Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Габриелян, О проективных отображениях, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 3, 323–329

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm424>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:02:01

УДК 515.12

О ПРОЕКТИВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

С. С. Габриелян

Пусть X, Y – польские пространства и $\mathcal{B}_k$ есть σ -алгебра, порожденная проективным классом L_{2k+1} . Отображение $f: X \mapsto Y$ называется k -проективным, если $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_k$ для любого борелевского множества E . Основным результатом является следующая теорема: для любого k -проективного отображения $f: X \mapsto Y$ существует польское пространство $\tilde{X}_S$, его плотное подмножество $X_S \in \mathcal{B}_k$ и два непрерывных отображения f_0 и i из $\tilde{X}_S$ в Y такие, что

- i) $f_0|_{X_S} = f \circ i|_{X_S}$;
- ii) $i|_{X_S}$ – биекция.

Библиография: 6 названий.

Идея “изменения топологии” является весьма полезной в многочисленных приложениях. Одним из наиболее существенных ее проявлений явилась теорема Куратовского (см. [1]), широко используемая в дескриптивной теории множеств (обобщение этой теоремы для борелевских G -пространств, где G – польская группа, см. [1]). Сформулируем классический результат Куратовского в следующем виде.

ТЕОРЕМА (Куратовский). Пусть X – стандартное борелевское пространство, Y – польское пространство и $f: X \rightarrow Y$ – борелевское отображение. Тогда существуют польское пространство $\tilde{X}_S$, его замкнутое подмножество X_S (значит, X_S также польское), непрерывная биекция $i: X_S \rightarrow X$ и непрерывное отображение $f_0: \tilde{X}_S \rightarrow Y$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow i & & \uparrow id_Y \\ X_S & \xrightarrow{f_0|_{X_S}} & Y \end{array} \quad (D)$$

коммутативна.

Однако часто возникают не борелевские отображения, например, A -функции (см. [2, § 39, XI]). Поэтому естественно возникает вопрос об аналоге теоремы Куратовского, в частности, для A -функций. Получение этого аналога является главной целью данной статьи. В работе также рассматриваются некоторые применения полученных результатов.

Под *борелевским пространством* $(X, \mathcal{B})$ понимается множество X с выделенной на нем σ -алгеброй $\mathcal{B}$ его подмножеств, которые называются борелевскими. Если X – топологическое пространство, а $\mathcal{B}$ порождена открытыми множествами топологии τ на X , то будем говорить, что $\mathcal{B}$ *порождена τ* . Если на X можно ввести топологию τ такую, что $\mathcal{B}$ порождена τ , то будем говорить, что $\mathcal{B}$ *допускает топологию*. Через $\mathcal{B}(S)$ обозначим σ -алгебру, порожденную семейством множеств S . Если $\mathcal{B} = \mathcal{B}(S)$, где S счетно, то говорят, что *пространство обладает счетной базой*. Борелевские пространства будем считать *отделимыми* (т.е. для каждой пары различных точек существует борелевское множество, содержащее ровно одну из этих точек). Стандартно вводятся борелевские отображения и изоморфизмы.

Пусть L_n – семейство проективных множеств класса n польского пространства X . Тогда $\mathcal{B}(L_0)$ состоит из “обычных” борелевских множеств, а $\mathcal{B}(L_{2k-1}) = \mathcal{B}(L_{2k})$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}(L_0)$, $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}(L_{2k-1})$, $k \in \mathbb{N}$. Семейство $\mathcal{B}_k$ на X будем обозначать через $\mathcal{B}_k(X)$. Легко показать, что $\mathcal{B}_k \subset L_{2k+1} \cap L_{2k+2}$, $k = 1, 2, \dots$. Известно также, что $\mathcal{B}_0 \subsetneq \mathcal{B}_1 \subsetneq \mathcal{B}_2 \subsetneq \dots$.

Непосредственно из [2, § 39, V, теорема 4] вытекает утверждение: если f – взаимно однозначное борелевское отображение, определенное на борелевском множестве E , то образ и прообраз множества из $\mathcal{B}_k$ также является множеством из $\mathcal{B}_k$.

Обобщением понятия A -функции является следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение f из полного пространства X в полное пространство Y называется *отображением k -проективного класса*, если $\forall E \in \mathcal{B}_0(Y) \implies f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_k(X)$.

Основным результатом статьи является

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – стандартное борелевское пространство, Y – польское пространство и $f: X \rightarrow Y$ – отображение k -проективного класса. Тогда существуют польское пространство $\tilde{X}_S$, его плотное подмножество $X_S \in \mathcal{B}_k(\tilde{X}_S)$, непрерывная биекция $i: X_S \rightarrow Y$ и непрерывное отображение $f_0: \tilde{X}_S \rightarrow Y$ такие, что диаграмма (D) коммутативна.

Доказательство теоремы 1 делится на три этапа:

- 1) по исходному базису пространства X и прообразам базиса пространства Y вводится новая топология на X (X с новой топологией есть X_S);
- 2) строится пополнение $\tilde{X}_S$ пространства X_S ;
- 3) показывается, что $X_S \in \mathcal{B}_k(\tilde{X}_S)$.

Первая и вторая части используют только наличие второй аксиомы счетности в пространствах X и Y , поэтому пригодны для любых пространств со счетной базой.

Через $A^{(i)}$ будем обозначать A , если $i = 1$, и $X \setminus A$, если $i = 0$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только пространства со счетной базой. Поэтому естественными аналогами понятий полноты и пополнения пространства, являются следующие определения (см. [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отделимое пространство X со счетной базой $S = \{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ называется *полным* относительно S , если любой фильтр с базисом вида

$$\mathcal{F} = \{E_{i_1 \dots i_n} = A_1^{(i_1)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)}\}_{n=1}^{\infty} \quad (1)$$

сходится (и состоит из единственной точки).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Отделимое пространство $\tilde{X}$ с базой $\tilde{S} = \{\tilde{A}_n, n \in \mathbb{N}\}$ называется *пополнением пространства X относительно его базы $S = \{A_n, n \in \mathbb{N}\}$* , если

- 1) пространство $\tilde{X}$ полно относительно $\tilde{S}$;
- 2) $X \subset \tilde{X}$ и $A_n = \tilde{A}_n \cap X$;
- 3) если $\tilde{\mathcal{F}}$ – базис фильтра вида (1) в $\tilde{X}$, то $\tilde{\mathcal{F}} \cap X$ – базис фильтра в X .

Следующее предложение показывает, что класс отделимых пространств со счетной базой совпадает с классом сепарабельных метрических пространств, а также устанавливает связь между полнотой пространства и полнотой относительно построенной метрики, что позволит дать простое доказательство первой части теоремы Рохлина (см. ниже).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *На отделимом пространстве $(X, \mathcal{B})$ со счетной базой $S = \{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ можно ввести метрику ρ_S так, что*

- 1) *пространство X является вполне несвязным сепарабельным метрическим пространством относительно ρ_S , все множества A_n открыто-замкнуты и $\mathcal{B}$ порождена топологией;*
- 2) *пополнение пространства X относительно базы S существует, единственно и совпадает с пополнением X по метрике ρ_S ; кроме того, пространство X полно относительно S тогда и только тогда, когда X полно относительно метрики ρ_S .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть доказана Ригером (см. [4, гл. XI, § 2, следствие]), существование и единственность пополнения доказаны Рохлиным [3], оставшиеся утверждения доказываются простой проверкой. Приведем лишь построение метрики (она понадобится при доказательстве предложения 3).

Пусть $D = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ – канторов дисконтинуум. Определим инъективное отображение из X в D

$$X \ni \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{(i_n)} = x \mapsto (i_1, i_2, \dots) \in D.$$

Из D индуцируется метрика на X :

$$\rho_S(x, y) = \frac{1}{2^{\omega(x, y)}} \quad \text{при } x \neq y \quad \text{и} \quad \rho_S(x, x) = 0 \quad \forall x \in X,$$

где $\omega(x, y)$ – есть наименьшее натуральное число n такое, что существуют числа $i_1, \dots, i_n$, для которых $x \in A_1^{(i_1)} \cap A_2^{(i_2)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)}$, а $y \notin A_1^{(i_1)} \cap A_2^{(i_2)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)}$. При этом система борелевских множеств

$$\mathcal{N} = \{E_{i_1 i_2 \dots i_n} = A_1^{(i_1)} \cap A_2^{(i_2)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)}, i_j = 0, 1, j = 1, \dots, n; n \in \mathbb{N}\}$$

образует базу топологии.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть X – сепарабельное метрическое пространство и $\{B_n\}$ – база топологии. Тогда система $\mathcal{N}$, построенная по базе, представляет собой совершенное разбиение, состоящее из множеств типа G_δ .*

(Отметим также, что существование совершенных разбиений в таких пространствах доказано в [5].)

Первый этап опирается на следующий известный результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $(X, \mathcal{B}_X)$ и $(Y, \mathcal{B}_Y)$ – отделимые борелевские пространства со счетной базой и $f_1(x), f_2(x), \dots$ – последовательность борелевских отображений из X в Y . Тогда на X и Y можно ввести топологии τ_X^* и τ_Y^* так, чтобы все $f_k(x)$ стали непрерывными (если $\mathcal{B}_X$ и $\mathcal{B}_Y$ порождены топологиями τ_X и τ_Y , то на X можно ввести топологию τ_X^* , возможно более сильную, чем τ_X , так, чтобы все $f_k(x)$ стали непрерывными). При этом если все $f_k(x)$ – борелевские изоморфизмы, то можно ввести топологии (или топологию, когда $X = Y$), возможно более сильные, чем исходные, так, что все $f_k(x)$ станут гомеоморфизмами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S = \{A_j, j \in \mathbb{N}\}$ – база пространства Y и $\mathcal{N} = \{E_{i_1 \dots i_n}\}$ – система множеств, построенная по S в предложении 1. Тогда эта система определяет на Y базу $\{A'_j, j \in \mathbb{N}\}$ топологии τ_Y^* сепарабельного метрического пространства.

Построим, как в предложении 1, топологию τ_X^* на X по системе множеств

$$\{B_i, f_k^{-1}(A'_j); i, j, k \in \mathbb{N}\},$$

где $\{B_i\}$ – база пространства (топологии τ_X) на X , а A'_j – либо построенная выше система, либо база топологии τ_Y на Y , если Y является топологическим пространством. Тогда

- 1) топология τ_X^* , вообще говоря, сильнее исходной, если таковая была;
- 2) все отображения f_k непрерывны, так как по предложению 1 $f_k^{-1}(A'_j) \in \tau_X^*$.

Оставшаяся часть доказывается аналогично.

Третий этап содержится в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $S = \{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}_k$ и содержит базу топологии, а X_S – метрическое пространство, построенное по базе S . Тогда X_S есть множество из $\mathcal{B}_k$ в своем пополнении $\tilde{X}_S$. При этом непрерывное тождественное отображение i из X_S на X осуществляет изоморфизм пространств $(X_S, \mathcal{B}_0(\tilde{X}_S) \cap X_S)$ и $(X, \mathcal{B}(S))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разобьем на пять шагов.

- 1) Пусть $X_0 = X$. Положим

$$X_n = \sqcup \text{Cl}(A_1^{(i_1)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)})$$

– дизъюнктное объединение замыканий в X множеств $A_1^{(i_1)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)}$ с индуцированной из X метрикой. Тогда X_n – полное сепарабельное метрическое пространство. Определим непрерывную проекцию $\pi_{n+1, n}$ из X_{n+1} в X_n следующим образом:

$$\text{если } x \in \text{Cl}(A_1^{(i_1)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)} \cap A_{n+1}^{(i_{n+1})}), \text{ то } \pi_{n+1, n}(x) = x \in \text{Cl}(A_1^{(i_1)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)}),$$

и пусть $\pi_{n, l} = \pi_{n, n-1} \circ \dots \circ \pi_{l+1, l}$, $n > l$. Тогда очевидно, что система $(X_n, \pi_{n, l})$ является проективной. Обозначим через Y_0 проективный предел этой системы. Тогда Y_0 – полное сепарабельное метрическое пространство, которое является замкнутым подпространством прямого произведения $Y = \prod_{n=0}^{\infty} X_n$ пространств X_n .

- 2) Построим отображение p_n из $X = X_0$ в X_n , полагая $p_0(x) = x$, и

$$\text{если } x \in A_1^{(i_1)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)}, \text{ то } p_n(x) = x \in \text{Cl}(A_1^{(i_1)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)}).$$

Тогда p_n инъективно и удовлетворяет условию:

образы и прообразы множеств из $\mathcal{B}_k$ принадлежат $\mathcal{B}_k$.

Действительно, $E \in \mathcal{B}_k(X)$ тогда и только тогда, когда

$$E \cap (A_1^{(i_1)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)}) \in \mathcal{B}_k(X),$$

что равносильно тому, что

$$E \cap (A_1^{(i_1)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)}) \in \mathcal{B}_k(\text{Cl}(A_1^{(i_1)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)}))$$

или $E \in \mathcal{B}_k(X_n)$. В частности, $p_n(X) \in \mathcal{B}_k(X_n)$.

Обратно, если $E \in \mathcal{B}_k(X_n)$, то $E \cap p_n(X) \in \mathcal{B}_k(X_n)$. И, как доказано выше, $p_n^{-1}(E) = p_n^{-1}(E \cap p_n(X)) \in \mathcal{B}_k(X)$.

При этом по построению верно равенство

$$\pi_{n+1,n}(p_{n+1}(x)) = p_n(x). \quad (*)$$

3) Пусть i – непрерывное тождественное отображение из X_S в X . Тогда $p_n \circ i$ непрерывно.

Действительно, пусть $x \in X_S$ и V – окрестность точки $p_n(i(x)) \in \text{Cl}(A_1^{(i_1)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)}) \subset X_n$. Тогда существуют открытое подмножество U в X и элемент $A_l \in S$ такие, что $i(x) \in A_l \subset U$ и $U \cap \text{Cl}(A_1^{(i_1)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)}) = V$. Тогда $i(x) \in A_1^{(i_1)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)} \cap A_l = W$. Так как W открыто в X_S и $p_n(i(y)) = y \in \text{Cl}(A_1^{(i_1)} \cap \dots \cap A_n^{(i_n)}) \cap A_l \subset V \quad \forall y \in W$, то $p_n \circ i$ непрерывно.

4) Определим инъективное отображение p из X в Y , полагая

$$p(x) = (p_0(x), p_1(x), \dots).$$

Из (*) следует, что $p(X) \subset Y_0$. Покажем, что

если $E \in \mathcal{B}_0(X)$, то $p(E) \in \mathcal{B}_k(Y_0)$;

в частности, $p(X) \in \mathcal{B}_k(Y_0)$. Отображение p можно представить в виде композиции двух отображений $p = f \circ g$, где g – тождественный гомеоморфизм X на диагональ в $Z = \prod_{n=0}^{\infty} X$, а f – отображение из Z в Y , определенное следующим образом:

$$f(x_0, x_1, \dots) = (p_0(x_0), p_1(x_1), \dots).$$

Так как Y_0 замкнуто в Y , то достаточно доказать, что если $E \in \mathcal{B}_0(Z)$, то $f(E) \in \mathcal{B}_k(Y)$. Но f инъективно, поэтому можно считать, что $E = A_0 \times A_1 \times \dots$, где $A_i \in \mathcal{B}_0(X_i)$. Так как

$$Y \setminus f(E) = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_0 \times \dots \times X_{n-1} \times (X_n \setminus p_n(A_n)) \times X_{n+1} \times \dots$$

и по части 2) $X_n \setminus p_n(A_n) \in \mathcal{B}_k(X_n)$, то $f(E) \in \mathcal{B}_k$.

5) Покажем, что взаимно однозначное отображение $h = p \circ i$ из X_S в Y_0 есть гомеоморфизм X_S на $h(X_S)$.

Непрерывность h вытекает из пункта 3). Пусть $x, y \in X_S$ и $\rho_S(x, y) = 1/2^{m+1}$, т.е. $x, y \in A_1^{(i_1)} \cap \dots \cap A_m^{(i_m)}$, а $x \in A_1^{(i_1)} \cap \dots \cap A_m^{(i_m)} \cap A_{m+1} \not\subset y$. Тогда $\rho_{X_n}(p_n(i(x)), p_n(i(y))) = \rho(x, y)$ при $n \leq m$ и $\rho_{X_n}(p_n(i(x)), p_n(i(y))) = 1$ при $n > m$, а

$$\rho_Y(h(x), h(y)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_{X_n}(p_n(i(x)), p_n(i(y))) = \rho(x, y) \cdot \left(2 - \frac{1}{2^m}\right) + \frac{1}{2^m} \geq \rho_S(x, y),$$

поэтому обратное отображение также непрерывно и h – гомеоморфизм.

По теореме Лаврентьева h можно продолжить до гомеоморфизмов G_δ множеств в $\tilde{X}_S$ и Y_0 . Так как по пункту 4) $h(X_S) \in \mathcal{B}_k(Y_0)$, то $X_S = h^{-1}(h(X_S)) \in \mathcal{B}_k(\tilde{X}_S)$. Последнее утверждение вытекает из предложения 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По теореме Куратовского можно, не ограничивая общности, считать, что X польское. Пусть $S = \{B_i, f^{-1}(A_j); i, j \in \mathbb{N}\}$, где $\{A_j\}$ – база топологии на Y , а $\{B_i\}$ – база топологии на X . Положим $E = X_S$ и $X_0 = \tilde{X}_S$ – пополнение X_S . Как и в предложении 1, тождественная биекция i множества E на X и $f_0 = f \circ i$ непрерывны. По предложению 3 $E \in \mathcal{B}_k(X_0)$. Продолжив f_0 и i на G_δ -множество и снова воспользовавшись теоремой Куратовского, получим требуемое.

Отметим, что аналогичную теорему можно сформулировать и для последовательности отображений k -проективного класса.

Применения

1. Используя предложения 1–3 и свойство совершенного ядра, докажем теорему.

ТЕОРЕМА 2. *σ -алгебра, порожденная аналитическими множествами, имеет несчетный вес.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: $S = \{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}(S) = \mathcal{B}_1$. Не ограничивая общности, можно считать, что база топологии X содержится в S . Пусть X_S – пространство X с метрикой ρ_S , $\tilde{X}_S$ – пополнение X_S и i – непрерывное тождественное отображение из X_S на X (см. предложение 1). Тогда по предложению 3 $\mathcal{B}_1 = i(\mathcal{B}_0 \cap X_S)$ и X_S – множество класса $\mathcal{B}_1$ в $\tilde{X}_S$. Так как X имеет мощность континуума, то в X_S имеется борелевское (в $\tilde{X}_S$) подмножество E мощности континуум [2, § 39, II, следствие 3]. Пусть A – аналитическое неборелевское подмножество в E (а, значит, и в $\tilde{X}_S$). Тогда $A \notin \mathcal{B}_0 \cap X_S$, но $i(A) \in \mathcal{B}_1$. Противоречие.

Отметим, что, используя идеи предложений 1–3, можно прийти, фактически, к более общим результатам статьи [6].

2. Пространства Лебега. Из предложений 1–3 легко доказать первую часть теоремы Рохлина (основные понятия и определения см. [3]), а именно:

ТЕОРЕМА 3. 1. *Класс сепарабельных пространств (X, Ω_μ, μ) совпадает с классом сепарабельных метрических пространств с заданными борелевскими мерами.*

2. *Для любого пространства Лебега (X, Ω_μ, μ) существуют полное сепарабельное метрическое пространство $\tilde{X}$ и заданная на нем мера $\tilde{\mu}$ такие, что X можно рассматривать как $\tilde{\mu}$ -измеримое подмножество в $\tilde{X}$ полной меры, а μ – как ограничение меры $\tilde{\mu}$ на X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть S – база пространства X . Построим по S метрику ρ_S . Тогда X станет сепарабельным метрическим пространством и мера μ определена на всех борелевских множествах $\mathcal{B}$. Обозначим ограничение μ на $\mathcal{B}$ через μ_0 . Через $\tilde{\mu}$ обозначим продолжение меры μ_0 на все μ_0 -измеримые множества. Тогда $\tilde{\mu}$ – полная борелевская мера на X , а сепарабельность пространства как раз означает, что $\tilde{\mu} = \mu$.

2. Немедленно вытекает из утверждения 1) предложения 1 и определения пространства Лебега.

3. В заключение продемонстрируем применение предложения 2 для доказательства теоремы Лузина в случае борелевского отображения.

ТЕОРЕМА ЛУЗИНА. Пусть X и Y – сепарабельные метрические пространства, μ – вероятностная регулярная мера на X и $f(x)$ – борелевское отображение из X в Y . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $K_\varepsilon \subset X$ такое, что

- 1) $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$;
- 2) сужение f на K_ε непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя X на компакт меры больше, чем $1 - \varepsilon/2$, можно считать, что X полно. Пусть τ_X – топология на X , возможно более сильная, чем исходная, относительно которой отображение f непрерывно. Пространство X с новой топологией обозначим через X_0 , функцию f в новой топологии – через f_0 , а тождественное непрерывное отображение из X_0 в X – через i . Пусть $\overline{X}_0$ – пополнение пространства X_0 . Так как X полно и i – борелевский изоморфизм между X и X_0 , то $i^{-1}(X) = X_0$ – борелевское подмножество в $\overline{X}_0$ [2, § 39, V, теорема 1].

Определим борелевскую меру $\overline{\mu}$ в $\overline{X}_0$: $\overline{\mu}(E) = \mu(i(E \cap X_0))$, где E – борелевское подмножество $\overline{X}_0$. Тогда $\overline{\mu}$ сосредоточена на X_0 . Так как $\overline{X}_0$ полное, то $\overline{\mu}$ регулярна. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $\overline{K}_\varepsilon \subset X_0$ такой, что $\overline{\mu}(\overline{K}_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. Пусть $K_\varepsilon = i(\overline{K}_\varepsilon)$ – компакт в X . Покажем, что K_ε искомым. По построению $\mu(K_\varepsilon) = \overline{\mu}(\overline{K}_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. Так как i непрерывно и взаимно однозначно, то $i|_{K_\varepsilon}$ – гомеоморфизм. Значит, $f|_{K_\varepsilon} = f_0 \circ (i^{-1}|_{K_\varepsilon})$ непрерывно. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kechris A. S. Descriptive dynamics // London Math. Soc. Lecture Notes. 2000. V. 277. P. 231–258.
- [2] Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
- [3] Рохлин В. А. Об основных понятиях теории меры // Матем. сб. 1949. Т. 67. № 1. С. 107–150.
- [4] Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.
- [5] Morse A. P. Perfect blankets // Trans. Amer. Math. Soc. 1947. V. 61. № 1. P. 418–442.
- [6] Rao B. V. Non-existence of certain Borel structures // Fund. Math. 1970. V. 69. P. 241–242.