \in K(\mathfrak{H})$ и H – группа наименьшего порядка из $f(A) \setminus h(A)$. Тогда группа H монолитична с монолитом $Q = H^{h(A)}$. Если $Q \in \mathfrak{G}_A$, то $H \in \mathfrak{G}_A h(A) = h(A)$, что невозможно. Следовательно, $Q \notin \mathfrak{G}_A$ и $O_A(H) = 1$. Пусть A – неабелева группа. Рассмотрим регулярное сплетение $T = A \wr H = [K]H$, где K – база сплетения. Тогда в силу леммы 7 из [10] $T \in \mathfrak{G}_A f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ и, значит, $\Omega KF(T) \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $\Omega KF(T) \subset \mathfrak{F}$. Тогда $\Omega KF(T) \subseteq \mathfrak{H}$. По лемме 3.1.9 из [13] $O_{A',A}(T) = K$ и из $T \in \mathfrak{H}$ получаем $H \cong T/O_{A',A}(T) \in h(A)$. Противоречие. Следовательно, $\Omega KF(T) = \mathfrak{F}$. Ввиду лемм 18.5 и 18.8 из [15] группа T монолитична с монолитом K . По следствию 52.34 из [16] группа T критическая, а значит, и формационно критическая. Покажем, что H является f -базисной группой. Пусть $\mathfrak{X}$ – множество всех тех собственных секций группы H , которые принадлежат $\text{form } H = \text{form}(T/O_{A',A}(T)) = f(A)$. В силу выбора H получаем $\mathfrak{X} \subseteq h(A)$. Поэтому $H \notin \text{form } \mathfrak{X}$ и, значит, H является формационно критической группой. Согласно лемме 3.3 из [12] формация $\text{form } H$ обладает максимальными подформациями. Допустим, что $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ – различные мак-

симальные подформации из $\text{form } H = f(A)$. Тогда $\mathfrak{M}_1 \subseteq h(A)$ и $\mathfrak{M}_2 \subseteq h(A)$, а значит, и $f(A) = \text{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) \subseteq h(A)$. Противоречие. Следовательно, формация $f(A) = \text{form } H$ обладает единственной максимальной подформацией $\mathfrak{M}$, причем $\mathfrak{M} \subseteq h(A)$. Тем самым, установлено, что H является f -базисной группой. Так как $H \cong T/O_A(T)$, то по лемме 1 формация $\mathfrak{F}$ обладает единственной максимальной ΩK -подформацией. Поэтому $T - \Omega K$ -базисная группа и $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2).

Пусть теперь $A \cong Z_p$. Так как $O_p(H) = 1$ и H мнolitична, то по лемме 18.8 из [12] существует точный неприводимый $F_p[H]$ -модуль K . Пусть $T = [K]H$. Тогда T монолитична с монолитом $K = C_T(K)$. Ввиду теоремы 53.44 из [16] T является формационно критической группой. По лемме 7 из [10] $T \in \mathfrak{G}_{Z_p} f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\Omega K F(T) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\Omega K F(T) \subset \mathfrak{F}$, то $\Omega K F(T) \subseteq \mathfrak{H}$ и из $O_{Z_p', Z_p}(T) = O_{Z_p}(T) = K$ получаем $T/O_{Z_p', Z_p}(T) \cong H \in h(Z_p)$, что невозможно. Поэтому $\Omega K F(T) = \mathfrak{F}$. Как и выше, нетрудно показать, что $H - f$ -базисная группа. Тогда по лемме 1 $T - \Omega K$ -базисная группа и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2).

Пусть $K(P) \not\subseteq \Omega$. Тогда $f(\Omega') = \text{form } G$, $h(\Omega') = \mathfrak{H}$ и, значит, формация $f(\Omega')$ является $\mathfrak{H}$ -критической. Пусть S – группа минимального порядка из $f(\Omega') \setminus \mathfrak{H}$. Тогда группа S монолитична с монолитом $R = S^{\mathfrak{H}} = S^{h(\Omega')}$ и $f(\Omega') = \text{form } S$. Так как $f(\Omega') \subseteq \mathfrak{F}$, то $S \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Из $\Omega K F(S) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\Omega K F(S) \not\subseteq \mathfrak{H}$ получаем $\mathfrak{F} = \Omega K F(S)$ и поэтому в качестве G можно выбрать группу S . Покажем, что $S - f$ -базисная группа. Пусть $\mathfrak{D}$ – множество всех тех собственных секций группы S , которые принадлежат $\text{form } S = f(\Omega')$. В силу выбора группы S имеем $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{H}$ и поэтому $S \notin \text{form } \mathfrak{D}$. Следовательно, группа S является формационно критической. По лемме 3.3 из [12] формация $\text{form } S$ имеет максимальные подформации. Если $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ – различные максимальные подформации из $\text{form } S$, то в силу $\mathfrak{H}$ -критичности формации $f(\Omega') = \text{form } S$ получим $f(\Omega') = \text{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) \subseteq \mathfrak{H}$, что невозможно. Следовательно, формация $\text{form } S$ обладает единственной максимальной подформацией $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} = h(\Omega')$ и, значит, группа S является f -базисной. По лемме 2 $S - \Omega K$ -базисная группа и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3).

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega K F(G)$, где $G - \Omega K$ -базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, типа 1)–3). Из $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ следует, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть G – группа типа 1). В этом случае собственными ΩK -подформациями формации $\mathfrak{F}$ являются лишь (1) и $\emptyset$. Так как $\mathfrak{H} \neq \emptyset$ и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega K}$ -критической.

Пусть теперь G – группа типа 2) и $A \in K(P)$. Из строения группы G получим $O_{A', A}(G) = P$ и $f(A) = \text{form } H$. Из $H^{h(A)} = Q \neq 1$ следует, что $H \notin h(A)$ и поэтому $f(A) \not\subseteq h(A)$. Так как единственная максимальная подформация из $f(A)$ содержится в $h(A)$, то формация $f(A)$ является $h(A)$ -критической и по теореме 1 $\mathfrak{F} - \mathfrak{H}_{\Omega K}$ -критическая формация.

Рассмотрим случай, когда G – группа типа 3). Тогда $O_{\Omega}(G) = 1$ и $f(\Omega') = \text{form } G \not\subseteq \mathfrak{H} = h(\Omega')$. Так как единственная максимальная подформация из $f(\Omega')$ содержится в $h(\Omega')$, то $f(\Omega') - h(\Omega')$ -критическая формация и по теореме 1 формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega K}$ -критической. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая K -формация, h – ее максимальный внутренний спутник. K -формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_K$ -критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = K F(G)$, где $G - K$ -базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ такая, что

выполняется одно из следующих условий:

- 1) $G = P$ – простая группа;
- 2) $G = [P]H$, $P = O_A(G)$, $C_G(P) \subseteq P$, H – f -базисная группа с монолитом $Q = H^{h(A)}$ и максимальная подформация из $\text{form } H$ содержится в $h(A)$, где $A \in K(P)$.

Пусть $A \in \mathfrak{I}$, $O_{A'}(G)$ – $\mathfrak{G}_{A'}$ -радикал группы G . Формация $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ называется Ω -биканонической или, коротко, ΩB -формацией, если $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любой неабелевой группы $A \in \mathfrak{I}$ и $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{I}$, и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega BF(f) = (G : G/O_\Omega(G) \in f(\Omega'), G/O_{A'}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in (\Omega \setminus \mathfrak{U}) \cap K(G) \text{ и } G/O_{A',A}(G) \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap \mathfrak{U} \cap K(G))$ [10]. Приведем описание минимальных Ω -биканонических не $\mathfrak{H}$ -формаций ($\mathfrak{H}_{\Omega B}$ -критических формаций).

ТЕОРЕМА 3. Пусть h – максимальный внутренний Ω -спутник непустой ΩB -формации $\mathfrak{H}$, f – минимальный Ω -спутник ΩB -формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega B}$ -критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \Omega BF(G)$, где G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, и либо $f(A)$ является $h(A)$ -критической формацией при $K(P) = (A) \subseteq \Omega$, либо $f(\Omega')$ является $h(\Omega')$ -критической формацией, если $K(P) \not\subseteq \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда группа G является монолитической с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ и $\mathfrak{F} = \Omega BF(G)$. Согласно теореме 5 из [9] $f(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G))$, $f(A) = \text{form}(G/O_{A'}(G))$ для всех $A \in (\Omega \setminus \mathfrak{U}) \cap K(G)$, $f(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G))$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{U} \cap K(G)$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$. По теореме 3 из [10] $h(A) = \mathfrak{H}$ для любого $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathfrak{U})$ и $h(A) = \mathfrak{G}_A h_1(A)$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{U}$, где h_1 – произвольный внутренний Ω -спутник формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $K(P) = (A) \subseteq \Omega$. Покажем, что формация $f(A)$ является $h(A)$ -критической. Рассмотрим случай, когда $h(A) = \emptyset$. В силу строения h имеем $A \in \Omega \cap \mathfrak{U}$. Пусть h_2 – минимальный Ω -спутник формации $\mathfrak{H}$. Допустим, что $A \in K(\mathfrak{H})$. Тогда по теореме 5 из [9] $h_2(A) \neq \emptyset$ и, значит, $h(A) = \mathfrak{G}_A h_2(A) \neq \emptyset$. Противоречие. Следовательно, $A \notin K(\mathfrak{H})$ и поэтому $A \notin \mathfrak{H}$. Ввиду леммы 9 из [10] $A \in \mathfrak{G}_A f(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $A \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ и, значит, $G = A$. Тогда $f(A) = \text{form}(A/O_{A',A}(A)) = (1)$ и формация $f(A)$ является $h(A)$ -критической.

Пусть теперь $h(A) \neq \emptyset$. Предположим, что $f(A) \subseteq h(A)$. Поскольку $A \in K(P)$, то $P \subseteq O_A(G)$ и, значит, $G/O_A(G) \cong (G/P)/(O_A(G)/P) \in \mathfrak{H}$. Тогда ввиду леммы 2 из [10] $G \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Поэтому $f(A) \not\subseteq h(A)$. Пусть $\mathfrak{M}$ – собственная подформация из $f(A)$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq h(A)$ и M – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{M} \setminus h(A)$. Тогда M является монолитической группой с монолитом $R = M^{h(A)}$. Допустим, что A – неабелева группа. Тогда $h(A) = \mathfrak{H}$ и $M \notin \mathfrak{H}$. Так как $M \in \mathfrak{M} \subset f(A) \subseteq \mathfrak{F}$, то $\Omega BF(M) \subseteq \mathfrak{F}$ и из $\Omega BF(M) \not\subseteq \mathfrak{H}$ получаем $\Omega BF(M) = \mathfrak{F}$. Отсюда

$$f(A) = \text{form}(M/O_{A'}(M)) \subseteq \mathfrak{M}.$$

Противоречие. Следовательно, $A \in \Omega \cap \mathfrak{U}$. Если $R \in \mathfrak{G}_A$, то $M \in \mathfrak{G}_A h(A) = h(A)$, что невозможно. Поэтому $R \subset \mathfrak{G}_{A'}$ и $O_A(M) = 1$. Рассмотрим регулярное сплетение $T = A \wr M = [K]M$, где база сплетения K – элементарная A -группа. Так как

$T/K \cong M \in \mathfrak{M}$, то $T \in \mathfrak{G}_A \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{G}_A f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\Omega BF(T) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\Omega BF(T) = \mathfrak{F}$, то $f(A) = \text{form}(T/O_{A',A}(T)) = \text{form } M \subseteq \mathfrak{M}$, что невозможно. Таким образом, $\Omega BF(T) \subset \mathfrak{F}$ и, значит, $\Omega BF(T) \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $M \cong T/O_{A',A}(T) \in h(A)$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq h(A)$ и формация $f(A)$ является $h(A)$ -критической.

Если $K(P) \not\subseteq \Omega$, то, проводя рассуждения, как и при доказательстве теоремы 1, получим, что $f(\Omega') - h(\Omega')$ -критическая формация.

Достаточность. Поскольку $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{B}$ – собственная ΩB -подформация из $\mathfrak{F}$ и b – ее минимальный Ω -спутник. Согласно следствию 5.1 из [9] $b \leq f$. Покажем, что $b \leq h$. Если $A \in \Omega \setminus K(G)$, то $f(A) = \emptyset$ и, значит, $b(A) = \emptyset \subseteq h(A)$.

Пусть $A \in \Omega \cap K(G)$. Рассмотрим случай, когда $A \notin K(P)$. Если A – неабелева группа, то из $P \in \mathfrak{G}_{A'}$ получаем

$$f(A) = \text{form}(G/O_{A'}(G)) = \text{form}((G/P)/(O_{A'}(G)/P)) \subseteq \mathfrak{H} = h(A)$$

и $b(A) \subseteq h(A)$. Если A – абелева группа, то ввиду леммы 1 из [10]

$$G/O_{A',A}(G) \cong (G/P)/(O_{A',A}(G)/P) = (G/P)/O_{A',A}(G/P) \in h(A)$$

и поэтому $b(A) \subseteq f(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G)) \subseteq h(A)$. Пусть $A \in K(P)$. Предположим, что $b(A) = f(A)$. Если A – неабелева группа, то из $P \not\subseteq O_{A'}(G)$ имеем $G \cong G/O_{A'}(G) \in f(A) = b(A) \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Пусть A – абелева группа. Так как группа G монолитична, то $O_{A',A}(G) = O_A(G)$ и из $G/O_{A',A}(G) \in b(A)$ следует ввиду леммы 9 из [10], что $G \in \mathfrak{G}_A b(A) \subseteq \mathfrak{B}$. Противоречие. Следовательно, $b(A) \subset f(A)$ и ввиду $h(A)$ -критичности формации $f(A)$ имеем $b(A) \subseteq h(A)$.

Покажем, что $b(\Omega') \subseteq h(\Omega')$. Если $K(P) \subseteq \Omega$, то $P \subseteq O_\Omega(G)$ и

$$b(\Omega') \subseteq f(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G)) = \text{form}((G/P)/(O_\Omega(G)/P)) \subseteq \mathfrak{H} = h(\Omega').$$

Пусть $K(P) \not\subseteq \Omega$. Предположим, что $b(\Omega') = f(\Omega')$. Поскольку $P \not\subseteq O_\Omega(G)$, то $O_\Omega(G) = 1$ и $G \in \text{form } G = \text{form}(G/O_\Omega(G)) = f(\Omega') = b(\Omega') \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Следовательно, $b(\Omega') \subset f(\Omega')$ и поэтому $b(\Omega') \subseteq h(\Omega')$. Это означает, что $b \leq h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Тем самым, установлено, что формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega B}$ -критической. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть h – максимальный внутренний спутник непустой B -формации $\mathfrak{H}$, f – минимальный спутник B -формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_B$ -критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = BF(G)$, где G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^\mathfrak{H}$, и формация $f(A)$ является $h(A)$ -критической формацией для $A \in K(P)$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть h – максимальный внутренний Ω -спутник непустой n -кратно Ω -биканонической формации $\mathfrak{H}$, f – минимальный $\Omega B_{(n-1)}$ -спутник n -кратно Ω -биканонической формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ является минимальной n -кратно Ω -биканонической не $\mathfrak{H}$ -формацией тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \Omega BF_n(G)$, где G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^\mathfrak{H}$, и либо $f(A)$ является минимальной $(n-1)$ -кратно Ω -биканонической не $h(A)$ -формацией при $K(P) = (A) \subseteq \Omega$, либо $f(\Omega')$ является минимальной $(n-1)$ -кратно Ω -биканонической не $h(\Omega')$ -формацией, если $K(P) \not\subseteq \Omega$.

Формационно критическую группу G назовем ΩB -базисной (соответственно B -базисной), если формация $\Omega BF(G)$ (соответственно $BF(G)$) содержит единственную максимальную ΩB -подформацию (соответственно B -подформацию).

ЛЕММА 3. Пусть G – монолитическая группа с неабелевым монолитом P , $K(P) \subseteq \Omega$. Тогда группа G является ΩB -базисной, причем максимальная ΩB -подформация $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F} = \Omega BF(G)$ имеет внутренний Ω -спутник h такой, что $h(A) = \text{form}(G/P)$ для $A \in K(P)$, $h(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G))$, $h(A) = \text{form}(G/O_{A'}(G))$ для всех $A \in ((\Omega \setminus \mathfrak{U}) \cap K(G)) \setminus K(P)$, $h(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G))$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{U} \cap K(G)$ и $h(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – минимальный Ω -спутник формации $\mathfrak{F} = \Omega BF(G)$, h – ΩF -функция, описанная в формулировке леммы, $\mathfrak{H} = \Omega BF(h)$. Согласно теореме 5 из [9] $f(A) = h(A)$ для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus K(P))$, а для $A \in K(P)$ справедливо $f(A) = \text{form}(G/O_{A'}(G)) = \text{form } G$. Тогда $h \leq f$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. По лемме 18.2 из [12] $h(A) = \text{form}(G/P) \subseteq f(A)$ для $A \in K(P)$. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем, что h является внутренним Ω -спутником формации $\mathfrak{H}$. Так как для $A \in K(P)$ выполняется $(G/P)/O_{A'}(G/P) \in \text{form}(G/P) = h(A)$, то из $G/P \in \mathfrak{F}$ и равенства $f(C) = h(C)$ для всех $C \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus K(P))$ следует, что $G/P \in \mathfrak{H}$. Поэтому

$$h(A) = \text{form}(G/P) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Пусть $A \notin K(P)$. Тогда $P \in \mathfrak{G}_{A'}$ и для $A \in (\Omega \setminus \mathfrak{U}) \cap K(G)$

$$h(A) = \text{form}(G/O_{A'}(G)) = \text{form}((G/P)/(O_{A'}(G)/P)) \subseteq \mathfrak{H},$$

а для $A \in \Omega \cap \mathfrak{U} \cap K(G)$

$$h(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G)) = \text{form}((G/P)/(O_{A',A}(G)/P)) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Кроме того, из $K(P) \subseteq \Omega$ получаем

$$h(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G)) = \text{form}((G/P)/(O_\Omega(G)/P)) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Следовательно, Ω -спутник h формации $\mathfrak{H}$ является внутренним.

Пусть $\mathfrak{B}$ – собственная ΩB -подформация из $\mathfrak{F}$, b – ее минимальный Ω -спутник. Согласно следствию 5.1 из [9] $b \leq f$. Тогда для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus K(P))$ имеет место $b(A) \subseteq f(A) = h(A)$. Пусть $A \in K(P)$. Предположим, что $b(A) = f(A)$. Тогда $G \in \text{form } G = b(A) \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Поэтому $b(A) \subset f(A)$. Ввиду леммы 18.2 из [12] $b(A) \subseteq \text{form}(G/P) = h(A)$. Таким образом, $b \leq h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная ΩB -подформация из $\mathfrak{F}$. Ввиду следствия 52.34 из [16] группа G является критической, а значит, и формационно критической. Тем самым, доказано, что G – ΩB -базисная группа. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть G – монолитическая группа с неабелевым монолитом P . Тогда группа G является B -базисной, причем максимальная B -подформация $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F} = BF(G)$ имеет внутренний спутник h такой, что $h(A) = \text{form}(G/P)$ для $A \in K(P)$, $h(A) = \text{form}(G/O_{A'}(G))$ для всех $A \in (K(G) \setminus \mathfrak{U}) \setminus K(P)$, $h(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G))$ для всех $A \in K(G) \cap \mathfrak{U}$ и $h(A) = \emptyset$, если $A \in \mathfrak{I} \setminus K(G)$.

ЛЕММА 4. Пусть $G = [P]H$ – монолитическая группа с монолитом $P = O_p(G)$, где $Z_p \in \Omega$, H – f -базисная группа и $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация из $\text{form } H$. Тогда группа G является ΩB -базисной, причем максимальная ΩB -подформация $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F} = \Omega BF(G)$ имеет внутренний Ω -спутник h такой, что $h(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G))$, $h(Z_p) = \mathfrak{M}$, $h(A) = \text{form}(G/O_{A'}(G))$ для всех $A \in (\Omega \setminus \mathfrak{U}) \cap K(G)$, $h(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G))$ для всех $A \in (\Omega \cap \mathfrak{U} \cap K(G)) \setminus (Z_p)$ и $h(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – минимальный Ω -спутник формации $\mathfrak{F}$, h – ΩF -функция, описанная в формулировке леммы, $\mathfrak{H} = \Omega BF(h)$. Согласно теореме 5 из [9] $f(A) = h(A)$ для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus (Z_p))$ и $f(Z_p) = \text{form}(G/O_{Z_p', Z_p}(G)) = \text{form}(G/O_{Z_p}(G)) = \text{form } H$. Покажем, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $M \in \mathfrak{M}$. Тогда $M \in \mathfrak{F}$ и $M/O_{A'}(M) \in f(A) = h(A)$ для любого $A \in (\Omega \setminus \mathfrak{U}) \cap K(M)$, $M/O_{A',A}(M) \in f(A) = h(A)$ для любого $A \in (\Omega \cap \mathfrak{U} \cap K(M)) \setminus (Z_p)$, $M/O_\Omega(M) \in f(\Omega') = h(\Omega')$ и в случае $Z_p \in K(M)$ справедливо $M/O_{Z_p', Z_p}(M) \in \mathfrak{M} = h(Z_p)$. Таким образом, $M \in \Omega BF(h) = \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$.

Покажем, что $H \in \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{X}$ – множество всех тех собственных секций группы H , которые принадлежат $\text{form } H$. Поскольку H – формационно критическая группа, то $H \notin \text{form } \mathfrak{X}$ и $\text{form } \mathfrak{X} \subset \text{form } H$. Тогда $\text{form } \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Согласно лемме 4.13 из [14, гл. II] группа H монолитична. Пусть Q – монолит группы H . По лемме 3.9 из [11] $O_p(H) = 1$ и, значит, $Q \notin \mathfrak{N}_p$. Пусть $K(Q) = (C) \subseteq \Omega$. Тогда $Q \subseteq O_C(H)$ и $H/O_C(H) \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Поскольку $H \in \mathfrak{F}$ и $h(C) = f(C)$, то $H/O_{C'}(H) \in h(C)$ для неабелевой группы C и $H/O_{C',C}(H) \in h(C)$ для абелевой группы C . Отсюда по лемме 2 из [10] получаем, что $H \in \mathfrak{H}$. Пусть $C \notin \Omega$. Тогда $Q \subseteq O_{\Omega'}(H)$ и, значит, $H/O_{\Omega'}(H) \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Так как $H/O_\Omega(H) \in f(\Omega') = h(\Omega')$, то согласно лемме 2 из [10] $H \in \mathfrak{H}$.

Покажем, что h является внутренним Ω -спутником формации $\mathfrak{H}$. Поскольку $P \subseteq O_\Omega(G)$, то $h(\Omega') = \text{form}(G/O_\Omega(G)) = \text{form}((G/P)/(O_\Omega(G)/P)) \subseteq \text{form } H \subseteq \mathfrak{H}$. Далее, $h(Z_p) = \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $A \in (\Omega \setminus \mathfrak{U}) \cap K(G)$. Тогда из $P \in \mathfrak{G}_{A'}$ получим

$$h(A) = \text{form}(G/O_{A'}(G)) = \text{form}((G/P)/(O_{A'}(G)/P)) \subseteq \text{form } H \subseteq \mathfrak{H}.$$

Если $A \in (\Omega \cap \mathfrak{U} \cap K(G)) \setminus (Z_p)$, то из $P \in \mathfrak{G}_{A'} \mathfrak{G}_A$ имеем

$$h(A) = \text{form}((G/P)/(O_{A',A}(G)/P)) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Следовательно, Ω -спутник h формации $\mathfrak{H}$ является внутренним.

Покажем, что $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная ΩB -подформация из $\mathfrak{F}$. Из строения Ω -спутника h следует, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{B}$ – собственная ΩB -подформация из $\mathfrak{F}$, b – ее минимальный Ω -спутник. Согласно следствию 5.1 из [9] $b \leq f$. Тогда для всех $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus (Z_p))$ выполнено $b(A) \subseteq f(A) = h(A)$. Предположим, что $b(Z_p) = f(Z_p)$. Тогда $G/O_{Z_p', Z_p}(G) = G/O_{Z_p}(G) \in b(Z_p)$ и ввиду леммы 9 из [10] $G \in \mathfrak{G}_{Z_p} b(Z_p) \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Поэтому $b(Z_p) \subset f(Z_p) = \text{form } H$ и по условию $b(Z_p) \subseteq \mathfrak{M} = h(Z_p)$. Таким образом, $b \leq h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная ΩB -подформация из $\mathfrak{F}$. По теореме 53.44 из [16] группа G является критической, а значит, и формационно критической. Тем самым, установлено, что G – ΩB -базисная группа. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть $G = [P]H$ – монолитическая группа с монолитом $P = O_p(G)$, где H – f -базисная группа и $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация из $\text{form } H$. Тогда группа G является B -базисной, причем максимальная B -подформация $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F} = BF(G)$ имеет внутренний спутник h такой, что $h(Z_p) = \mathfrak{M}$, $h(A) = \text{form}(G/O_{A'}(G))$ для всех $A \in K(G) \setminus \mathfrak{U}$, $h(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G))$ для всех $A \in (\mathfrak{U} \cap K(G)) \setminus (Z_p)$ и $h(A) = \emptyset$, если $A \in \mathfrak{I} \setminus K(G)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая ΩB -формация, h – ее максимальный внутренний Ω -спутник. ΩB -формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega B}$ -критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \Omega BF(G)$, где G – ΩB -базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ такая, что выполняется одно из следующих условий:

- 1) $G = P$ – группа простого порядка p такого, что $Z_p \in \Omega$;
- 2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p -группа, $Z_p \in \Omega$, H – f -базисная группа с монолитом $Q = H^{h(Z_p)}$ и максимальная подформация из $\text{form } H$ содержится в $h(Z_p)$;
- 3) P – неабелева группа, $K(P) = (A) \subseteq \Omega$ и $P = G^{h(A)}$;
- 4) G – f -базисная группа, $K(P) \not\subseteq \Omega$, $P = G^{h(\Omega')}$ и максимальная подформация из $\text{form } G$ содержится в $h(\Omega')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть f – минимальный Ω -спутник ΩB -формации $\mathfrak{F}$. По теореме 3 $\mathfrak{F} = \Omega BF(G)$, где G – монолитическая группа из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем при $K(P) = (A) \subseteq \Omega$ формация $f(A)$ является $h(A)$ -критической, а при $K(P) \not\subseteq \Omega$ формация $f(\Omega')$ является $h(\Omega')$ -критической. По теореме 5 из [9] $f(\Omega') = \text{form}(G/O_{\Omega}(G))$, $f(A) = \text{form}(G/O_{A'}(G))$ для всех $A \in (\Omega \setminus \mathfrak{U}) \cap K(G)$, $f(A) = \text{form}(G/O_{A',A}(G))$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{U} \cap K(G)$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$. По теореме 3 из [10] $h(A) = \mathfrak{H}$ для любого $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \setminus \mathfrak{U})$ и $h(A) = \mathfrak{G}_A h_1(A)$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{U}$, где h_1 – произвольный внутренний Ω -спутник формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $K(P) = (A) \subseteq \Omega$. Если A – неабелева группа, то $h(A) = \mathfrak{H}$ и $P = G^{\mathfrak{H}} = G^{h(A)}$. По лемме 3 группа G является ΩB -базисной и $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3).

Рассмотрим случай, когда $A \cong Z_p$. Пусть $Z_p \notin K(\mathfrak{H})$. Так как $Z_p \in K(G)$, то $f(Z_p) \neq \emptyset$ и ввиду леммы 9 из [10] $P \in \mathfrak{G}_{Z_p} f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\Omega BF(P) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\Omega BF(P) \subset \mathfrak{F}$, то $\Omega Bf(P) \subseteq \mathfrak{H}$ и $Z_p \in K(\mathfrak{H})$, что невозможно. Поэтому $\Omega BF(P) = \mathfrak{F}$, и можем считать, что $G = P$. Согласно следствию 51.34 из [16] группа P является формационно критической. Кроме того, $\mathfrak{F} = \Omega BF(P) = \mathfrak{N}_p$ имеет единственную максимальную ΩB -подформацию (1). Таким образом, $G = P$ – ΩB -базисная группа и формация $\mathfrak{F}$ в этом случае удовлетворяет условию 1).

Пусть теперь $Z_p \in K(\mathfrak{H})$ и H – группа наименьшего порядка из $f(Z_p) \setminus h(Z_p)$. Тогда группа H монолитична с монолитом $Q = H^{h(Z_p)}$. Если $Q \in \mathfrak{N}_p$, то $H \in \mathfrak{G}_{Z_p} h(Z_p) = h(Z_p)$, что невозможно. Следовательно, $O_p(H) = 1$ и по лемме 18.8 из [12] существует точный неприводимый $F_p[H]$ -модуль K . Пусть $T = [K]H$. Тогда T монолитична с монолитом $K = C_T(K)$. Ввиду теоремы 53.44 из [16] T является формационно критической группой. По лемме 9 из [10] $T \in \mathfrak{G}_{Z_p} f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\Omega BF(T) \subseteq \mathfrak{F}$. Кроме того, $O_{Z_{p'}, Z_p}(T) = O_{Z_p}(T) = K$. Если $T \in \mathfrak{H}$, то $H \cong T/O_{Z_{p'}, Z_p}(T) \in h(Z_p)$, что невозможно. Поэтому $T \notin \mathfrak{H}$ и в качестве группы G можно выбрать группу T . Тогда $f(Z_p) = \text{form}(T/O_{Z_{p'}, Z_p}(T)) = \text{form } H$. Покажем, что H – f -базисная группа. Пусть $\mathfrak{X}$ – множество всех тех собственных секций группы H , которые лежат в $f(Z_p) = \text{form } H$.

В силу выбора H получаем $\mathfrak{X} \subseteq h(Z_p)$. Поэтому $H \notin \text{form } \mathfrak{X}$ и, значит, H является формационно критической группой. Согласно лемме 3.3 из [12] формация $\text{form } H$ обладает максимальными подформациями. Допустим, что $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ – различные максимальные подформации из $\text{form } H = f(Z_p)$. Тогда $\mathfrak{M}_1 \subseteq h(Z_p)$ и $\mathfrak{M}_2 \subseteq h(Z_p)$, а значит, и $f(Z_p) \subseteq h(Z_p)$. Противоречие. Следовательно, формация $f(Z_p) = \text{form } H$ обладает единственной максимальной подформацией $\mathfrak{M}$, причем $\mathfrak{M} \subseteq h(Z_p)$. Тем самым, установлено, что H является f -базисной группой. По лемме 4 T – ΩB -базисная группа и, значит, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2).

Пусть $K(P) \not\subseteq \Omega$. Тогда $f(\Omega') = \text{form } G$, $h(\Omega') = \mathfrak{H}$ и, значит, формация $f(\Omega')$ является $\mathfrak{H}$ -критической. Пусть S – группа минимального порядка из $f(\Omega') \setminus \mathfrak{H}$. Тогда группа S монолитична с монолитом $R = S^{\mathfrak{H}} = S^{h(\Omega')}$ и $f(\Omega') = \text{form } S$. Так как $f(\Omega') \subseteq \mathfrak{F}$, то $S \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Из $\Omega BF(S) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\Omega BF(S) \not\subseteq \mathfrak{H}$ получаем $\mathfrak{F} = \Omega BF(S)$, и поэтому в качестве G можно выбрать группу S . Кроме того, можем считать, что $K(R) \not\subseteq \Omega$. Как и при доказательстве теоремы 2, нетрудно показать, что S – f -базисная группа и единственная максимальная подформация из $\text{form } S$ содержится в $h(\Omega')$. Ввиду теоремы 5 и следствия 5.1 из [9] формация $\mathfrak{F} = \Omega BF(S)$ содержит лишь конечное множество ΩB -подформаций. Допустим, что $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – различные максимальные ΩB -подформации из $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{H}$, а значит, и $\mathfrak{F} = \Omega BF(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) \subseteq \mathfrak{H}$, что невозможно. Поэтому $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$ и S является ΩB -базисной группой. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 4).

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega BF(G)$, где G – ΩB -базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, типа 1)–4).

Пусть G – группа типа 1). В этом случае собственными ΩB -подформациями формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_P$ являются лишь (1) и $\emptyset$. Следовательно, формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega B}$ -критической.

Пусть теперь G – группа типа 2). Поскольку группа G монолитична, то $O_{Z_p', Z_p}(G) = P$ и $f(Z_p) = \text{form } H$. Из $H^{h(Z_p)} = Q \neq 1$ следует, что $H \notin h(Z_p)$, и поэтому $f(Z_p) \not\subseteq h(Z_p)$. Так как единственная максимальная подформация из $f(Z_p)$ содержится в $h(Z_p)$, то формация $f(Z_p)$ является $h(Z_p)$ -критической и по теореме 3 $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_{\Omega B}$ -критическая формация.

Пусть теперь G – группа типа 3) и $A \in K(P)$. Поскольку $G^{h(A)} \neq 1$, то $f(A) = \text{form } G \not\subseteq h(A)$. Согласно лемме 18.2 из [12] $\text{form}(G/P) = \text{form}(G/G^{h(A)})$ – единственная максимальная подформация из $f(A)$. Таким образом, формация $f(A)$ является $h(A)$ -критической и по теореме 3 $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_{\Omega B}$ -критическая формация.

Если G – группа типа 4), то, как при доказательстве теоремы 2, заключаем, что $f(\Omega') = h(\Omega')$ -критическая формация, и согласно теореме 3 формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\Omega B}$ -критической. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая B -формация, h – ее максимальный внутренний спутник. B -формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_B$ -критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = BF(G)$, где G – B -базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ такая, что выполняется одно из следующих условий:

- 1) $G = P$ – группа простого порядка;
- 2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p -группа, H – f -базисная группа с монолитом $Q = H^{h(Z_p)}$ и максимальная подформация из $\text{form } H$ содержится в $h(Z_p)$;
- 3) P – неабелева группа и $P = G^{h(A)}$ для $A \in K(P)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шеметков Л. А. Экраны ступенчатых формаций // Тр. VI Всесоюзного симпозиума по теории групп. Киев: Наукова думка, 1980. С. 37–50.
- [2] Скиба А. Н. О критических формациях // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: ИМ АН Украины, 1993. С. 250–268.
- [3] Ведерников В. А., Сорокина М. М. Композиционные и локальные наследственные критические формации // Ред. Сиб. матем. ж. Деп. ВИНТИ 08.01.98 № 25-В98. Новосибирск, 1998. С. 1–19.
- [4] Сорокина М. М. О композиционных и локальных критических формациях // Изв. вузов. Матем. 2000. № 7. С. 1–8.
- [5] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. тр. 1999. Т. 2. № 2. С. 114–137.
- [6] Ведерников В. А., Коптюх Д. Г. Частично композиционные формации групп. Препринт № 2. Брянск: БГПУ, 1999.
- [7] Селькин В. М., Скиба А. Н. О $\mathfrak{H}\Theta\omega$ -критических формациях // Вопросы алгебры. Вып. 14. Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1999. С. 127–131.
- [8] Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω -веерные формации и классы Фиттинга конечных групп. Препринт № 6. Брянск: БГПУ, 1999.
- [9] Ведерников В. А., Сорокина М. М. Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. Препринт № 5. Брянск: БГПУ, 1999.
- [10] Ведерников В. А. Максимальные спутники Ω -расслоенных формаций и классов Фиттинга. Препринт № 1. М.: МГПУ, 2001.
- [11] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
- [12] Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
- [13] Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.
- [14] Ведерников В. А. Элементы теории классов групп. Смоленск: СГПИ, 1988.
- [15] Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
- [16] Нейман Х. Многообразия групп. М.: Мир, 1969.