Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Третьяченко, В. В. Чистяков, Принцип выбора для поточно ограниченных последовательностей функций, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 3, 428–439

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4230>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 10:10:07

Принцип выбора для поточечно ограниченных последовательностей функций

Ю. В. Третьяченко, В. В. Чистяков

Для числа $\varepsilon > 0$ и вещественной функции f на отрезке $[a, b]$ обозначим через $N(\varepsilon, f, [a, b])$ супремум множества тех номеров n , для которых в $[a, b]$ существует набор неналегающих отрезков $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, таких, что $|f(a_i) - f(b_i)| > \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, n$ ($\sup \emptyset = 0$). Доказана следующая теорема: *если $\{f_j\}$ – поточечно ограниченная последовательность вещественных функций на отрезке $[a, b]$ такая, что $n(\varepsilon) \equiv \limsup_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [a, b]) < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$, то $\{f_j\}$ содержит подпоследовательность, которая всюду на $[a, b]$ сходится к некоторой функции f такой, что $N(\varepsilon, f, [a, b]) \leq n(\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$* . Показано, что основное условие в этой теореме, связанное с верхним пределом, необходимо для равномерно сходящейся последовательности $\{f_j\}$ и “почти” необходимо для всюду сходящейся последовательности измеримых функций и что многие поточечные принципы выбора, обобщающие классическую теорему Хелли, вытекают из этой теоремы, а также приводятся примеры, иллюстрирующие ее точность.

Библиография: 16 названий.

1. Основные результаты. Цель настоящей заметки – представить новое достаточное условие на поточечно ограниченную последовательность вещественных функций $\{f_j\} \equiv \{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ на отрезке $[a, b]$ вещественной прямой $\mathbb{R}$, при котором эта последовательность имеет сходящуюся всюду на $[a, b]$ подпоследовательность. Наш основной результат, теорема 1, содержит в качестве частных случаев и классические принципы выбора Хелли для монотонных функций и функций ограниченной вариации по Жордану ([1; гл. VIII, § 4]) и, как будет показано в п. 4, большинство их обобщений ([2; часть III, § 2], [3]–[9] и ссылки в этих работах). Отметим, что теорема 1 остается справедливой для поточечно относительно компактной последовательности функций $\{f_j\}$, действующих из непустого подмножества $\mathbb{R}$ в метрическое пространство. Однако для того, чтобы представить идеи в наиболее простой форме и иметь возможность сравнения с другими принципами выбора, в этой работе рассматриваются только вещественные функции на отрезке $[a, b]$.

Для числа $\varepsilon > 0$ и функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ определим величину

$$N(\varepsilon, f, [a, b]) \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

как супремум множества тех номеров $n \in \mathbb{N}$, для которых в $[a, b]$ существует набор неналегающих отрезков $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, таких, что $|f(a_i) - f(b_i)| > \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, n$ (с соглашением о том, что $\sup \emptyset = 0$). Одним из известных свойств этой величины является следующее (теорема 2.1 в [2; часть III]): функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет односторонние конечные левый и правый пределы во всех точках отрезка $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $N(\varepsilon, f, [a, b]) < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$; в этом случае функция f ограничена.

Основной результат работы – другое применение определенной выше величины $N(\varepsilon, f, [a, b])$ – это следующий *поточечный принцип выбора*.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{f_j\}$ – поточечно ограниченная последовательность вещественных функций на отрезке $[a, b]$ такая, что

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [a, b]) < \infty \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \quad (1)$$

Тогда $\{f_j\}$ содержит подпоследовательность, которая всюду на $[a, b]$ сходится к некоторой функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $N(\varepsilon, f, [a, b])$ не превосходит верхнего предела в (1) при любом $\varepsilon > 0$.

Интересно отметить, что как и ранее найденное в [7; теорема 2] и [10; лемма 4] условие (9), приводимое в п. 4.4, предположение (1) теоремы 1, является необходимым для равномерно сходящейся последовательности $\{f_j\}$ и “почти” необходимым для (почти) всюду сходящейся последовательности $\{f_j\}$ измеримых функций – это установлено в следующей ниже теореме 2. Однако предположения в большинстве известных принципов выбора (ср. с пп. 4.1–4.3 и 4.5) не являются необходимыми.

Заметим, что понятие величины $N(\varepsilon, f, E)$ для функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ можно определить на любом множестве $\emptyset \neq E \subset [a, b]$, если дополнительно считать, что концы a_i и b_i неналегающих отрезков $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, упомянутых ранее, лежат в E .

ТЕОРЕМА 2. (а) Если последовательность $\{f_j\}$ вещественных функций сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $N(\varepsilon, f, [a, b]) < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$, то выполнено условие (1), а точнее,

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [a, b]) \leq \lim_{\delta \rightarrow \varepsilon = 0} N(\delta, f, [a, b]) \quad \text{для всех } \varepsilon > 0.$$

(б) Если последовательность вещественных измеримых функций $\{f_j\}$ сходится на $[a, b]$ всюду (или почти всюду) к некоторой функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей для всех $\varepsilon > 0$ условию $N(\varepsilon, f, [a, b]) < \infty$, то для каждого $\eta > 0$ в $[a, b]$ найдется измеримое по Лебегу множество E_η , мера которого не превосходит η , такое, что

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [a, b] \setminus E_\eta) < \infty \quad \text{для всех } \varepsilon > 0.$$

Эти теоремы будут доказаны в следующем пункте. В п. 3 точность условий теорем 1 и 2 иллюстрируется примерами. В последнем п. 4 приводится сравнение теоремы 1 с наиболее известными к настоящему времени поточечными принципами выбора, обобщающими теорему Хелли.

2. Доказательство основных теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. 1. Покажем, что существует подпоследовательность в $\{f_j\}$, снова обозначаемая через $\{f_j\}$, и для любого $k \in \mathbb{N}$ существует неубывающая ограниченная функция $n_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} N(1/k, f_j, [a, t]) = n_k(t) \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N} \text{ и } t \in [a, b]. \quad (2)$$

Прежде всего заметим, что в силу условия (1) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие номера $M(\varepsilon), j_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $N(\varepsilon, f_j, [a, b]) \leq M(\varepsilon)$ для всех $j \geq j_0(\varepsilon)$. Последовательность

$$\{t \mapsto N(1, f_j, [a, t])\}_{j \geq j_0(1)},$$

состоящая из неубывающих функций, равномерно ограничена на $[a, b]$ постоянной $M(1)$. По принципу выбора Хелли для монотонных функций в последовательности $\{f_j\}_{j \geq j_0(1)}$, и, тем самым, в исходной последовательности $\{f_j\}$, найдется подпоследовательность $\{f_{J_1(j)}\}_{j=1}^\infty$ (здесь последовательность $J_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, также, как и встречающиеся ниже подобные ей последовательности J_k при $k \geq 2$, является строго возрастающей) такая, что $N(1, f_{J_1(j)}, [a, t])$ сходится при $j \rightarrow \infty$ к $n_1(t)$ для всех $t \in [a, b]$, где $n_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{N}$ – некоторая неубывающая ограниченная функция. Выберем наименьший номер $j_1 \in \mathbb{N}$ такой, что $J_1(j_1) \geq j_0(1/2)$. Тогда последовательность неубывающих функций

$$\{t \mapsto N(1/2, f_{J_1(j)}, [a, t])\}_{j \geq j_1}$$

равномерно ограничена на $[a, b]$ постоянной $M(1/2)$. Снова применяя принцип выбора Хелли, в $\{f_{J_1(j)}\}_{j \geq j_1}$ найдем подпоследовательность $\{f_{J_2(j)}\}_{j=1}^\infty$ такую, что $N(1/2, f_{J_2(j)}, [a, t])$ сходится при $j \rightarrow \infty$ к $n_2(t)$ для всех $t \in [a, b]$, где $n_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{N}$ – также неубывающая ограниченная функция. Выберем минимальный номер $j_2 \in \mathbb{N}$ такой, что $J_2(j_2) \geq j_0(1/3)$. Теперь по индукции предположим, что для номера $k \geq 3$ подпоследовательность $\{f_{J_{k-1}(j)}\}_{j=1}^\infty$ в исходной последовательности $\{f_j\}$ и наименьший номер $j_{k-1} \in \mathbb{N}$ такой, что $J_{k-1}(j_{k-1}) \geq j_0(1/k)$, уже выбраны. Применим теорему Хелли к последовательности неубывающих функций

$$\{t \mapsto N(1/k, f_{J_{k-1}(j)}, [a, t])\}_{j \geq j_{k-1}},$$

которая равномерно ограничена на $[a, b]$ постоянной $M(1/k)$: существуют подпоследовательность $\{f_{J_k(j)}\}_{j=1}^\infty$ последовательности $\{f_{J_{k-1}(j)}\}_{j \geq j_{k-1}}$ и неубывающая ограниченная функция $n_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что $N(1/k, f_{J_k(j)}, [a, t])$ сходится при $j \rightarrow \infty$ к $n_k(t)$ для всех $t \in [a, b]$. Замечая, что при любом $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{f_{J_j(j)}\}_{j \geq k}$ является подпоследовательностью в $\{f_{J_k(j)}\}_{j=1}^\infty$, в силу приведенных рассуждений найдем, что диагональная последовательность $\{f_{J_j(j)}\}_{j=1}^\infty$, снова обозначаемая через $\{f_j\}$, удовлетворяет условию (2).

2. При любом $k \in \mathbb{N}$ множество $S_k \subset [a, b]$ точек разрыва монотонной функции n_k не более чем счетно. Положим $S = ([a, b] \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{k=1}^\infty S_k$, где $\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел. Тогда S – счетное всюду плотное подмножество $[a, b]$ такое, что

$$\text{функция } n_k \text{ непрерывна на } [a, b] \setminus S \text{ при любом } k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Поскольку последовательность $\{f_j\}$ поточечно ограничена и S счетно, без ограничения общности предполагаем (при необходимости переходя к подпоследовательности в $\{f_j\}$ при помощи стандартного диагонального процесса), что при каждом $s \in S$ последовательность $\{f_j(s)\}$ сходится в $\mathbb{R}$ при $j \rightarrow \infty$ к некоторой точке, обозначаемой через $f(s)$.

Покажем теперь, что последовательность $\{f_j(t)\}$ фундаментальна в любой точке $t \in [a, b] \setminus S$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем и зафиксируем номер $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $1/k \leq \varepsilon/3$. Так как в силу (3) t есть точка непрерывности функции n_k и S всюду плотно в $[a, b]$, найдется точка $s = s(k, t) \in S$, таким образом зависящая лишь от ε , такая, что $n_k(t) = n_k(s)$. Пусть для определенности $s < t$ (случай, когда $t < s$, аналогичен). Используя (2), выберем номера $J_1 = J_1(k, t), J_2 = J_2(k, s) \in \mathbb{N}$, также зависящие лишь от ε , такие, что $N(1/k, f_j, [a, t]) = n_k(t)$ для всех $j \geq J_1$ и $N(1/k, f_j, [a, s]) = n_k(s)$ для всех $j \geq J_2$. Тогда при $j \geq \max\{J_1, J_2\}$ получим, что

$$N\left(\frac{1}{k}, f_j, [s, t]\right) \leq N\left(\frac{1}{k}, f_j, [a, t]\right) - N\left(\frac{1}{k}, f_j, [a, s]\right) = n_k(t) - n_k(s) = 0,$$

откуда $N(1/k, f_j, [s, t]) = 0$, что благодаря определению величины слева в последнем равенстве означает, в частности, что $|f_j(s) - f_j(t)| \leq 1/k \leq \varepsilon/3$. Поскольку последовательность $\{f_j(s)\}$ сходится, она фундаментальна, поэтому существует номер $J_3 = J_3(\varepsilon, s) \in \mathbb{N}$ такой, что $|f_j(s) - f_l(s)| \leq \varepsilon/3$ для всех $j, l \geq J_3$. Следовательно, номер $J = \max\{J_1, J_2, J_3\}$ зависит только от ε , и для всех $j, l \geq J$ находим, что

$$|f_j(t) - f_l(t)| \leq |f_j(t) - f_j(s)| + |f_j(s) - f_l(s)| + |f_l(s) - f_l(t)| \leq \varepsilon.$$

Из фундаментальности последовательности $\{f_j(t)\}$ вытекает ее сходимость. Обозначим предел этой последовательности через $f(t)$. Тем самым определена функция $f: [a, b] = S \cup ([a, b] \setminus S) \rightarrow \mathbb{R}$, к которой всюду на $[a, b]$ сходится последовательность $\{f_j\}$, являющаяся подпоследовательностью исходной последовательности $\{f_j\}$. Осталось заметить, что

$$N(\varepsilon, f, [a, b]) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [a, b]) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [a, b]) \quad (4)$$

для всех $\varepsilon > 0$, и установить здесь неравенство слева.

Для этого без ограничения общности считаем, что $N(\varepsilon, f, [a, b]) > 0$. Достаточно показать, что если номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что в $[a, b]$ найдутся непересекающиеся отрезки $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, для которых $|f(a_i) - f(b_i)| > \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, n$, то

$$n \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [a, b]).$$

Для любого числа $\varepsilon' = \varepsilon'(n)$ со свойством $\min_{1 \leq i \leq n} |f(a_i) - f(b_i)| > \varepsilon' > \varepsilon$ в силу сходимости всюду на $[a, b]$ f_j к f существует номер $J = J(n) \in \mathbb{N}$ такой, что значения $|f(a_i) - f_j(a_i)|$ и $|f_j(b_i) - f(b_i)|$ не превосходят $(\varepsilon' - \varepsilon)/2$ для всех $i = 1, \dots, n$ и $j \geq J$. Отсюда для этих же i и j найдем, что

$$\begin{aligned} \varepsilon' &< |f(a_i) - f(b_i)| \leq |f(a_i) - f_j(a_i)| + |f_j(a_i) - f_j(b_i)| + |f_j(b_i) - f(b_i)| \\ &\leq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2} + |f_j(a_i) - f_j(b_i)| + \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2} = |f_j(a_i) - f_j(b_i)| + \varepsilon' - \varepsilon, \end{aligned}$$

а потому, $|f_j(a_i) - f_j(b_i)| > \varepsilon$, $i = 1, \dots, n$. По определению $N(\varepsilon, f_j, [a, b])$ тогда имеем $n \leq N(\varepsilon, f_j, [a, b])$ для всех $j \geq J$ и, следовательно,

$$n \leq \inf_{j \geq J} N(\varepsilon, f_j, [a, b]) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [a, b]),$$

что завершает доказательство неравенства и вместе с ним теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. (а) По условию функция f ограничена (см. п. 1), а из равномерной сходимости $\{f_j\}$ к f вытекает, что

$$\sup_{s, t \in [a, b]} |(f_j - f)(s) - (f_j - f)(t)| \leq 2 \sup_{t \in [a, b]} |f_j(t) - f(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Кроме того, для любых $\varepsilon > 0$ и $j \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$N(\varepsilon, f_j, [a, b]) \leq N(\varepsilon - \delta, f_j - f, [a, b]) + N(\delta, f, [a, b]) \quad \text{для всех } 0 < \delta < \varepsilon. \quad (5)$$

Действительно, без потери общности считая, что левая часть неравенства в (5) больше нуля, предположим, что номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что существует набор $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, неналегающих отрезков в $[a, b]$, для которого $|f_j(a_i) - f_j(b_i)| > \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, n$. Поскольку для таких i имеем

$$\varepsilon < |f_j(a_i) - f_j(b_i)| \leq |(f_j - f)(a_i) - (f_j - f)(b_i)| + |f(a_i) - f(b_i)|,$$

то $|(f_j - f)(a_i) - (f_j - f)(b_i)| > \varepsilon - \delta$ или $|f(a_i) - f(b_i)| > \delta$; в первом случае отнесем индекс i к множеству $I_1 \subset \{1, \dots, n\}$, а во втором случае – к множеству $I_2 \subset \{1, \dots, n\}$, и обозначим через $|I_1|$ и $|I_2|$ количество (возможно нулевое) элементов соответственно в I_1 и I_2 . Ясно, что $|I_1| + |I_2| \geq n$. С другой стороны, из определения величины $N(\dots)$ в п. 1 следует, что

$$|I_1| \leq N(\varepsilon - \delta, f_j - f, [a, b]) \quad \text{и} \quad |I_2| \leq N(\delta, f, [a, b]).$$

Таким образом, $n \leq N(\varepsilon - \delta, f_j - f, [a, b]) + N(\delta, f, [a, b])$, откуда получаем (5) в силу произвольности упомянутых номеров n .

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ и $0 < \delta < \varepsilon$ произвольны. Найдется такой номер $J \in \mathbb{N}$, зависящий от ε и δ , что $|(f_j - f)(s) - (f_j - f)(t)| \leq \varepsilon - \delta$ для всех $s, t \in [a, b]$ и $j \geq J$. Отсюда по определению $N(\cdot)$ первое слагаемое справа в неравенстве (5) обращается в нуль и, значит, $N(\varepsilon, f_j, [a, b]) \leq N(\delta, f, [a, b])$ для всех $j \geq J$. Следовательно,

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [a, b]) \leq \sup_{j \geq J} N(\varepsilon, f_j, [a, b]) \leq N(\delta, f, [a, b]).$$

Осталось принять во внимание невозрастание функции $\delta \mapsto N(\delta, f, [a, b])$ и перейти к пределу в последнем неравенстве при $\delta \rightarrow \varepsilon - 0$.

(б) По теореме Егорова [1; гл. IV, §3] из сходимости (почти) всюду $\{f_j\}$ к f вытекает, что для любого $\eta > 0$ в $[a, b]$ существует такое измеримое множество E_η меры $\leq \eta$, что $\{f_j\}$ сходится к f на $[a, b] \setminus E_\eta$ равномерно. Заменяя в рассуждениях (а) отрезок $[a, b]$ на $[a, b] \setminus E_\eta$, придем к оценке

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [a, b] \setminus E_\eta) \leq \lim_{\delta \rightarrow \varepsilon - 0} N(\delta, f, [a, b] \setminus E_\eta) \leq \lim_{\delta \rightarrow \varepsilon - 0} N(\delta, f, [a, b]) < \infty$$

для любого $\varepsilon > 0$, что и требовалось установить.

3. Примеры. В этом разделе собраны некоторые примеры последовательностей функций $\{f_j\}$ на отрезке $[0, 1]$ (кроме пп. 3.2 и 3.4, где $[a, b] = [0, 2\pi]$), показывающие точность предположений и заключений теорем 1 и 2.

Поскольку колебание $\text{osc}(f, [a, b]) = \sup_{s, t \in [a, b]} |f(s) - f(t)|$ ограниченной функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ конечно, имеем: если $\text{osc}(f, [a, b]) = 0$, то f постоянна, откуда $N(\varepsilon, f, [a, b]) = 0$ для всех $\varepsilon > 0$, а если $\varepsilon \geq \text{osc}(f, [a, b]) > 0$, то $N(\varepsilon, f, [a, b]) = 0$ по определению. Поэтому ниже оценки для $N(\varepsilon, f, [a, b])$ будут выписываться только для случая, когда $0 < \varepsilon < \text{osc}(f, [a, b])$. Например, если $V_a^b(f)$ обозначает обычную вариацию по Жордану функции f на отрезке $[a, b]$ (см. также п. 4.1 при $\varphi(t, u) = u$), то

$$\text{osc}(f, [a, b]) \leq V_a^b(f) \quad \text{и} \quad N(\varepsilon, f, [a, b]) \leq \frac{1}{\varepsilon} V_a^b(f) \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon < \text{osc}(f, [a, b]). \quad (6)$$

3.1. Условие поточечной ограниченности $\{f_j\}$ в теореме 1 существенно: последовательность $f_j(t) = 0$ при $0 \leq t < 1$ и $f_j(1) = j$ не имеет всюду сходящейся подпоследовательности, однако, $N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) = 1$ при $0 < \varepsilon < j$, а потому

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) = 1 \quad \text{для всех} \quad \varepsilon > 0.$$

В то же время условие поточечной ограниченности не является необходимым: последовательность $f_j(t) = 0$ при $0 \leq t < 1$ и $f_j(1) = j^{(-1)^j}$ содержит всюду сходящуюся подпоследовательность, соответствующую нечетным номерам j , и является неограниченной в точке $t = 1$, причем, как и выше,

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) = 1 \quad \text{для всех} \quad \varepsilon > 0.$$

3.2. Без предположения (1) теорема 1 не имеет места. Действительно, известно, что последовательность $f_j(t) = \sin(jt)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, не имеет ни одной подпоследовательности, которая сходится всюду на $[0, 2\pi]$. С другой стороны, покажем, что

$$4j \leq N(\varepsilon, f_j, [0, 2\pi]) \leq \frac{4j}{\varepsilon} \quad \text{для всех} \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (7)$$

Поскольку $\text{osc}(f_j, [0, 2\pi]) = 2$ и $V_0^{2\pi}(f_j) = 4j$, в силу (6) при $0 < \varepsilon < 2$ получим неравенство справа. Пусть теперь $0 < \varepsilon < 1$. Для $j \in \mathbb{N}$ положим $t_i^j = \pi i / (2j)$, $i = 0, 1, \dots, 4j$, и $[a_i, b_i] = [t_{i-1}^j, t_i^j]$, $i = 1, \dots, 4j$. Тогда для всех $i = 1, \dots, 4j$ найдем, что

$$|f_j(a_i) - f_j(b_i)| = \left| \sin\left(\frac{\pi i}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi(i-1)}{2}\right) \right| = 1 > \varepsilon,$$

откуда по определению величины $N(\cdot)$ вытекает неравенство слева в (7), из которого следует, что $\limsup_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [0, 2\pi]) = \infty$ для всех $0 < \varepsilon < 1$.

3.3. Условие (1) не является необходимым, так что теорема 2, (а) нарушается для всюду сходящейся последовательности $\{f_j\}$. Пусть $\mathcal{D}$ есть функция Дирихле: $\mathcal{D}(t) = 1$ при $t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ и $\mathcal{D}(t) = 0$ при $t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. Тогда $N(\varepsilon, \mathcal{D}, [0, 1]) = \infty$ при $0 < \varepsilon < 1 = \text{osc}(\mathcal{D}, [0, 1])$. На $[0, 1]$ рассмотрим последовательность

$$f_j(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(j! \pi t))^{2m};$$

она принимает значение 1, если $j!t$ – целое число, и значение 0 в противном случае, а потому всюду на $[0, 1]$ сходится к функции Дирихле $\mathcal{D}$. Поскольку $\text{osc}(f_j, [0, 1]) = 1$ и $V_0^1(f_j) = 2 \cdot j!$, то $N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) = 2 \cdot j!$ при $0 < \varepsilon < 1$, так что

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) = \infty \quad \text{для всех } 0 < \varepsilon < 1.$$

Отметим, что здесь также показано, что для всюду сходящейся последовательности $\{f_j\}$ из условия $N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$ и $j \in \mathbb{N}$ не следует, что

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) < \infty \quad \text{для всех } \varepsilon > 0.$$

Кроме того, возможен случай, когда все функции f_j последовательности $\{f_j\}$ не удовлетворяют условию $N(\varepsilon, f_j, [a, b]) < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$, тогда как предельная функция f из теоремы 1 всегда этому условию удовлетворяет: последовательность $f_j(t) = \mathcal{D}(t)/j$ равномерно на $[0, 1]$ сходится к нулевой функции, $N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) = \infty$ при $0 < \varepsilon < 1/j = \text{osc}(f_j, [0, 1])$ и $N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) = 0$ для всех $\varepsilon > 0$ и $j \geq 1/\varepsilon$.

3.4. Другим примером всюду сходящейся (к нулю) последовательности $\{f_j\}$, для которой нарушается условие (1), служит пример из [10; пример 4]: положив $f_j(t) = \sin(j^2 t)$ при $0 \leq t \leq 2\pi/j$ и $f_j(t) = 0$ при $2\pi/j \leq t \leq 2\pi$, найдем, что выполняются неравенства (7).

3.5. Левый предел при $\delta \rightarrow \varepsilon - 0$ в неравенстве теоремы 2, (а) нельзя заменить выражением $N(\varepsilon, f, [a, b])$: последовательность $f_j(t) = 0$ при $0 \leq t < 1$ и $f_j(1) = 1 + (1/j)$ сходится равномерно на $[0, 1]$ к функции $f(t) = 0$ при $0 \leq t < 1$ и $f(1) = 1$, так что при $\varepsilon = 1$ имеем $N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) = 1$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $N(\delta, f, [0, 1]) = 1$ для всех $0 < \delta < \varepsilon$, тогда как $N(\varepsilon, f, [0, 1]) = 0$.

3.6. Для всюду сходящейся последовательности $\{f_j\}$ условие (1) может быть выполнено, а неравенство в теореме 2, (а) – нет: последовательность $f_j(t) = 1$ при $t = 1/(j+1)$ и $f_j(t) = 0$ при $t \neq 1/(j+1)$ сходится всюду на $[0, 1]$ к функции $f(0) = 1$ и $f(t) = 0$ при $0 < t \leq 1$, причем если $0 < \varepsilon < 1$, то $N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) = 2$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $N(\varepsilon, f, [0, 1]) = 1$.

3.7. Здесь приводится пример последовательности $\{f_j\}$ на $[0, 1]$, которая не ограничена равномерно и для которой применима теорема 1. Положим $f_j(t) = j$ при $t = 1/(j+1)$ и $f_j(t) = 0$ при $t \neq 1/(j+1)$. Тогда $\{f_j\}$ всюду сходится к $f \equiv 0$, поэтому $\{f_j\}$ поточечно ограничена; более того, $\{f_j(t)\} = \{0\}$ при $t \notin \{1/(k+1)\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\{f_j(t)\} = \{0, k\}$ при $t = 1/(k+1)$, $k \in \mathbb{N}$. Далее, $\text{osc}(f_j, [0, 1]) = j$ (стремится к бесконечности при $j \rightarrow \infty$) и в силу (6) $N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) = 2$ при $0 < \varepsilon < j$, откуда

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) = 2 \quad \text{для всех } \varepsilon > 0.$$

3.8. Существуют всюду сходящиеся к нулю последовательности $\{f_j\}$ (а потому, поточечно ограниченные), для которых нарушается условие (1) и

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \text{osc}(f_j, [0, 1]) = \infty.$$

Положим $f_j(t) = jt^j$ при $0 \leq t < 1$ и $f_j(1) = 0$. Тогда $\text{osc}(f_j, [0, 1]) = j$, $V_0^1(f_j) = 2j$ и, потому, в силу (6) $N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) \leq 2j/\varepsilon$ при $0 < \varepsilon < j$. Покажем, что

$$N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) \geq [j/(2\varepsilon)] \quad \text{при } j > 2\varepsilon$$

(здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа), откуда будет следовать, что

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) = \infty \quad \text{для всех } \varepsilon > 0.$$

Действительно, для $j > 2\varepsilon$ положим $t_i = (2i\varepsilon/j)^{1/j}$, $i = 0, 1, \dots, [j/(2\varepsilon)]$, и $[a_i, b_i] = [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, [j/(2\varepsilon)]$. Тогда $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{[j/(2\varepsilon)]} \leq 1$ и

$$|f_j(a_i) - f_j(b_i)| = j(t_i)^j - j(t_{i-1})^j = j \frac{2i\varepsilon}{j} - j \frac{2(i-1)\varepsilon}{j} = 2\varepsilon > \varepsilon$$

для всех $i = 1, \dots, [j/(2\varepsilon)]$, откуда следует искомое неравенство.

3.9. В определении величины $N(\varepsilon, f, [a, b])$ в п. 1 требуется, чтобы неналегающие отрезки $[a_i, b_i]$ обладали свойством: $|f(a_i) - f(b_i)| > \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, n$. Если здесь заменить неравенство $> \varepsilon$ на $\geq \varepsilon$ и новую величину обозначить через $N_{\geq}(\varepsilon, f, [a, b])$, то для нее неравенство слева в (4) может нарушаться: последовательность $f_j(t) = 1$ при $t = 0$, $f_j(t) = 0$ при $0 < t < 1$ и $f_j(t) = 1 - (1/j)$ при $t = 1$ сходится равномерно на $[0, 1]$ к функции $f(0) = f(1) = 1$ и $f(t) = 0$ при $0 < t < 1$, и при $\varepsilon = 1$ найдем, что $N_{\geq}(\varepsilon, f_j, [0, 1]) = 1$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $N_{\geq}(\varepsilon, f, [0, 1]) = 2$.

4. Сравнение с известными принципами выбора.

4.1. Пусть функция $\varphi: [a, b] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, удовлетворяет следующим двум условиям:

- (i) при любом $t \in [a, b]$ функция $\varphi(t, \cdot)$ второго аргумента не убывает и непрерывна на $\mathbb{R}^+$ и $\varphi(t, u) \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$;
- (ii) $\varphi(t, 0) = 0$ при любом $t \in [a, b]$ и $\inf_{t \in [a, b]} \varphi(t, u) > 0$ для любого $u > 0$.

Следуя [3], для функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ положим

$$V_{\varphi}(f, [a, b]) = \sup \sum_{i=1}^n \varphi(t_i, |f(a_i) - f(b_i)|),$$

где супремум берется по всем $n \in \mathbb{N}$, всем наборам $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, неналегающих отрезков из $[a, b]$ и всем точкам $t_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$. Эта обобщенная вариация функции f соответствует φ -вариации по Винеру–Янгу при $\varphi(t, u) = \varphi(u)$ и обычной вариации по Жордану $V_a^b(f)$ при $\varphi(t, u) = u$. В цитированной работе установлено следующее обобщение теоремы Хелли: *если последовательность функций $\{f_j\}$ на отрезке $[a, b]$ ограничена в некоторой точке из $[a, b]$ и*

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} V_{\varphi}(f_j, [a, b]) = C < \infty,$$

то $\{f_j\}$ содержит подпоследовательность, которая всюду на $[a, b]$ сходится к некоторой функции f такой, что $V_{\varphi}(f, [a, b]) \leq C$. Этот результат сразу вытекает из

теоремы 1 (вместе с теоремой Хелли при $\varphi(t, u) = u$ и ее обобщением из [4; теорема 1.3] при $\varphi(t, u) = \varphi(u)$), если принять во внимание оценки (ср. с оценками из доказательства теоремы 9 из [12]):

$$\begin{aligned} \operatorname{osc}(f_j, [a, b]) &\leq 2 \max\{u \in \mathbb{R}^+ \mid \varphi(a, u) \leq V_\varphi(f_j, [a, b])\}, \\ N(\varepsilon, f_j, [a, b]) &\leq \frac{V_\varphi(f_j, [a, b])}{\inf_{t \in [a, b]} \varphi(t, \varepsilon)} \quad \text{для } 0 < \varepsilon < \operatorname{osc}(f_j, [a, b]), \end{aligned}$$

а также секвенциальную полунепрерывность снизу функционала V_φ : если последовательность $\{f_j\}$ сходится всюду на $[a, b]$ к функции f , то

$$V_\varphi(f, [a, b]) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} V_\varphi(f_j, [a, b]) \leq C.$$

4.2. Пусть $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – последовательность, состоящая из непрерывных неубывающих неограниченных функций $\varphi_i: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ таких, что $\varphi_i(u) = 0$ лишь при $u = 0$, и удовлетворяющих следующим двум условиям:

- (a) $\varphi_{i+1}(u) \leq \varphi_i(u)$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $u \in \mathbb{R}^+$;
- (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(u) = \infty$ для всех $u > 0$.

Следуя [8], для функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ положим

$$V_\Phi(f, [a, b]) = \sup \sum_{i=1}^n \varphi_i(|f(a_i) - f(b_i)|),$$

где супремум берется по всем $n \in \mathbb{N}$ и всем неупорядоченным наборам $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, неналегающих отрезков из $[a, b]$. Такая обобщенная вариация функции f соответствует вариации по Жордану $V_a^b(f)$ при $\varphi_i(u) = u$, φ -вариации по Винеру–Янгу при $\varphi_i(u) = \varphi(u)$ и Λ -вариации по Уотерману [9] при $\varphi_i(u) = u/\lambda_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $u \in \mathbb{R}^+$, где $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – неубывающая последовательность положительных чисел, для которой $\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i = \infty$. Обобщение теоремы Хелли из [8; теорема 2.8] (и его частный случай из [9; теорема 5]) формулируется так же, как соответствующее утверждение в п. 4.1 с заменой V_φ на V_Φ . Этот результат вытекает из теоремы 1, благодаря следующим оценкам (ср. с оценками из доказательства теоремы 10 в [12]):

$$\begin{aligned} \operatorname{osc}(f_j, [a, b]) &\leq \max\{u \in \mathbb{R}^+ \mid \varphi_1(u) \leq V_\Phi(f_j, [a, b])\}, \\ N(\varepsilon, f_j, [a, b]) &\leq \max\left\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^n \varphi_i(\varepsilon) \leq V_\Phi(f_j, [a, b])\right\} \quad \text{при } 0 < \varepsilon < \operatorname{osc}(f_j, [a, b]), \end{aligned}$$

а также свойству секвенциальной полунепрерывности снизу функционала V_Φ .

4.3. Из теоремы 1 вытекает и установленный другим способом принцип выбора типа Хелли из работы [2; часть III, § 2, предложение 2.8], в котором для справедливости заключения теоремы 1 предполагается значительно больше, а именно, что последовательность $\{f_j\}$ равномерно ограничена,

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{osc}(f_j, [a, b]) < \infty \quad \text{и} \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} N(\varepsilon, f_j, [a, b]) < \infty \quad \text{для всех } \varepsilon > 0. \quad (8)$$

4.4. Напомним, что *модулем изменения по Чантурия* [13] функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется последовательность $\{\nu(n, f, [a, b])\}_{n \in \mathbb{N}}$, определяемая правилом

$$\nu(n, f, [a, b]) = \sup \sum_{i=1}^n |f(a_i) - f(b_i)|,$$

где для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ супремум берется по всем наборам $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, неналегающих отрезков из $[a, b]$. Как отмечено в [13; теорема 5] (см. также [7; теорема 3]), функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет односторонние конечные левый и правый пределы во всех точках $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $\nu(n, f, [a, b]) = o(n)$ (т.е. $\nu(n, f, [a, b])/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$). Отметим [2; часть III, § 2, теорема 2.2], что для последовательности функций $\{f_j\}$ условия (8) эквивалентны одному условию:

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \nu(n, f_j, [a, b]) = o(n).$$

В работе [7; теорема 1] (и ее обобщениях [10]–[12]) установлен следующий принцип выбора, обобщающий теорему Хелли: *если последовательность функций $\{f_j\}$ на $[a, b]$ ограничена в некоторой точке из $[a, b]$ и*

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \nu(n, f_j, [a, b]) = o(n), \quad (9)$$

то $\{f_j\}$ содержит подпоследовательность, которая всюду на $[a, b]$ сходится к некоторой функции f такой, что $\nu(n, f, [a, b]) = o(n)$. Этот результат вытекает из теоремы 1, если учесть, что условие (9) эквивалентно сразу паре условий – условию (1) и $\limsup_{j \rightarrow \infty} \text{osc}(f_j, [a, b]) < \infty$. Заметим, что во всех приведенных выше обобщениях теоремы Хелли, кроме теоремы 1, из их предположений вытекает равномерная ограниченность исходной последовательности $\{f_j\}$.

4.5. Для знакопеременной функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим через $\mathcal{P}(f)$ множество всех наборов точек $\{t_1, \dots, t_n\} \subset [a, b]$, где $n \in \mathbb{N}$, таких, что $t_1 < \dots < t_n$, и либо $(-1)^i f(t_i) > 0$ для всех $i = 1, \dots, n$, либо $(-1)^i f(t_i) < 0$ для всех $i = 1, \dots, n$, либо $(-1)^i f(t_i) = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$, и следуя [14], положим

$$T(f, [a, b]) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(t_i)| \mid n \in \mathbb{N} \text{ и } \{t_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{P}(f) \right\};$$

если же функция f всюду на $[a, b]$ неотрицательна или всюду на $[a, b]$ неположительна, то полагаем $T(f, [a, b]) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$. Так определенная величина $T(f, [a, b])$ называется *осцилляцией f на $[a, b]$ в смысле Шрадера*.

В работе [14; теорема 1.2] установлено следующее обобщение теоремы Хелли: *если последовательность функций $\{f_j\}$ на отрезке $[a, b]$ такова, что*

$$\sup_{j, k \in \mathbb{N}} T(f_j - f_k, [a, b]) < \infty,$$

то она содержит подпоследовательность, которая сходится всюду на $[a, b]$. Такая последовательность $\{f_j\}$ является поточечно ограниченной, но никаких свойств

“регулярности” предельной функции, как в предыдущих обобщениях пп. 4.1–4.4, не утверждается. Приведем примеры, показывающие, что этот результат и теорема 1 независимы (некоторое развитие понятия осцилляции по Шрадеру приведено в работе [15], где установлено соответствующее обобщение теоремы Хелли – теорема 2.1; этот результат и теорема 1 также независимы [16]): последовательность из примера 3.7 удовлетворяет теореме 1, но не удовлетворяет ни одному из приведенных выше обобщений теоремы Хелли, в то время как последовательность $f_j(t) = (-1)^j \mathcal{D}(t)$ на $[0, 1]$ удовлетворяет принципу выбору Шрадера, но не удовлетворяет никакому другому приведенному выше принципу выбора.

4.6. Модуль непрерывности $\omega(\cdot, f): [0, b - a] \rightarrow \mathbb{R}^+$ непрерывной функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ определяется как обычно правилом

$$\omega(\rho, f) = \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in [a, b], |s - t| \leq \rho\} \quad \text{при } 0 < \rho \leq b - a$$

и

$$\omega(0, f) = \lim_{\rho \rightarrow +0} \omega(\rho, f) = 0.$$

По теореме Вейерштрасса $\text{osc}(f, [a, b])$ конечна. Последовательность функций $\{f_j\}$ на $[a, b]$ называется равномерно непрерывной, если

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \sup_{j \in \mathbb{N}} \omega(\rho, f_j) = 0.$$

Имеет место следующая известная теорема Асколи: *поточечно ограниченная равномерно непрерывная последовательность вещественных функций $\{f_j\}$ на $[a, b]$ содержит всюду сходящуюся подпоследовательность*. Эта теорема является следствием теоремы 1, если принять во внимание, что

$$N(\varepsilon, f_j, [a, b]) \leq \frac{b - a}{\min\{\rho \in \mathbb{R}^+ \mid \omega(\rho, f_j) = \varepsilon\}} \quad \text{для } 0 < \varepsilon < \text{osc}(f_j, [a, b]).$$

Авторы выражают признательность В. С. Балаганскому (Институт математики и механики Уральского отделения РАН, г. Екатеринбург, Россия) и К. Манискалко (C. Maniscalco, Università degli Studi di Palermo, Palermo, Italy) за заинтересованное обсуждение результатов работы и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.
- [2] R. M. Dudley, R. Norvaiša, *Differentiability of Six Operators on Nonsmooth Functions and p -Variation*, With the collaboration of Jinghua Qian, *Lecture Notes in Math.*, **1703**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [3] S. Gnifka, “On the generalized Helly’s theorem”, *Funct. Approximatio Comment. Math.*, **4** (1976), 109–112.
- [4] J. Musielak, W. Orlicz, “On generalized variations. I”, *Studia Math.*, **18** (1959), 11–41.
- [5] В. В. Чистяков, “О многозначных отображениях конечной обобщенной вариации”, *Матем. заметки*, **71:4** (2002), 611–632.
- [6] V. V. Chistyakov, “Selections of bounded variation”, *J. Appl. Anal.*, **10:1** (2004), 1–82.

- [7] V. V. Chistyakov, “A selection principle for functions of a real variable”, *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia*, **53**:1 (2005), 25–43.
- [8] M. Schramm, “Functions of Φ -bounded variation and Riemann–Stieltjes integration”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **287**:1 (1985), 49–63.
- [9] D. Waterman, “On Λ -bounded variation”, *Studia Math.*, **57**:1 (1976), 33–45.
- [10] V. V. Chistyakov, “The optimal form of selection principles for functions of a real variable”, *J. Math. Anal. Appl.*, **310**:2 (2005), 609–625.
- [11] В. В. Чистяков, “Принцип выбора для функций со значениями в равномерном пространстве”, *Докл. РАН*, **409**:5 (2006), 591–593.
- [12] В. В. Чистяков, “Поточечный принцип выбора для функций одной переменной со значениями в равномерном пространстве”, *Матем. тр.*, **9**:1 (2006), 176–204.
- [13] З. А. Чантурия, “Модуль изменения функции и его применения в теории рядов Фурье”, *Докл. АН СССР*, **214**:1 (1974), 63–66.
- [14] K. Schrader, “A generalization of the Helly selection theorem”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78**:3 (1972), 415–419.
- [15] L. Di Piazza, C. Maniscalco, “Selection theorems, based on generalized variation and oscillation”, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **35**:3 (1986), 386–396.
- [16] C. Maniscalco, “A comparison of three recent selection theorems”, *Math. Bohem.*, **132**:2 (2007), 177–183.

Ю. В. Третьяченко

Нижегородский государственный университет

им. Н. И. Лобачевского

E-mail: tretyachenko_y_v@mail.ru

Поступило

08.06.2007

В. В. Чистяков

Государственный университет – Высшая школа экономики

(Нижегородский филиал)

E-mail: czeslaw@mail.ru