Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Фаддеев, Р. Г. Штеренберг, О подобии некоторых дифференциальных операторов самосопряженным, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 2, 292–302

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm423>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:21:43

УДК 517.948

О ПОДОБИИ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ САМОСОПРЯЖЕННЫМ

М. М. Фаддеев, Р. Г. Штеренберг

Работа посвящена исследованию задачи о подобии самосопряженному оператору операторов вида $L = -\frac{\operatorname{sign} x}{|x|^\alpha p(x)} \frac{d^2}{dx^2}$, $\alpha > -1$, в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ с весом $|x|^\alpha p(x)$. Известен положительный ответ в данной задаче в случае $p(x) \equiv 1$, полученный на основе тонких методов теории гильбертовых пространств с индефинитной метрикой. Использование общего критерия подобия в сочетании с методами теории возмущений дифференциальных операторов позволяет обобщить данный результат на значительно более широкий класс весовых функций $p(x)$.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Говорят, что *оператор L подобен самосопряженному*, если существуют самосопряженный оператор A и ограниченный, ограниченно обратимый оператор X такие, что $L = X^{-1}AX$. В настоящей работе мы рассматриваем вопрос о подобии некоторых дифференциальных операторов самосопряженным. Именно, будут получены результаты о подобии самосопряженным операторов вида

$$L = -\frac{\operatorname{sign} x}{|x|^\alpha p(x)} \frac{d^2}{dx^2}, \quad \alpha > -1, \quad 0 < c < p(x) < C < +\infty,$$

рассматриваемых в пространстве функций, квадратично суммируемых на оси с весом $p(x)|x|^\alpha$, на естественной области определения $\mathcal{D}(L)$, состоящей из тех функций $f \in L_2(p(x)|x|^\alpha, \mathbb{R})$, которые абсолютно непрерывны вместе со своими первыми производными, причем $Lf \in L_2(p(x)|x|^\alpha, \mathbb{R})$. Случаю $p(x) \equiv 1$ посвящена работа [1], в которой доказательство подобия было проведено с использованием методов теории гильбертовых пространств с индефинитной метрикой (см., например, [2]). Случаю $\alpha = 0$ посвящена работа авторов [3], в которой рассматриваются возмущения операторов рассматриваемого вида быстро убывающим потенциалом. В работе [4] рассматривается задача о подобии самосопряженному для операторов вида $-(\operatorname{sign} x)p(d^2/dx^2)$, где p – полином.

Интерес к операторам указанного вида определяется тем, что известные достаточные (а для диссипативных операторов – и необходимые) условия подобия самосопряженным, выражаемые в терминах характеристической функции оператора (см. [5]–[7]), для данных операторов не выполняются, несмотря на то, что данные операторы имеют только абсолютно непрерывный спектр. Затруднительно в данной задаче использовать

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-15-96103 и № 00-01-00479.

и технику доказательства ограниченности спектральных проекторов оператора, удобную для рассмотрения вопроса о подобии самосопряженному оператору дифференциальных операторов с быстро убывающим не вещественным потенциалом.

Наши рассуждения будут опираться на общий интегрально-резольвентный критерий подобия (см. [8], [9]), который заключается в том, что *оператор L в гильбертовом пространстве H подобен самосопряженному оператору тогда и только тогда, когда его спектр вещественен и выполнены оценки*

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \|(L - z)^{-1}u\|^2 d\xi &\leq C\|u\|^2, \\ \sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \|(L^* - z)^{-1}u\|^2 d\xi &\leq C\|u\|^2, \quad z = \xi + i\varepsilon, \quad u \in H. \end{aligned} \quad (1)$$

Удобство использования этого критерия обусловлено тем, что исследуемые операторы представляют собой вполне самосопряженные расширения симметричных операторов с совпадающими индексами дефекта равными 2. Тем самым, как и при исследовании вопроса подобия самосопряженному оператору конечномерных возмущений оператора умножения на независимую переменную (операторов модели Фридрихса, см., например, [9]), оказывается возможным провести требуемую оценку резольвенты исследуемого оператора.

2. Случай “чисто степенного” веса. Здесь мы, используя критерий (1), докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1 (Фляйге, Найман [1]). *Оператор*

$$L_0 = -\frac{\operatorname{sign} x}{|x|^\alpha} \frac{d^2}{dx^2}, \quad \alpha > -1,$$

рассматриваемый в пространстве $L_2(|x|^\alpha, \mathbb{R})$ на естественной области определения $\mathcal{D}(L_0)$, состоящей из локально абсолютно непрерывных вместе со своими первыми производными функций f , для которых $f, L_0 f \in L_2(|x|^\alpha, \mathbb{R})$, подобен самосопряженному.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Суть доказательства состоит в том, что действие резольвенты исследуемого оператора L_0 мы сведем к действию резольвент некоторых вспомогательных самосопряженных операторов, для которых оценки (2), очевидно, выполнены.

Итак, введем в рассмотрение следующие самосопряженные операторы:

$$L_1 = \frac{1}{|x|^\alpha} \frac{d^2}{dx^2}, \quad L_2 = -\frac{1}{|x|^\alpha} \frac{d^2}{dx^2}, \quad L_3 = -\frac{1}{|x|^\alpha} \frac{d}{dx} \operatorname{sign} x \frac{d}{dx}$$

с естественными областями определения. Для того чтобы выписать действие их резольвент и резольвенты оператора L_0 , рассмотрим функции $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ такие, что

$$\begin{aligned} L_1 \varphi_1(x, \tilde{\varrho}) &= \lambda \varphi_1(x, \tilde{\varrho}), & L_1 \psi_1(x, \tilde{\varrho}) &= \lambda \psi_1(x, \tilde{\varrho}), \\ \varphi_1(x) &\overset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} 0, & \psi_1(x) &\overset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0, & \tilde{\varrho}^2 &= \lambda, \quad \operatorname{Re} \tilde{\varrho} > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} L_2 \varphi_2(x, \varrho) &= \lambda \varphi_2(x, \varrho), & L_2 \psi_2(x, \varrho) &= \lambda \psi_2(x, \varrho), \\ \varphi_2(x) &\overset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} 0, & \psi_2(x) &\overset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0, & \varrho^2 &= \lambda, \quad \operatorname{Im} \varrho > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку весовая функция $|x|^\alpha$ является четной, то выполнены равенства

$$\varphi_1(x) = \psi_1(-x), \quad \varphi_2(x) = \psi_2(-x). \quad (4)$$

Кроме того, известно, что

$$\psi_1(x, \tilde{\varrho}) \sim \frac{1}{((\tilde{\varrho}^2/(2+\alpha)x)^{|\alpha|/4} + 1)^{\operatorname{sign} \alpha}} \exp\left\{-\tilde{\varrho} \frac{1}{\alpha/2 + 1} x^{\alpha/2+1}\right\}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (5)$$

$$\psi_2(x, \varrho) \sim \frac{1}{((\varrho^2/(2+\alpha)x)^{|\alpha|/4} + 1)^{\operatorname{sign} \alpha}} \exp\left\{i\varrho \frac{1}{\alpha/2 + 1} x^{\alpha/2+1}\right\}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

Также легко показать, что два линейно независимых решения дифференциального уравнения $L_2 y(x) = y(x)$ представимы абсолютно сходящимися рядами

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k(2+\alpha)}, \quad y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k x^{k(2+\alpha)+1}, \quad x \geq 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} C_0 &\neq 0, \quad D_0 \neq 0, \\ C_k &= \frac{(-1)^k C_0}{k!(2+\alpha)^{2k}} \frac{\Gamma(1 - 1/(2+\alpha))}{\Gamma(k+1 - 1/(2+\alpha))}, \\ D_k &= \frac{(-1)^k D_0}{k!(2+\alpha)^{2k}} \frac{\Gamma(1 + 1/(2+\alpha))}{\Gamma(k+1 + 1/(2+\alpha))}, \end{aligned} \quad k \geq 1. \quad (8)$$

Рассмотрим, кроме того, функции $\varphi(x)$ и $\varphi_3(x)$, удовлетворяющие уравнениям $L_0 \varphi(x) = \lambda \varphi(x)$, $L_3 \varphi_3(x) = \lambda \varphi_3(x)$ и совпадающие на отрицательной полуоси $\mathbb{R}_-$ с функцией $\varphi_1(x)$. Так как оператор L_2 , будучи самосопряженным, не имеет невещественных собственных значений, то функции $\varphi_2(x)$ и $\psi_2(x)$ линейно независимы. Поэтому на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$

$$\varphi(x) = A\varphi_2(x) + B\psi_2(x) \quad \text{и} \quad \varphi_3(x) = A_3\varphi_2(x) + B_3\psi_2(x), \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0, \quad (9)$$

где константы A, B, A_3, B_3 определяются из условий сшивки согласно включениям $\varphi \in \mathcal{D}(L_0)$, $\varphi_3 \in \mathcal{D}(L_3)$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{W}{W_2}, \quad B = \frac{1}{W_2} (\varphi_2(0)\varphi'_1(0) - \varphi'_2(0)\varphi_1(0)), \\ A_3 &= \frac{W_3}{W_2}, \quad B_3 = -\frac{1}{W_2} (\varphi_1(0)\varphi'_2(0) + \varphi'_1(0)\varphi_2(0)); \end{aligned} \quad (10)$$

здесь мы используем обозначения

$$W = \varphi_1(0)\psi'_2(0) - \varphi'_1(0)\psi_2(0) = \varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x), \quad (11)$$

$$W_3 = \varphi_1(0)\psi'_2(0) + \varphi'_1(0)\psi_2(0) = \operatorname{sign} x (\varphi_3(x)\psi'_3(x) - \varphi'_3(x)\psi_3(x)), \quad (12)$$

$$W_2 = \varphi_2(0)\psi'_2(0) - \varphi'_2(0)\psi_2(0) = \varphi_2(x)\psi'_2(x) - \varphi'_2(x)\psi_2(x). \quad (13)$$

Аналогично, функции $\psi(x), \psi_3(x)$, удовлетворяющие уравнениям $L_0\psi(x) = \lambda\psi(x)$, $L_3\psi_3(x) = \lambda\psi_3(x)$ и совпадающие на $\mathbb{R}_+$ с функцией $\psi_2(x)$, определяются на $\mathbb{R}_-$ формулами

$$\psi(x) = C\varphi_1(x) + D\psi_1(x) \quad \text{и} \quad \psi_3(x) = C_3\varphi_1(x) + D_3\psi_1(x), \quad \text{Im } \lambda \neq 0, \quad (14)$$

$$C = \frac{1}{W_1}(\psi_2(0)\psi_1'(0) - \psi_2'(0)\psi_1(0)), \quad D = \frac{W}{W_1}, \quad (15)$$

$$C_3 = \frac{1}{W_1}(\psi_1(0)\psi_2'(0) + \psi_1'(0)\psi_2(0)), \quad D_3 = -\frac{W_3}{W_1}, \quad (16)$$

$$W_1 = \varphi_1(0)\psi_1'(0) - \varphi_1'(0)\psi_1(0) = \varphi_1(x)\psi_1'(x) - \varphi_1'(x)\psi_1(x). \quad (16)$$

Как легко теперь видеть, резольвенты рассматриваемых операторов могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} [(L_1 - \lambda)^{-1}u](x) &= \frac{1}{W_1} \left(\psi_1(x) \int_{-\infty}^x |y|^\alpha \varphi_1(y) u(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \varphi_1(x) \int_x^\infty |y|^\alpha \psi_1(y) u(y) dy \right), \quad \text{Im } \lambda \neq 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} [(L_2 - \lambda)^{-1}u](x) &= -\frac{1}{W_2} \left(\psi_2(x) \int_{-\infty}^x |y|^\alpha \varphi_2(y) u(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \varphi_2(x) \int_x^\infty |y|^\alpha \psi_2(y) u(y) dy \right), \quad \text{Im } \lambda \neq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} [(L_3 - \lambda)^{-1}u](x) &= -\frac{\text{sign } x}{W_3} \left(\psi_3(x) \int_{-\infty}^x \text{sign } y \cdot |y|^\alpha \varphi_3(y) u(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \varphi_3(x) \int_x^\infty \text{sign } y \cdot |y|^\alpha \psi_3(y) u(y) dy \right), \quad \lambda : \{\text{Im } \lambda \neq 0, W_3(\varrho, \tilde{\varrho}) \neq 0\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} [(L_0 - \lambda)^{-1}u](x) &= -\frac{1}{W} \left(\psi(x) \int_{-\infty}^x \text{sign } y \cdot |y|^\alpha \varphi(y) u(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \varphi(x) \int_x^\infty \text{sign } y \cdot |y|^\alpha \psi(y) u(y) dy \right), \quad \lambda : \{\text{Im } \lambda \neq 0, W(\varrho, \tilde{\varrho}) \neq 0\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Воспользуемся интегрально-резольвентным критерием подобия (1). Так как операторы L_1, L_2, L_3 самосопряженные, то для них оценки (1) справедливы. Рассматривая действие резольвент (17)–(20) на функциях с носителями, сосредоточенными на полуосях $\mathbb{R}_\pm$, и принимая во внимание только что сделанное замечание, нетрудно установить, что для подобия оператора L_0 самосопряженному достаточно проверить выполнение оценок

$$\left| \frac{W_3}{W} \right| \leq C', \quad \left| \frac{BW_3}{B_3W} \right| \leq C', \quad \left| \frac{CW_3}{C_3W} \right| \leq C', \quad \text{Im } \varrho \geq 0, \quad \text{Re } \varrho \geq 0, \quad \tilde{\varrho} = \varrho, \quad (21)$$

с некоторой константой C' .

В самом деле, оценки (21) обеспечивают для оператора L_0 справедливость первого из неравенств (1); для доказательства второго неравенства достаточно заметить, что резольвента сопряженного оператора определяется формулой (20) (см. также (9)–(16)), где константы A, B, C, D берутся с противоположным знаком.

Равенства (4), (10)–(12) и (15) показывают, что условие (21) эквивалентно неравенству

$$\frac{|\psi_1(0)\psi_2'(0) - \psi_1'(0)\psi_2(0)|}{|\psi_1(0)\psi_2'(0) + \psi_1'(0)\psi_2(0)|} \leq \text{Const}, \quad \text{Im } \varrho \geq 0, \quad \text{Re } \varrho \geq 0, \quad \tilde{\varrho} = \varrho.$$

Теперь утверждение теоремы 1 вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 2. *В условиях теоремы 1 справедливы равенства*

$$\frac{\psi_1(0)\psi_2'(0) - \psi_1'(0)\psi_2(0)}{\psi_1(0)\psi_2'(0) + \psi_1'(0)\psi_2(0)} = \frac{1 - \exp\{i\pi/(2 + \alpha)\}}{1 + \exp\{i\pi/(2 + \alpha)\}}, \quad \text{Im } \varrho \geq 0, \quad \text{Re } \varrho \geq 0, \quad \tilde{\varrho} = \varrho, \quad (22)$$

$$\frac{\psi_1(0)\psi_2'(0) - \psi_1'(0)\psi_2(0)}{\psi_1(0)\psi_2'(0) + \psi_1'(0)\psi_2(0)} = \frac{1 - \exp\{-i\pi/(2 + \alpha)\}}{1 + \exp\{-i\pi/(2 + \alpha)\}}, \quad \text{Im } \varrho \geq 0, \quad \text{Re } \varrho \leq 0, \quad \tilde{\varrho} = -\varrho. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\psi_2(x)$ удовлетворяет при $x \geq 0$ дифференциальному уравнению $\psi_2''(x) = -\lambda x^\alpha \psi_2(x)$, и, следовательно, мы можем рассматривать $\psi_2(z, \varrho)$ как аналитическое решение уравнения $\psi_2''(z) = -\lambda z^\alpha \psi_2(z)$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом, проходящим по отрицательной полуоси $\mathbb{R}_-$. Аналогично, функция $\psi_1(z, \tilde{\varrho})$ удовлетворяет уравнению $\psi_1''(z) = \lambda z^\alpha \psi_1(z)$, или после замены переменной $z \mapsto \exp\{-i\pi/(2 + \alpha)\}z$

$$\psi_1''\left(\exp\left\{-i\frac{\pi}{2 + \alpha}\right\}z\right) = -\lambda z^\alpha \psi_1\left(\exp\left\{-i\frac{\pi}{2 + \alpha}\right\}z\right).$$

Известно, что формула (6) определяет асимптотику решения $\psi_2(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ во всем секторе убывания, содержащем $\mathbb{R}_+$. Легко видеть, что в области $\{\text{Im } \varrho > 0, \text{Re } \varrho > 0, \tilde{\varrho} = \varrho\}$ луч $z = \exp\{i\pi/(2 + \alpha)\}r, r \geq 0$, попадает в данный сектор. Таким образом, функция $\psi_2(z)$ одновременно с $\psi_1(\exp\{-i\pi/(2 + \alpha)\}z)$ убывает в направлении рассматриваемого луча. Поскольку линейно независимое с $\psi_2(z)$ решение имеет здесь растущую асимптотику

$$y(z) \sim \frac{1}{((\varrho^2/(2 + \alpha)z)|^{\alpha/4} + 1)^{\text{sign } \alpha}} \exp\left\{-i\varrho \frac{1}{\alpha/2 + 1} z^{\alpha/2 + 1}\right\}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (24)$$

то из предыдущих рассуждений вытекает равенство

$$\psi_2(z) = \psi_1\left(\exp\left\{-i\frac{\pi}{2 + \alpha}\right\}z\right). \quad (25)$$

Отметим, что $\psi_1(0) \neq 0$ и $\psi_1'(0) \neq 0$, если $\text{Re } \tilde{\varrho} > 0$. В самом деле, если верно обратное, то один из отрицательных операторов, заданных в пространстве $L_2(x^\alpha, \mathbb{R}_+)$ дифференциальным выражением

$$D = \frac{1}{x^\alpha} \frac{d^2}{dx^2}$$

на области определения, состоящей из абсолютно непрерывных вместе со своими первыми производными функций $f(x)$ таких, что $f, Df \in L_2(x^\alpha, \mathbb{R}_+)$, и удовлетворяющих либо условию типа Дирихле $f(0) = 0$, либо условию типа Неймана $f'(0) = 0$, имеет собственное значение $\lambda = \tilde{\varrho}^2$, и мы приходим к противоречию.

Теперь из равенства (25) и только что доказанного утверждения легко следует тождество (22). Чтобы получить (23), необходимо в приведенном выше построении вместо замены переменных $z \mapsto \exp\{-i\pi/(2 + \alpha)\}z$ осуществить замену $z \mapsto \exp\{+i\pi/(2 + \alpha)\}z$.

Таким образом, лемма 2, а с ней и теорема 1 полностью доказаны.

3. Общий случай. Перейдем теперь к рассмотрению оператора

$$L = -\frac{\operatorname{sign} x}{|x|^\alpha p(x)} \frac{d^2}{dx^2}$$

на уже описанной во введении естественной области определения $\mathcal{D}(L)$ в пространстве $L_2(p(x)|x|^\alpha, \mathbb{R})$. Основной результат настоящей работы заключается в справедливости следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha > -1$. Предположим, что весовая функция $p(x)$ абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной и удовлетворяет двусторонней оценке $0 < c \leq p(x) \leq C < +\infty$. Предположим также, что выполнены следующие условия:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|^\alpha |p(x) - 1|}{(|x|^{\alpha/2} + 1)^{\operatorname{sign} \alpha}} dx < \infty, \quad (26)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|3(u''(x))^2/2u'(x) - u'''(x)|}{(u'(x))^2(|u(x)|^{\alpha/2} + 1)^{\operatorname{sign} \alpha}} dx < \infty, \quad (27)$$

где

$$u(x) = \operatorname{sign} x \left(\left(\frac{\alpha}{2} + 1 \right) \int_0^x \sqrt{p(y)} |y|^{\alpha/2} dy \right)^{1/(\alpha/2+1)}. \quad (28)$$

Тогда оператор L подобен самосопряженному оператору.

Выполнение условий (26) и (27), как будет видно из доказательства, позволит нам для анализа оператора L , с учетом полученного результата для оператора L_0 , реализовать схему исследования, аналогичную применяемой при рассмотрении операторов Шрёдингера с убывающим потенциалом [10]–[13]. Сами же эти условия выполняются в достаточно широком классе весовых функций $p(x)$, к примеру, для любой гладкой функции, равной 1 тождественно в некоторой окрестности бесконечности или достаточно быстро стремящейся к 1 на $\pm\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательству теоремы предположим несколько лемм.

ЛЕММА 4. Оператор L не имеет не вещественных собственных значений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и по ходу доказательства теоремы 1, мы введем в рассмотрение вспомогательные самосопряженные операторы L_1^p, L_2^p, L_3^p и решения соответствующих дифференциальных уравнений. Итак, рассмотрим операторы

$$L_1^p = \frac{1}{|x|^\alpha p(x)} \frac{d^2}{dx^2}, \quad L_2^p = -\frac{1}{|x|^\alpha p(x)} \frac{d^2}{dx^2}, \quad L_3^p = -\frac{1}{|x|^\alpha p(x)} \frac{d}{dx} \operatorname{sign} x \frac{d}{dx}$$

с естественными областями определения в пространстве $L_2(|x|^\alpha p(x), \mathbb{R})$ и функции $\varphi_{1,2}^p$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} L_1^p \varphi_1^p(x, \tilde{\varrho}) &= \lambda \varphi_1^p(x, \tilde{\varrho}), & L_1^p \psi_1^p(x, \tilde{\varrho}) &= \lambda \psi_1^p(x, \tilde{\varrho}), \\ \varphi_1^p(x) &\overset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} 0, & \psi_1^p(x) &\overset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0, & \tilde{\varrho}^2 &= \lambda, \quad \operatorname{Re} \tilde{\varrho} > 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} L_2^p \varphi_2^p(x, \varrho) &= \lambda \varphi_2^p(x, \varrho), & L_2^p \psi_2^p(x, \varrho) &= \lambda \psi_2^p(x, \varrho), \\ \varphi_2^p(x) &\overset{x \rightarrow -\infty}{\rightarrow} 0, & \psi_2^p(x) &\overset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0, & \varrho^2 &= \lambda, \quad \operatorname{Im} \varrho > 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Рассмотрим также функцию Грина дифференциального оператора L_2 (см. формулы (7)):

$$G(x, z, \varrho) = (y_1(\varrho^{2/(2+\alpha)} z) y_2(\varrho^{2/(2+\alpha)} x) - y_1(\varrho^{2/(2+\alpha)} x) y_2(\varrho^{2/(2+\alpha)} z)) \varrho^{-2/(2+\alpha)},$$

$$C_0 = D_0 = 1. \quad (31)$$

Легко видеть, что $\psi_2^p(x, \varrho)$ является решением интегрального уравнения

$$\psi_2^p(x, \varrho) = \psi_2(x, \varrho) + \int_x^{+\infty} |z|^\alpha G(x, z, \varrho) \varrho^2 (p(z) - 1) \psi_2^p(z, \varrho) dz, \quad (32)$$

где $\psi_2(x, \varrho)$ определяется формулами (3), (6).

Используя формулы (6), (7), (24) и учитывая специфику операторов L_1 и L_2 относительно замены $x \mapsto \varrho^{2/(2+\alpha)} x$, нетрудно для $x \geq 0$, $\operatorname{Im} \varrho \geq 0$ получить оценки

$$|\psi_2(x, \varrho)| \leq \frac{C}{(|\varrho^{2/(2+\alpha)} x|^{\alpha/4} + 1)^{\operatorname{sign} \alpha}} \exp \left\{ -\operatorname{Im} \varrho \frac{1}{\alpha/2 + 1} x^{\alpha/2+1} \right\}, \quad (33)$$

$$|y(x, \varrho)| \leq \frac{C}{(|\varrho^{2/(2+\alpha)} x|^{\alpha/4} + 1)^{\operatorname{sign} \alpha}} \exp \left\{ +\operatorname{Im} \varrho \frac{1}{\alpha/2 + 1} x^{\alpha/2+1} \right\}, \quad (34)$$

$$y_1(x, \varrho) = \gamma_1 \psi_2(x, \varrho) + \gamma_2 y(x, \varrho), \quad y_2(x, \varrho) = \gamma_3 \psi_2(x, \varrho) + \gamma_4 y(x, \varrho), \quad (35)$$

где $\{\gamma_i\}_{i=1}^4$ – некоторые не зависящие от x и ϱ константы.

Теперь из формулы (32) при условии (26) стандартными рассуждениями (см., например, [11]–[13]) получаем аналитичность функции ψ_2^p по ϱ в области $\operatorname{Im} \varrho > 0$, непрерывность вплоть до границы и оценки ($\operatorname{Im} \varrho \geq 0$):

$$|\psi_2^p(x, \varrho)| \leq \frac{C}{(|\varrho^{2/(2+\alpha)} x|^{\alpha/4} + 1)^{\operatorname{sign} \alpha}} \exp \left\{ -\operatorname{Im} \varrho \frac{1}{\alpha/2 + 1} x^{\alpha/2+1} \right\}, \quad x \geq 0, \quad (36)$$

$$\psi_2^p(x, \varrho) = (1 + o(1)) \frac{1}{(\varrho^{2/(2+\alpha)} x)^{\alpha/4}} \exp \left\{ i \varrho \frac{1}{\alpha/2 + 1} x^{\alpha/2+1} \right\}, \quad (37)$$

$$(\psi_2^p)'(x, \varrho) = (1 + o(1)) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(\varrho^{2/(2+\alpha)} x)^{\alpha/4}} \exp \left\{ i \varrho \frac{1}{\alpha/2 + 1} x^{\alpha/2+1} \right\} \right), \quad (38)$$

$$x \rightarrow +\infty, \quad \varrho \neq 0,$$

$$\psi_2^p(x, \varrho) = \psi_2(x, \varrho) + o(1), \quad \varrho \rightarrow 0, \quad x \geq 0, \quad (39)$$

$$(\psi_2^p)'(x, \varrho) = \psi_2'(x, \varrho) + o(\varrho^{2/(2+\alpha)}), \quad \varrho \rightarrow 0, \quad x \geq 0. \quad (40)$$

Аналогичные оценки могут быть выписаны и для $\varphi_2^p(x, \varrho)$, $\varphi_1^p(x, \tilde{\varrho})$, $\psi_1^p(x, \tilde{\varrho})$.

Очевидно, что величина $\lambda = \xi \pm i\varepsilon = \varrho^2$, $\varepsilon > 0$, является собственным значением оператора L тогда и только тогда, когда $W^p(\varrho, \tilde{\varrho} = \pm \varrho) = 0$. Пусть теперь λ – собственное значение. Поскольку $\psi_2^p(0) \varphi_1^p(0) \neq 0$ (так как задачи Дирихле и Неймана на полуосях $\mathbb{R}_\pm$ для самосопряженных операторов L_1^p и L_2^p не имеют невещественных собственных значений), то $\alpha_+ = \alpha_-$, где $\alpha_+ := (\psi_2^p)'(0)/\psi_2^p(0)$, $\alpha_- := (\varphi_1^p)'(0)/\varphi_1^p(0)$. Далее,

$$\lambda \int_0^\infty |x|^\alpha |\psi_2^p(x)|^2 dx = - \int_0^\infty (\psi_2^p)''(x) \overline{(\psi_2^p)}(x) dx = \alpha_+ |\psi_2^p(0)|^2 + \int_0^\infty |(\psi_2^p)'(x)|^2 dx,$$

$$\lambda \int_{-\infty}^0 |x|^\alpha |\varphi_1^p(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^0 (\varphi_1^p)''(x) \overline{(\varphi_1^p)}(x) dx = \alpha_- |\varphi_1^p(0)|^2 - \int_{-\infty}^0 |(\varphi_1^p)'(x)|^2 dx.$$

Теперь, выражая α_+ и α_- и приравнявая вещественные и мнимые части, нетрудно прийти к противоречию, что и доказывает лемму.

Таким образом, $W^p(\varrho) \neq 0$ в области $\{\operatorname{Im} \varrho > 0, \operatorname{Re} \varrho > 0\}$. Покажем, что аналогичное утверждение справедливо для функций $C_3^p(\varrho)$ и $B_3^p(\varrho)$ (определяемых так же, как и C_3, B_3 ; см. (10), (15)). В самом деле, как легко видеть, нули функции $C_3^p(\varrho)$ в рассматриваемой области определяют по формуле $\lambda = \varrho^2$ собственные значения оператора L' :

$$L' = -\frac{\operatorname{sign} x}{|x|^\alpha q(x)} \frac{d^2}{dx^2}, \quad \text{где } q(x) = p(x), x \geq 0, \quad q(x) = p(-x), x < 0,$$

что противоречит лемме 4. Построения для функции $B_3^p(\varrho)$ вполне аналогичны.

Заметим далее, что аналогично соотношениям (35) имеет место равенство

$$\psi_2(x, \varrho) = \delta_1 y_1(x, \varrho) + \delta_2 y_2(x, \varrho), \quad (41)$$

где $\{\delta_i\}_{i=1}^2$ — не зависящие от x и ϱ константы (данное утверждение может служить дополнением к равенствам (22), (23)). Более того, $\delta_1 \cdot \delta_2 \neq 0$, так как в противном случае либо задача Дирихле, либо задача Неймана на полуоси $\mathbb{R}_+$ для самосопряженного оператора L_2^p имела бы невещественные собственные значения. Таким образом, оценки (39), (40) могут быть переписаны в виде

$$\psi_2^p(x, \varrho) = \psi_2(x, \varrho)(1 + o(1)), \quad |\varrho| \rightarrow 0, \quad \operatorname{Im} \varrho \geq 0, \quad x \geq 0, \quad (42)$$

$$(\psi_2^p)'(x, \varrho) = \psi_2'(x, \varrho)(1 + o(1)), \quad |\varrho| \rightarrow 0, \quad \operatorname{Im} \varrho \geq 0, \quad x \geq 0. \quad (43)$$

ЛЕММА 5. При условии (26) на любом компакте в области $\{\operatorname{Re} \varrho \geq 0, \operatorname{Im} \varrho \geq 0\}$ выполнены оценки

$$\left| \frac{W_3^p(\varrho)}{W^p(\varrho)} \right| \leq C', \quad \left| \frac{B_3^p(\varrho)}{B_3^p(\varrho)} \right| \leq C', \quad \left| \frac{C_3^p(\varrho)}{C_3^p(\varrho)} \right| \leq C'. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое неравенство. С учетом леммы 4 нам достаточно показать выполнение соответствующей оценки в окрестности $\varrho = 0$ и неравенство

$$W^p(\varrho) \neq 0, \quad \varrho \in \{\mathbb{R}_+ \cup i\mathbb{R}_+\} \setminus \{0\}. \quad (45)$$

Справедливость оценки в окрестности нуля с очевидностью следует из равенств (3), (22), асимптотик (42), (43) и аналогичных выражений для φ_1^p .

Чтобы получить неравенство (45), достаточно заметить, что $\varphi_1^p(x, \varrho) = \overline{(\varphi_1^p)}(x, \varrho)$ для $\varrho \in \mathbb{R}_+$ и $\psi_2^p(x, \varrho) = (-1)^{\alpha/(2(2+\alpha))} \overline{(\psi_2^p)}(x, \varrho)$ для $\varrho \in i\mathbb{R}_+$. Теперь из (36)–(38), (41) и аналогичных оценок для φ_1^p легко вывести неравенство

$$|\operatorname{Im} W^p(\varrho)| \geq \gamma |\varrho|^{2/(2+\alpha)}, \quad \gamma > 0, \quad \varrho \in \{\mathbb{R}_+ \cup i\mathbb{R}_+\},$$

что и доказывает требуемое утверждение.

Второе и третье неравенства (44) можно доказывать подобными же рассуждениями или воспользоваться построениями, осуществленными при доказательстве леммы 4.

Сделаем теперь следующее преобразование исходного уравнения:

$$\pm \frac{1}{|x|^\alpha} y''_{xx}(x) = \lambda p(x) y(x) \mapsto \pm \frac{1}{|\xi|^\alpha} g''_{\xi\xi}(\xi) \mp q(\xi) g(\xi) = \lambda g(\xi),$$

$$y(x) = \frac{g(\xi)}{\sqrt{u'(x)}}, \quad \xi = u(x),$$

где $u(x)$ определяется формулой (28) и

$$q(\xi) = \left(\frac{3}{4} \frac{(u''(x))^2}{(u'(x))^4} - \frac{1}{2} \frac{u'''(x)}{(u'(x))^3} \right) \frac{1}{(u(x))^\alpha}, \quad x = x(\xi).$$

(Здесь мы предполагаем, что $\xi \rightarrow \pm\infty$, когда $x \rightarrow \pm\infty$. Заметим, что в условиях теоремы 3 это выполнено автоматически.) Легко видеть, что условие (27) эквивалентно неравенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\xi|^\alpha |q(\xi)|}{(|\xi|^{\alpha/2} + 1)^{\text{sign } \alpha}} d\xi < \infty. \quad (46)$$

Теперь уже нетрудно проверить, что решение интегрального уравнения

$$g_1(\xi, \varrho) = \psi_2(\xi, \varrho) - \int_{\xi}^{+\infty} |t|^\alpha G(\xi, t, \varrho) q(t) g_1(t, \varrho) dt, \quad (47)$$

где $\psi_2(\xi, \varrho)$ и $G(\xi, t, \varrho)$ те же, что и раньше, обладает асимптотиками

$$g_1(\xi, \varrho) = \frac{1}{(\varrho^{2/(2+\alpha)} \xi)^{\alpha/4}} \exp \left\{ i \varrho \frac{1}{\alpha/2 + 1} \xi^{\alpha/2+1} \right\} (1 + o(1)), \quad (48)$$

$$x \rightarrow +\infty, \quad \text{Im } \varrho \geq 0, \quad \varrho \neq 0,$$

$$g_1(\xi, \varrho) = \psi_2(\xi, \varrho) (1 + o(1)), \quad |\varrho| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \varrho \geq 0, \quad \xi \geq 0, \quad (49)$$

$$g'_1(\xi, \varrho) = \psi'_2(\xi, \varrho) (1 + o(1)), \quad |\varrho| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \varrho \geq 0, \quad \xi \geq 0. \quad (50)$$

Кроме того, очевидно, что функция

$$\tilde{\psi}_2^p(x, \varrho) \equiv \frac{1}{\sqrt{u'(x)}} g_1(u(x), \varrho) \quad (51)$$

является решением исходного уравнения $L_2^p y = \lambda y$. Заметим также, что асимптотики двух решений: $\tilde{\psi}_2^p(x, \varrho)$ и $\psi_2^p(x, \varrho)$, $x \rightarrow +\infty$ (см. (28), (37), (48), (51)), являются экспоненциально убывающими, когда $\text{Im } \varrho > 0$. Таким образом, учитывая единственность решения с экспоненциально убывающей асимптотикой, мы приходим к равенству

$$\psi_2^p(x, \varrho) = C(\varrho) \tilde{\psi}_2^p(x, \varrho), \quad \text{Im } \varrho > 0, \quad (52)$$

где $C(\varrho)$ – некоторая локально ограниченная, не имеющая нулей функция от ϱ в области $\text{Im } \varrho > 0$.

ЛЕММА 6. В условиях теоремы 3 неравенства (44) справедливы во всей области $\{\text{Im } \varrho \geq 0, \text{ Re } \varrho \geq 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом леммы 5, а также замечания относительно второго и третьего неравенств (44) для доказательства леммы 6 нам достаточно получить оценку

$$\left| \frac{W_3^p(\varrho)}{W^p(\varrho)} \right| \leq C', \quad |\varrho| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} \varrho \geq 0, \quad \operatorname{Re} \varrho \geq 0. \quad (53)$$

Последнее легко следует из предыдущих построений. Действительно, равенство (52) совместно с (49)–(51) дает асимптотики

$$\psi_2^p(x, \varrho) = C(\varrho) \frac{1}{(u'(x))^{1/2}} \psi_2(u(x), \varrho) (1 + o(1)), \quad |\varrho| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} \varrho > 0, \quad x \geq 0, \quad (54)$$

$$(\psi_2^p)'(x, \varrho) = C(\varrho) \left((u'(x))^{1/2} \frac{d}{d\xi} \psi_2(\xi, \varrho) - \frac{1}{2} \frac{u''(x)}{(u'(x))^{3/2}} \psi_2(u(x), \varrho) \right) (1 + o(1)), \quad (55)$$

$$|\varrho| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} \varrho > 0, \quad x \geq 0.$$

Полагая в формулах (54), (55) $x = +0$ и учитывая, что $\xi(+0) \equiv u(+0) = 0$ (см. (28)), получаем

$$\psi_2^p(0, \varrho) = C(\varrho) \frac{1}{(u'(+0))^{1/2}} \psi_2(0, \varrho) (1 + o(1)), \quad |\varrho| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} \varrho > 0, \quad (56)$$

$$(\psi_2^p)'(0, \varrho) = C(\varrho) \left((u'(+0))^{1/2} \psi_2'(0, \varrho) - \frac{1}{2} \frac{u''(+0)}{(u'(+0))^{3/2}} \psi_2(0, \varrho) \right) (1 + o(1)), \quad (57)$$

$$|\varrho| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} \varrho > 0.$$

Аналогично можно получить

$$\varphi_1^p(0, \tilde{\varrho}) = C'(\tilde{\varrho}) \frac{1}{(u'(-0))^{1/2}} \varphi_1(0, \tilde{\varrho}) (1 + o(1)), \quad |\tilde{\varrho}| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} \tilde{\varrho} > 0, \quad (58)$$

$$(\varphi_1^p)'(0, \tilde{\varrho}) = C'(\tilde{\varrho}) \left((u'(-0))^{1/2} \varphi_1'(0, \tilde{\varrho}) - \frac{1}{2} \frac{u''(-0)}{(u'(-0))^{3/2}} \varphi_1(0, \tilde{\varrho}) \right) (1 + o(1)), \quad (59)$$

$$|\tilde{\varrho}| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} \tilde{\varrho} > 0,$$

где $C'(\tilde{\varrho})$ – локально ограниченная, не имеющая нулей функция от $\tilde{\varrho}$ в области $\operatorname{Re} \tilde{\varrho} > 0$.

Заметим, что $u'(+0) = u'(-0) \neq 0$, если $p(+0) = p(-0) \neq 0$, и, следовательно (см. (6), (41)),

$$W^p(\varrho) = C(\varrho) C'(\varrho) W(\varrho) (1 + o(1)), \quad |\varrho| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} \varrho > 0, \quad \operatorname{Re} \varrho > 0, \quad (60)$$

$$W_3^p(\varrho) = C(\varrho) C'(\varrho) W_3(\varrho) (1 + o(1)), \quad |\varrho| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} \varrho > 0, \quad \operatorname{Re} \varrho > 0. \quad (61)$$

Теперь утверждение леммы 6 немедленно следует из формул (3), (22), (60), (61) и непрерывности функции $W_3^p(\varrho)/W^p(\varrho)$ в области $\{\operatorname{Im} \varrho \geq 0, \operatorname{Re} \varrho \geq 0, \varrho \neq 0\}$ (см. формулу (45) и рассуждения, предшествующие лемме 5).

Нам осталось лишь заметить, что рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 1, показывают, что для подобия оператора L самосопряженному оператору достаточно выполнения оценок (44) в области $\{\operatorname{Im} \varrho \geq 0, \operatorname{Re} \varrho \geq 0\}$. Таким образом, применение леммы 6 и завершает доказательство теоремы 3.

Заметим, что условия теоремы 3 могут быть ослаблены. Именно, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\alpha > -1$, $0 < c \leq p(x) \leq C < \infty$; $p(x), p'(x)$ – локально абсолютно непрерывны на $\mathbb{R}_{\pm}$ и выполнены условия

$$\int_0^{+\infty} \frac{|x|^{\alpha}|p(x) - c_+|}{(|x|^{\alpha/2} + 1)^{\operatorname{sign} \alpha}} dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{|x|^{\alpha}|p(x) - c_-|}{(|x|^{\alpha/2} + 1)^{\operatorname{sign} \alpha}} dx < \infty,$$

где $c_- > 0$, $c_+ > 0$, и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|3(u''(x))^2/2u'(x) - u'''(x)|}{(u'(x))^2(|u(x)|^{\alpha/2} + 1)^{\operatorname{sign} \alpha}} dx < \infty,$$

где $u(x)$ определяется формулой (28). Тогда оператор L подобен самосопряженному оператору.

Доказательство теоремы 7 вполне аналогично предыдущим построениям и требует лишь несколько более тщательного анализа.

В заключение авторы выражают свою благодарность С.Н. Набоко за внимание к работе и В.В. Капустину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fleige A., Najman B. Nonsingularity of critical points of some differential and difference operators // Operators Theories: Advances and Appl. 1998. V. 106. P. 147–155.
- [2] Langer H. Spectral function of definitizable operators in Krein spaces // Functional Analysis. Proceedings (Dubrovnik 1981). Lecture Notes in Math. V. 948. Berlin: Springer Verlag, 1982. P. 1–46.
- [3] Фаддеев М.М., Штеренберг Р.Г. О подобии некоторых сингулярных дифференциальных операторов самосопряженным // Исследования по линейным операторам и теории функций. 28 (Записки научных семинаров ПОМИ. Т. 270). Сб. работ под ред. С.В. Кислякова. СПб.: ПОМИ РАН, 2000. С. 336–349.
- [4] Карабаш И.М. О J -самосопряженных дифференциальных операторах, подобных самосопряженным // Матем. заметки. 2000. Т. 68. №6. С. 943–944.
- [5] Маламуд М.М. О подобии треугольного оператора диагональному // Исследования по линейным операторам и теории функций. 28 (Записки научных семинаров ПОМИ. Т. 270). Сб. работ под ред. С.В. Кислякова. СПб.: ПОМИ РАН, 2000. С. 201–241.
- [6] Сахнович Л.А. Неунитарные операторы с абсолютно непрерывным спектром // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. №1. С. 52–64.
- [7] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
- [8] Van Casteren J. Operators similar to unitary or self-adjoint ones // Pacific J. Math. 1983. V. 104. P. 241–255.
- [9] Набоко С.Н. Об условиях подобия унитарным и самосопряженным операторам // Функцион. анализ и его прилож. 1984. Т. 18. №1. С. 16–27.
- [10] Агранович З.С., Марченко В.А. Обратная задача теории рассеяния. Харьков, 1960.
- [11] Блашак В.В. О разложении по главным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на всей оси // Докл. АН УРСР. 1965. №4. С. 416–419.
- [12] Блашак В.В. О дифференциальном операторе второго порядка на всей оси со спектральными особенностями // Докл. АН УРСР. 1966. №1. С. 38–41.
- [13] Лянце В.Э. О несамосопряженном дифференциальном операторе второго порядка на полуоси // Докл. АН СССР. 1964. Т. 154. №5. С. 1030–1033.