Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ш. Загиров, О глобальных свойствах полиномов, гарантируемых их поведением на подмножестве, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 3, 338–355

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm426>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:52:27

УДК 517.5

О ГЛОБАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ПОЛИНОМОВ, ГАРАНТИРУЕМЫХ ИХ ПОВЕДЕНИЕМ НА ПОДМНОЖЕСТВЕ

Н. Ш. Загиров

В работе установлен порядок роста различных норм полиномов в зависимости от их степени по имеющимся оценкам их значений на подмножестве рассматриваемого отрезка.

Библиография: 16 названий.

1. Постановка задачи. Пусть $\mathcal{P}_n(H_n)$ – множество всех алгебраических (тригонометрических) полиномов порядка не выше, чем n , $E \subset [-1, 1]$, $|E|$ – мощность множества E ,

$$W_n(E) = \sup \left\{ \frac{\|p\|}{\|p\|_E} : p \in \mathcal{P}_n, p \neq 0 \right\},$$

где $\|p\|_E = \sup\{|p(x)| : x \in E\}$ и $\|p\| = \|p\|_{[-1,1]}$.

Статья посвящена вопросу об оценках $W_n(E)$ и некоторым смежным задачам. Эта величина возникает в различных задачах теории приближения; в частности, с ее помощью оценивается погрешность при применении метода сеток [1, гл. V, § 3]. В определенном смысле $W_n(E)$ представляет собой свободу системы, состоящей из множества E , отрезка $[-1, 1]$ и множества многочленов $\mathcal{P}_n$ (см. [2]).

Легко показать, что если E конечно и $|E| \leq n$, то $W_n(E) = \infty$. Поэтому всюду в дальнейшем будем предполагать, что $|E| > n$. Кроме того, если $|E| = n + 1$ и $E = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, то

$$W_n(E) = \left\| \sum_{i=0}^n \frac{\omega(x)}{\omega'(x_i)(x - x_i)} \right\|,$$

где $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$, и, следовательно, представляет собой константу Лебега интерполяционного полинома Лагранжа с узлами в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Поведение величины $W_n(E)$ и ее аналога для тригонометрических полиномов (в определении $W_n(E)$ следует заменить отрезок $[-1, 1]$ на $[-\pi, \pi]$ и $\mathcal{P}_n$ на H_n) исследовалось в работах многих авторов как для множеств положительной меры (см., например, [3]), так и для дискретных множеств (см. [1, с. 228], [2, теорема 4] или [4]).

Остановимся подробно на случае, когда

$$E = E_N = \left\{ -1 + \frac{2j}{N-1} \right\}_{j=0}^{N-1},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 1-01-01019.

и рассмотрим вопрос о равномерной ограниченности $W_{n,N} = W_n(E_N)$, когда $n \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$.

С помощью известного неравенства Маркова об оценке производной алгебраического полинома легко установить (как это показано в [5]), что если $n \leq \lambda\sqrt{N-1}$, $0 < \lambda < 1$, то

$$W_{n,N} \leq c(\lambda) \quad (1)$$

с константой $c(\lambda) = 1/(1 - \lambda^2)$. В работе [6] справедливость оценки (1) доказана при $\lambda \in (0, \pi/\sqrt{2}]$. Далее, в [7] (1966 год) было установлено, что если $n/\sqrt{N} \rightarrow \infty$, то и $W_{n,N} \rightarrow \infty$.

Вопрос о существовании оценки (1) для $n \leq \lambda\sqrt{N-1}$ при любом $\lambda > 0$ долгое время оставался открытым.

Из одного результата В. К. Дзядыка за 1978 год (см. [1, с. 228]) можно вывести, что при условиях

$$\begin{aligned} N &> 2n, \quad x_0 = 1, \quad x_{N+1} = -1, \\ x_k &= \cos \frac{2k-1}{2N}\pi, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

и

$$(x_k, x_{k-1}) \cap E \neq \emptyset, \quad k = 1, 2, \dots, N+1,$$

величина $W_n(E)$ не превосходит $(\cos(n\pi/2N))^{-1}$. Отсюда следует справедливость оценки типа (1), если $(\sin(3\pi/8n))^{-1} < \sqrt{N-1}$; т.е. этот результат, расширяя класс множеств E , для которых верна оценка типа (1), не отвечает на поставленный вопрос. Утвердительный ответ на него позже был получен в работах [5] и [8].

После этого возникла задача о справедливости оценки типа (1) для произвольных дискретных множеств $E = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ ($x_i > x_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$), обладающих тем свойством, что

$$d = d(E) = \max\{x_i - x_{i+1} : i = 0, 1, \dots, N-1\}$$

не превосходит λ/n^2 .

Установленная в п. 3 нашей работы теорема 3 дает, в частности, ответ на этот общий вопрос.

Мы используем свойства величины (считаем, что $|E| > n$)

$$V_n(E; a) = \sup \left\{ \frac{p(a)}{\|p\|_E} : p \in \mathcal{P}_n, p \neq 0 \right\}, \quad a \notin [-1, 1],$$

которая изучается в п. 2. Доказанная там лемма применяется для оценок сверху $V_n(E; a)$, $W_n(E)$, а также для исследования аналогов $W_n(E)$, когда вместо равномерной нормы полиномов рассматриваются интегральные нормы (п. 4).

2. Свойства $V_n(E; a)$. Известно (см. [9, с. 78]), что если $E = [-1, 1]$ и $|a| > 1$, то $V_n(E; a) = |T_n(a)|$, где $T_n(x) = \cos n \arccos x$ ($|x| \leq 1$) – многочлен Чебышева. Из определения $V_n(E; a)$ следует, что если $E_1 \subset E_2$, то

$$V_n(E_2; a) \leq V_n(E_1; a). \quad (2)$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Для любого множества $E \subset [-1, 1]$ и числа a , $|a| > 1$, справедливо неравенство

$$V_n(E; a) \geq |T_n(a)|,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда множество E содержит все точки $\tau_k = \cos(k\pi/n)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть теоремы следует из неравенства (2). Для доказательства ее второй части нам понадобится обобщение ужей (см. [1, с. 34]) на каналы с разрывными границами, рассмотренное в работе [10]. Пусть $G(x) = 1$ для $x \in E$ и $G(x) = \infty$ для $x \notin E$, $g(x) = -G(x)$; функция $G(x)$ ($g(x)$) полунепрерывна снизу (сверху). Из теоремы 6 названной работы следует, что пара (g, G) порождает ровно два ужа. Известно [11, с. 309], что если $\bar{u}$ и $\underline{u}$ — два ужа, порожденные парой, а $u(x)$ — отличный от них полином, который удовлетворяет неравенствам

$$g(x) \leq u(x) \leq G(x), \quad |x| \leq 1,$$

то для $|a| > 1$ значение $u(a)$ находится строго между $\bar{u}(a)$ и $\underline{u}(a)$. Это экстремальное свойство в [11] доказано для непрерывных на отрезке функций g, G . Для разрывных границ оно устанавливается точно также. Поэтому существует полином $\bar{p} \in \mathcal{P}_n$ с единичной нормой на E такой, что $V_n(E; a) = \bar{p}(a)$; кроме того, $\bar{p}$ имеет характеристическое свойство: существует набор точек $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ из E такой, что $\bar{p}(x_i) = (-1)^i r$, $r = \pm 1$.

Пусть E не содержит хотя бы одну точку из τ_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда $\bar{p}$ не совпадает с $\pm T_n$ и для пары (g_1, G_1) :

$$g_1(x) = \min\{\bar{p}(x), -1\}, \quad G_1(x) = \max\{\bar{p}(x), 1\},$$

полином $\bar{p}(x)$ является ужом, а $T_n(x)$ находится между функциями g_1 и G_1 на отрезке $[-1, 1]$. Поэтому $V_n(E; a) = \bar{p}(a) > |T_n(a)|$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 следует, что с ростом n величина $V_n(E; a)$ ($|E| > n$) растет не медленнее, чем $|T_n(a)|$. Порядок ее роста зависит от степени близости точек множества E к точкам τ_k ($k = 0, 1, \dots, n$). Конкретно эта мысль выражается ниже в теореме 2. Для оценки $V_n(E; a)$ предварительно докажем лемму.

ЛЕММА 1. Пусть n и k — натуральные числа такие, что $3 \leq k-1 \leq n/8$, $E_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [-1, 1]$, $x_0 = 1$ и $x_n = -1$. Положим

$$\begin{aligned} \tau_i &= \cos \frac{i\pi}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{1 - \tau_{k-1}}{k-1}, \\ \varphi(x) &= (x - \tau_0) \cdots (x - \tau_n), \quad \omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n), \\ \varphi_i(x) &= \frac{\varphi(x)}{x - \tau_i}, \quad \omega_i(x) = \frac{\omega(x)}{x - x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Если множество E_0 удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \frac{h}{3} &\leq x_i - x_{i+1} \leq 2h, \quad i = 0, 1, \dots, k-2, n-k+1, \dots, n-1, \\ 0 &\leq x_{k-1} - \tau_{k-1} \leq 2h, \quad 0 \leq \tau_{n-k+1} - x_{n-k+1} \leq 2h, \\ |x_i - \tau_i| &\leq d_i = \min \left\{ 2h, \frac{1}{3}(\tau_{i-1} - \tau_i) \right\}, \quad i = k, k+1, \dots, n-k, \end{aligned}$$

то для любого a , $|a| > 1$, справедливы неравенства

$$\left| \frac{\omega_i(a)}{\omega'(x_i)} \right| \leq 72 \exp(85(k-1)) \left| \frac{\varphi_i(a)}{\varphi'(\tau_i)} \right|, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a > 1$. Разобьем множество значений индекса i на три части.

Случай 1: $0 \leq i \leq k-1$. Если $0 \leq j \leq k-1$, то, используя неравенство

$$(k-1)(1-\tau_j) \geq j^2 h, \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (3)$$

(оно получается из свойства функции $y = \sin x$, $x \in [0, \pi/2]$: $\sin \alpha x \geq \alpha \sin x$, $0 < \alpha < 1$), установим, что

$$\frac{a-x_j}{a-\tau_j} \leq \max \left\{ 1, \frac{1-x_j}{1-\tau_j} \right\} \leq \frac{2(k-1)}{j},$$

а затем, что

$$\frac{|\tau_i - \tau_j|}{|x_i - x_j|} \leq \frac{3\pi}{2hn^2}(i+j).$$

Поэтому

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k-1} \frac{a-x_j}{a-\tau_j} \left| \frac{\tau_i - \tau_j}{x_i - x_j} \right| < (24e)^{k-1}. \quad (1.1)$$

При получении последнего неравенства используется известная формула Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \exp \left(\frac{\theta}{12n} \right), \quad 0 < \theta < 1.$$

Если $k \leq j \leq n-k$, то

$$\frac{a-x_j}{a-\tau_j} \leq \frac{1-\tau_j+d_j}{1-\tau_j} < 1 + \frac{2h}{1-\tau_j}$$

и

$$\prod_{j=k}^{n-k} \frac{a-x_j}{a-\tau_j} \leq \exp \left(2h \sum_{j=k}^{n-k} \frac{1}{1-\tau_j} \right).$$

Докажем, что

$$\sum_{j=k}^{n-k} \frac{1}{1-\tau_j} \leq \frac{2n^2}{(k-1)\pi^2}. \quad (4)$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1-\tau_j} = \frac{T_n''(1)}{T_n'(1)}, \quad T_n'(1) = n^2, \quad T_n''(1) = \frac{1}{3}n^2(n^2-1),$$

то

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1-\tau_j} = \frac{n^2-1}{3}.$$

Отсюда получаем требуемое неравенство (4), используя соотношения

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{j=k}^{n-k} \frac{1}{1-\tau_j} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1-\tau_j} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{1-\tau_j^2}.$$

Из неравенства (4) следует, что

$$\prod_{j=k}^{n-k} \frac{a-x_j}{a-\tau_j} \leq \exp\left(\frac{2hn^2}{(k-1)\pi^2}\right).$$

Из определения h имеем $2hn^2 \leq (k-1)\pi^2$ и, тем самым,

$$\prod_{j=k}^{n-k} \frac{a-x_j}{a-\tau_j} \leq e. \quad (5)$$

Для оценки при тех же j дроби

$$\frac{\tau_i - \tau_j}{x_i - x_j} \leq \frac{\tau_i - \tau_j}{x_i - \tau_j - d_j}$$

будем различать два случая: $k \leq j \leq 2k-2$ и $j \geq 2k-1$. В первом случае, используя неравенство $7(x_i - x_{k-1}) \leq \tau_i - \tau_{k-1}$ (при его доказательстве применяем свойство синуса: $\sin x \geq 3x/\pi$, если $x \in [0, \pi/6]$) и определение d_j ($3d_j \leq \tau_{j-1} - \tau_j$), получаем, что

$$\frac{\tau_i - \tau_j}{x_i - x_j} \leq 7. \quad (1.2)$$

Во втором случае заменим d_j на $2h$, x_i на τ_{k-1} , τ_i на 1 и воспользуемся оценкой $2(\tau_{k-1} - \tau_j) > 1 - \tau_j$, если $j \geq 2k-1$. Тогда

$$\frac{\tau_i - \tau_j}{x_i - x_j} \leq 1 + \frac{\tau_i - x_i + 2h}{x_i - \tau_j - 2h} < 1 + 2 \frac{1 - \tau_{k-1}}{1 - \tau_j - 4h}.$$

Так как $1 - \tau_{k-1} = (k-1)h$, $3(1 - \tau_j) \leq 7(1 - \tau_j - 4h)$ ($j \geq 2k-1$), то последняя дробь не превосходит $14(k+1)h/(3(1 - \tau_j))$. Следовательно,

$$\prod_{j=2k-1}^{n-k} \frac{\tau_i - \tau_j}{x_i - x_j} \leq \exp\left(\frac{14}{3}(k+1)h \sum_{j=2k-1}^{n-k} \frac{1}{1-\tau_j}\right).$$

Применяя неравенство (4) и оценку сверху h , получим

$$\prod_{j=k}^{n-k} \frac{\tau_i - \tau_j}{x_i - x_j} \leq 7^k \exp\left(\frac{14}{3}(k+1)\right).$$

Таким образом,

$$\prod_{j=k}^{n-k} \frac{a-x_j}{a-\tau_j} \frac{\tau_i - \tau_j}{x_i - x_j} \leq 7^k \exp\left(\frac{14}{3}(k-1) + \frac{23}{3}\right). \quad (1.3)$$

Наконец, для $j = n - k + 1, \dots, n$ имеем

$$\frac{a - x_j}{a - \tau_j} \leq \frac{2}{1 + \tau_k} < 1.05, \quad \frac{\tau_i - \tau_j}{x_i - x_j} \leq \frac{1}{\tau_k} < 1.1$$

и

$$\prod_{j=n-k+1}^n \frac{a - x_j}{a - \tau_j} \frac{\tau_i - \tau_j}{x_i - x_j} \leq 1.16^k. \quad (1.4)$$

Из неравенств (1.1), (1.3) и (1.4) получаем для $i = 0, 1, \dots, k - 1$

$$\frac{\omega_i(a)}{|\omega'(x_i)|} \leq 9 \cdot 195^{k-1} \exp(6k + 5) \frac{\varphi_i(a)}{|\varphi'(\tau_i)|}.$$

Случай 2: $k \leq i \leq n - k$. Если $0 \leq j \leq k - 1$, то, как и раньше,

$$\frac{a - x_j}{a - \tau_j} \leq 2 \frac{k - 1}{j}, \quad \prod_{j=1}^{k-1} \frac{a - x_j}{a - \tau_j} < \frac{(2e)^{k-1}}{4}. \quad (2.1)$$

С помощью неравенства (1.2) получаем

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left| \frac{\tau_i - \tau_j}{x_i - x_j} \right| \leq 7^k. \quad (2.2)$$

Если $k \leq j \leq n - k$, то, учитывая, что $a - \tau_i < 2(a - x_i)$, из оценки (5) получаем

$$\prod_{\substack{j=k \\ j \neq i}}^{n-k} \frac{a - x_j}{a - \tau_j} \leq 2e. \quad (2.3)$$

Для оценки произведения

$$\prod_{\substack{j=k \\ j \neq i}}^{n-k} \left| \frac{\tau_i - \tau_j}{x_i - x_j} \right| = p = p_1 p_2,$$

где

$$p_1 = \prod_{j=k}^{i-1} \frac{\tau_j - \tau_i}{x_j - x_i}, \quad p_2 = \prod_{j=i+1}^{n-k} \frac{\tau_i - \tau_j}{x_i - x_j},$$

заметим, что $|x_j - x_i| \geq |\tau_j - \tau_i| - (d_i + d_j)$ и $\tau_{i-1} - \tau_i \leq 3(x_{i-1} - x_i)$, $\tau_i - \tau_{i+1} \leq 3(x_i - x_{i+1})$; если же $j \leq i - 2$ или $j \geq i + 2$, то

$$\left| \frac{\tau_j - \tau_i}{x_j - x_i} \right| < 1 + 4h \frac{2}{|\tau_i - \tau_j|}.$$

Поэтому

$$p_1 \leq 3 \exp \left(8h \sum_{j=k}^{i-2} \frac{1}{\tau_j - \tau_i} \right), \quad p_2 \leq 3 \exp \left(8h \sum_{j=i+2}^{n-k} \frac{1}{\tau_i - \tau_j} \right).$$

Случаи $2i \leq n$ и $2i > n$ рассматриваются одинаково. Пусть $2i \leq n$. Для $j = k, k+1, \dots, n-i$ используем оценку снизу $|\tau_i - \tau_j| \geq 2|i-j|(i+j)/n^2$; если же $j = n-i+1, \dots, n-k$, то $\tau_i - \tau_j \geq 2(j-i)(2-(i+j)/n)/n$. Тогда получим

$$\sum_{j=k}^{i-2} \frac{1}{\tau_j - \tau_i} < \frac{n^2}{2i} \ln(i-k) < \frac{n^2}{6},$$

когда $i-2 \geq k$,

$$\sum_{j=i+2}^{n-i} \frac{1}{\tau_i - \tau_j} < \frac{3}{4}n^2, \quad \sum_{j=n-i+1}^{n-k} \frac{1}{\tau_i - \tau_j} < n^2.$$

Следовательно,

$$p \leq 3 \exp(16hn^2) < 3 \exp(79(k-1)). \quad (2.4)$$

Пусть теперь $j \geq n-k+1$. Тогда $a - x_j \leq 1.05(a - \tau_j)$,

$$\frac{\tau_i - \tau_j}{x_i - x_j} \leq \frac{\tau_i - \tau_j}{\tau_i - x_j - d_i} \leq 7$$

и

$$\prod_{j=n-k+1}^n \frac{a - x_j}{a - \tau_j} \frac{\tau_i - \tau_j}{x_i - x_j} \leq 7.35^k. \quad (2.5)$$

Собирая вместе оценки (2.1)–(2.5), имеем

$$\frac{\omega_i(a)}{|\omega'(x_i)|} \leq 103^{k-1} 192 \exp(80k-80) \frac{\varphi_i(a)}{|\varphi'(\tau_i)|}.$$

Случай 3: $n-k+1 \leq i \leq n$. Этот случай существенно не отличается от первого. Так как $195 < \exp(5.3)$ и $103 < \exp(4.7)$, то лемма доказана.

Следующее утверждение, получающееся с помощью доказанной леммы, понадобится в п. 4.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть F – замкнутое подмножество отрезка $[c, d]$, причем c и d являются крайними точками F , и ρ – длина наибольшего интервала множества $[c, d] \setminus F$. Если ρ и натуральное число n связаны неравенствами

$$2.5\pi^2 \leq \frac{2\rho n^2}{d-c} \leq 0.5n, \quad (6)$$

то найдутся точки $t_0, t_1, \dots, t_n$ из F такие, что для любого z , $z \notin [c, d]$,

$$\left| \frac{\tilde{\omega}_i(z)}{\tilde{\omega}'(t_i)} \right| \leq 13 \exp(38\rho n^2) \left| \frac{\varphi_i(a)}{\varphi'(\tau_i)} \right|, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

где

$$\tilde{\omega}(t) = (t-t_0)(t-t_1) \cdots (t-t_n), \quad \tilde{\omega}_i(t) = \frac{\tilde{\omega}(t)}{t-t_i},$$

$a = 1 + 2(z-d)/(d-c)$, φ и φ_i определены в лемме 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства сначала разберем случай $c = -1$, $d = 1$. Неравенства (6) обеспечивают существование k такого, что $6 \leq k-1 \leq n/8$ и

$$\frac{1 - \tau_{k-2}}{k-2} < 2\rho \leq \frac{1 - \tau_{k-1}}{k-1} = h. \quad (7)$$

Из условия на F и неравенств (7) следует, что любой отрезок из $[-1, 1]$ длины не меньше $h/2$ содержит хотя бы одну точку множества F .

Положим $x_0 = 1$, $x_n = -1$,

$$\begin{aligned} \tilde{h} &= \frac{2k-3}{2k-2}h, & z_i &= 1 - i\tilde{h}, & i &= 1, 2, \dots, k-2, \\ z_i &= -1 + (n-i)\tilde{h}, & i &= n-i, \dots, n-k+2; \end{aligned}$$

$z_i = \tau_i$ для остальных значений индекса.

Точки $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ выберем так, чтобы

$$x_{k-1} \in \left[\tau_{k-1}, \tau_{k-1} + \frac{h}{2} \right] \cap F, \quad x_{n-k+1} \in \left[\tau_{n-k+1} + \frac{h}{2}, \tau_{n-k+1} \right] \cap F;$$

для всех остальных i считаем

$$x_i \in \left[z_i - \frac{h}{4}, z_i + \frac{h}{4} \right] \cap F.$$

Построенные точки удовлетворяют всем требованиям леммы 1. Из левой части неравенства (7) следует, что

$$k-1 \leq \frac{4}{9}\rho n^2 + 1.$$

Следовательно (заметим, что $2\rho n^2/9 > 2.74$),

$$\left| \frac{\omega_i(z)}{\omega'(x_i)} \right| \leq 13 \exp(38\rho n^2) \left| \frac{\varphi_i(z)}{\varphi'(\tau_i)} \right|, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

После этого заменой

$$x = -1 + \frac{2}{d-c}(t-c)$$

переходим от заданного отрезка $[c, d]$ к $[-1, 1]$; в качестве t_i ($i = 0, 1, \dots, n$) берем прообразы точек x_i , $\tilde{\omega}(t) = (t-t_0) \cdots (t-t_n)$.

Тогда

$$\left| \frac{\tilde{\omega}_i(z)}{\tilde{\omega}'(t_i)} \right| = \left| \frac{\omega_i(a)}{\omega'(x_i)} \right|, \quad a = -1 + 2\frac{z-c}{d-c}.$$

Из леммы 1 без труда можно вывести оценку величины $V_n(E; a)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть n и k – натуральные числа такие, что $3 \leq k-1 \leq n/8$; $h = (1 - \tau_{k-1})/(k-1)$. Если множество $E_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [-1, 1]$, $x_0 = 1$, $x_n = -1$, удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \frac{h}{3} &\leq x_i - x_{i+1} \leq 2h, & i = 0, 1, \dots, k-2, n-k+1, \dots, n-1, \\ 0 &\leq x_{k-1} - \tau_{k-1} \leq 2h, & 0 \leq \tau_{n-k+1} - x_{n-k+1} \leq 2h, \\ |x_i - \tau_i| &\leq \min \left\{ 2h, \frac{1}{3}(\tau_{i-1} - \tau_i) \right\}, & i = k, k+1, \dots, n-k, \end{aligned}$$

то для любого множества E , содержащего E_0 , и $|a| > 1$ справедливо неравенство

$$V_n(E; a) \leq 72 \exp(85(k-1)) |T_n(a)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$V_n(E; a) \leq V_n(E_0; a) = \sum_{i=0}^n \left| \frac{\omega_i(a)}{\omega'(x_i)} \right|,$$

то, применяя лемму 1, получаем

$$V_n(E; a) \leq 72 \exp(85(k-1)) \sum_{i=0}^n \left| \frac{\varphi_i(a)}{\varphi'(\tau_i)} \right|.$$

Последняя сумма равна $|T_n(a)|$. Теорема 2 доказана.

Распространим доказанную теорему на более общую ситуацию.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $0.5 \leq \alpha \leq 1$; $E_0 = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subset [-\alpha, \alpha]$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{h}{3} &\leq t_i - t_{i+1} \leq \frac{3\alpha h}{2}, & i = 0, 1, \dots, k-2, n-k+1, \dots, n-1, \\ \alpha - t_0 &\leq \frac{\alpha h}{3}, & \alpha + t_n \leq \frac{\alpha h}{3}, \\ 0 &\leq t_{k-1} - \alpha \tau_{k-1} \leq \frac{3\alpha h}{2}, & 0 \leq \alpha \tau_{n-k+1} - t_{n-k+1} \leq \frac{3\alpha h}{2}, \\ |t_i - \alpha \tau_i| &\leq \alpha \min \left\{ \frac{3h}{2}, \frac{1}{6}(\tau_{i-1} - \tau_i) \right\}, & i = k, k+1, \dots, n-k. \end{aligned}$$

Тогда для любого z , $z \notin [t_n, t_0]$, и любого многочлена $p \in \mathcal{P}_n$ с нормой единица на множестве E_0 справедливо неравенство

$$|p(z)| \leq 72 \exp(85(k-1)) \left| T_n \left((1+h) \frac{z}{\alpha} \right) \right|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства рассмотрим сначала случай $\alpha = 1$ и линейной заменой перейдем от отрезка $[t_n, t_0]$ к $[-1, 1]$ и от полинома p к

$$Q(x) = p\left(x_n + \frac{x_0 - x_n}{2}(x + 1)\right).$$

Если $E = \{x_n, x_{n-1}, \dots, x_0\}$ – образ E_0 , то E удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Поэтому если $|b| > 1$, то

$$|Q(b)| \leq 72 \exp(85(k-1))T_n(|b|),$$

а для $b = -1 + 2(a - t_n)/(t_0 - t_n)$ имеем $|b| \leq (1+h)|a|$.

Для $\alpha < 1$ достаточно заменой $x = t/\alpha$ перейти от отрезка $[-\alpha, \alpha]$ к отрезку $[-1, 1]$.

3. В этом пункте оценим величину $W_n(E)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $3 \leq k-1 \leq n/8$, $h = (1 - \tau_{k-1})/(k-1)$, $u_j = \cos(j\pi/(4n))$ ($j = 0, 1, \dots, 4n$) и $\alpha = u_{6k-6}$. Если множество G_0 обладает свойствами:

1) на отрезке $[\alpha\tau_{k-1}, \alpha]$ существуют точки $y_0 > \dots > y_{k-1}$ из G_0 такие, что

$$\begin{aligned} \alpha - y_0 &\leq \frac{\alpha h}{3}, & y_{k-1} - \alpha\tau_{k-1} &\leq \frac{\alpha h}{2}, \\ \frac{\alpha h}{3} &\leq y_i - y_{i+1} \leq \frac{3\alpha h}{2}, & i &= 0, 1, \dots, k-2; \end{aligned}$$

2) в $G_0 \cap [-\alpha, -\alpha\tau_{k-1}]$ найдутся точки $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{k-1}$ такие, что

$$\begin{aligned} \alpha + \bar{y}_{k-1} &\leq \frac{\alpha h}{3}, & -\bar{y}_0 - \alpha\tau_{k-1} &\leq \frac{\alpha h}{2}, \\ \frac{\alpha h}{3} &\leq \bar{y}_i - \bar{y}_{i+1} \leq \frac{3\alpha h}{2}, & i &= 0, 1, \dots, k-2; \end{aligned}$$

3) для каждого $j = 4k-3, 4k-2, \dots, 4n-4k+3$ множество

$$G_0 \cap (\alpha u_j - d_j, \alpha u_j + d_j) \neq \emptyset,$$

где $d_j = \alpha \min\{3h/2, (u_{j-1} - u_j)/6\}$,

то для любого множества G , содержащего G_0 , справедливо неравенство

$$W_n(G) \leq 63 \exp(94(k-1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \in \mathcal{P}_n$, $\|p\|_G = 1$ и $\|p\|_{[-1,1]} = \|p\| = M = p(\bar{x})$. Отдельно рассмотрим два возможных варианта:

$$|\bar{x}| \in [\bar{y}_{k-1}, y_0] \quad \text{и} \quad |\bar{x}| \notin [\bar{y}_{k-1}, y_0].$$

В силу симметрии условий на G_0 достаточно считать $\bar{x} \geq 0$. Введем точки y_j для $j \geq k$, считая, что

$$y_j \in G_0 \cap (\alpha u_{3k+j-3} - d_{3k+j-3}, \alpha u_{3k+j-3} + d_{3k+j-3}),$$

когда $j = k, k+1, \dots, 4n-7k+6$, и

$$y_j = \bar{y}_{j-4n+7k-7}$$

для $j = 4n-7k+7, \dots, 4n-6k+6$.

Рассмотрим первый вариант. Если считать $t_i = y_i$, $t_{n-k+1+i} = \bar{y}_i$ при $i = 0, 1, \dots, k-1$ и для $j = k, k+1, \dots, n-k$ брать $t_j = y_{4j-3k+3}$, то точки $t_0, t_1, \dots, t_n$ удовлетворяют всем требованиям следствия теоремы 2 (по определению, точка t_j находится в окрестности $\alpha u_{4j} = \alpha \tau_j$). Поэтому

$$|p(\bar{x})| \leq 72 \exp(85(k-1)) \left| T_n \left(\frac{1+h}{\alpha} \right) \right|.$$

Так как

$$\left| T_n \left(\frac{1+h}{\alpha} \right) \right| < \left(\frac{1+h+\sqrt{(1+h)^2-\alpha^2}}{\alpha} \right)^n,$$

а $3 \leq k-1 \leq n/8$ и, вследствие этого,

$$h + \sqrt{(1+h)^2 - \alpha^2} \leq 1.2\sqrt{1-\alpha^2}, \quad \alpha^{-1} \leq 1 + 0.38 \sin \frac{3(k-1)\pi}{2n},$$

то

$$\left| T_n \left(\frac{1+h}{\alpha} \right) \right| < \exp(8.95(k-1)).$$

Значит,

$$|p(\bar{x})| \leq 63 \exp(94(k-1)). \quad (8)$$

Пусть теперь $0 \leq \bar{x} \leq y_0$. Найдем значение j такое, что $y_{j+1} < \bar{x} \leq y_j$. Обозначим через $\bar{y}$ ближайшую к $\bar{x}$ точку отрезка $[-\alpha, \alpha]$, в которой значение многочлена p равно 1. Так как $|p(y_i)| \leq 1$ для $i = j, j+1$, то $|\bar{x} - \bar{y}| \leq (y_{j+1} - y_j)/2$. Представим $p(\bar{x})$ в виде

$$p(\bar{x}) = 1 + p(\bar{x}) - p(\bar{y}) = 1 + p'(\theta)(\bar{x} - \bar{y}),$$

где θ находится между $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

Для оценки $p'(\theta)$ применим неравенство Бернштейна:

$$|p'(\theta)| \leq \frac{nM}{\sqrt{1-\theta^2}} \leq \frac{nM}{\sqrt{1-y_j^2}}.$$

Таким образом,

$$M \leq 1 + \frac{nM}{2} \frac{y_j - y_{j+1}}{\sqrt{1-y_j^2}}. \quad (9)$$

Докажем, что для любого $j = 0, 1, \dots, 2n-3k+2$ справедливо неравенство

$$\frac{y_j - y_{j+1}}{\sqrt{1-y_j^2}} \leq \frac{\pi}{2n}. \quad (10)$$

Пусть $0 \leq j \leq k-2$. Используя неравенства $y_j - y_{j+1} \leq 3\alpha h/2$, $1 - y_j^2 \geq 1 - \alpha^2$, получаем, что левая часть требуемого неравенства не превосходит дроби

$$\frac{3\pi \cos(3(k-1)\pi/(2n))}{2n \sin(3(k-1)\pi/(2n))},$$

которая, в свою очередь, не больше, чем $\pi/(2n)$.

Если $j = k-1$, то неравенство (10) получается с помощью соотношений

$$y_{k-1} - y_k \leq \alpha \left(u_{4k-4} + \frac{h}{2} - u_{4k-3} + \frac{1}{6}(u_{4k-4} - u_{4k-3}) \right),$$

$$u_{4k-4} - u_{4k-3} \leq \frac{25\pi}{48n} \sin \frac{(k-1)\pi}{2n}, \quad h \leq \frac{\pi}{n} \sin \frac{(k-1)\pi}{2n}$$

и $1 - y_{k-1}^2 > 1 - \alpha^2 = \sin^2(3(k-1)\pi/(2n))$.

Если же $j \geq k$, то, считая для краткости $3k + j - 3 = i$, имеем

$$y_j - y_{j+1} \leq \alpha(u_i - u_{i+1}) + \alpha \frac{u_i - u_{i+1}}{3},$$

или

$$y_j - y_{j+1} \leq \frac{\alpha\pi}{3n} \sin \frac{(i+1)\pi}{4n}.$$

Для знаменателя имеем

$$\sqrt{1 - y_j^2} > \alpha \sin \frac{(i-1)\pi}{4n}.$$

Следовательно, и в этом случае верно неравенство (10). Вместе с неравенствами (9) и (8) оно завершает доказательство теоремы 3.

В приложениях удобен следующий частный случай доказанной теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть F – замкнутое подмножество отрезка $[-1, 1]$. Если d – длина наибольшего интервала множества $[-1, 1] \setminus F$, $n \geq 24$ и

$$\frac{4}{3n^2} \leq d \leq \frac{9}{40n},$$

то для любого многочлена $p \in \mathcal{P}_n$ справедливо неравенство

$$\|p\|_{[-1,1]} \leq 7 \exp(157dn^2 + 94).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства сначала выбираем натуральное число k такое, что $3 \leq k-1 \leq n/8$ и

$$\frac{1 - \tau k - 2}{k - 2} \leq 7.5d \leq \frac{1 - \tau_{k-1}}{k - 1} = h.$$

Затем применяем неравенства (в принятых ранее обозначениях): $\alpha \leq 0.83$, $u_{4k-4} - u_{4k-3} > 3h/(2\pi)$, $3(k-1) \leq 5dn^2 + 3$ и теорему 3.

В частности, если

$$d = \frac{1}{m} \quad \text{и} \quad \frac{40n}{9} \leq m \leq \frac{3n^2}{4},$$

то

$$\|p\| \leq 7 \exp\left(94 + \frac{157n^2}{m}\right).$$

Заметим, что в этом следствии всюду число d может быть заменено на $2H$, где $H = H(F, [-1, 1])$ – хаусдорфово расстояние между множествами $F \subset [-1, 1]$ и $[-1, 1]$. Напомним, что *хаусдорфовым расстоянием* $H(E_1, E_2)$ между двумя ограниченными множествами E_1 и E_2 числовой прямой называется инфимум $r > 0$ таких, что E_1 и E_2 лежат в r -окрестности друг друга.

ЗАМЕЧАНИЕ. В формулировке следствия левое ограничение на d можно снять, если в его утверждающей части заменить d на $\bar{d} = \max\{4/(3n^2), d\}$. Следствие, очевидно, есть обобщение неравенства (1) из п. 1.

Установленные оценки для $V_n(E; a)$ и $W_n(E)$ являются неулучшаемыми по порядку в том смысле, что существует множество E , удовлетворяющее условиям теорем 2 и 3, для которого

$$V_n(E; 1+h) \geq \exp(c_1 k) \quad \text{и} \quad W_n(E) \geq \exp(c_2 k), \quad c_1, c_2 > 0.$$

Чтобы убедиться в этом для $i = 0, 1, \dots, k-1$, считаем $x_i = 1 - ih$, для $i = n-k+1, \dots, n$ положим $x_i = -1 + (n-i)h$ с $h = (1 - \tau_{k-1})/(k-1)$; если же $i = k, k+1, \dots, n-k$, то считаем, что выполняется условие $x_{k-1} > x_k > \dots > x_{n-k} > x_{n-k+1}$. Если $a = 1 + h$, $E = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $\omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$, то

$$V_n(E; a) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega_i(a)}{|\omega'(x_i)|} > \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\omega_i(a)}{|\omega'(x_i)|}.$$

Так как

$$\frac{\omega_i(a)}{|\omega'(x_i)|} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k-1} \frac{a - x_j}{|x_i - x_j|} \prod_{j=k}^n \frac{a - x_j}{x_i - x_j},$$

то

$$\frac{\omega_i(a)}{|\omega'(x_i)|} \geq \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j+1}{|i-j|} \geq C_k^{i+1}$$

и $V_n(E; a) \geq 2^k - 1$.

Из определения $W_n(E)$ следует, что для любого $p \in \mathcal{P}_n$ справедливо неравенство

$$\|p\| \leq W_n(E) \|p\|_E;$$

следовательно,

$$V_n(E; a) \leq W_n(E) |T_n(a)|.$$

Отсюда и из оценки снизу для $V_n(E; a)$ следует, что

$$W_n(E) > \frac{2^k - 1}{T_n(1+h)} > \frac{2^k - 1}{\exp(2\pi\sqrt{(k-1)/2})}.$$

4. Считая, что два натуральных числа n и N связаны неравенством $N > n$, для $r \geq 1$ и фиксированных точек $-1 = x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$ на множестве $\mathcal{P}_n$ определим три нормы

$$\|f\|_r = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^r dx \right)^{1/r}, \quad \|f\|_{r,N} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |f(x_i)|^r \right)^{1/r},$$

$$\|f\|_{C,r,N} = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} M_i^r \right)^{1/r}, \quad M_i = \max\{|f(x)| : x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

Если $r = \infty$, то

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{C,\infty,N} = \|f\|_{[-1,1]} \quad \text{и} \quad \|f\|_{\infty,N} = \max\{|f(x_i)| : 1 \leq i \leq N\}.$$

Для любого полинома f справедливо неравенство $\|f\|_{r,N} \leq \|f\|_{C,r,N}$, а если же $x_{i+1} - x_i \leq \theta/(N-1)$, то

$$\|f\|_r \leq \theta^{1/r} \|f\|_{C,r,N}. \quad (11)$$

В следующей теореме $\|f\|_{C,r,N}$ оценивается через $\|f\|_{r,N}$ и $\|f\|_r$.

ТЕОРЕМА 4. Если

$$\frac{40\theta}{9}n \leq N-1 \leq \frac{2\theta}{5\pi^2}n^2 \quad \text{и} \quad 0 < x_{i+1} - x_i \leq \frac{\theta}{N-1},$$

то для любого полинома $p \in \mathcal{P}_n$ выполняется неравенство

$$\|p\|_{C,r,N} \leq 96 \exp\left(93 + c(\theta) \frac{\theta n^2}{N-1}\right) \|p\|_{r,N},$$

где $c(\theta) = \max\{158, 38 + \sqrt{\theta}/2\}$. Если, кроме того, $x_{i+1} - x_i \geq \theta_0/N$ при любом $i = 1, 2, \dots, N-1$, то

$$\|p\|_{C,r,N} \leq \left(8\theta_0^{-1/r} + \frac{9c\theta^{(r-1)/r}n^2}{N}\right) \|p\|_r,$$

где постоянная c не зависит от n и N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \|p\|_{[-1,1]}$. Из определения $\|p\|_{r,N}$ следует, что для любого $i = 1, 2, \dots, N$ справедливо неравенство

$$|p(x_i)| \leq N^{1/r} \|p\|_{r,N},$$

из которого с помощью следствия теоремы 3 ($d = \theta/(N-1)$) получаем, что

$$M \leq \beta N^{1/r} \|p\|_{r,N}, \quad \beta = 7 \exp\left(94 + 157 \frac{\theta n^2}{N-1}\right).$$

Докажем теперь одно вспомогательное утверждение:

$$\|p\|_{C,r,N} \leq 4 \|p\|_{r,N} + \frac{\theta^{(r-1)/r}}{N} \|p'\|_r. \quad (12)$$

Пусть $M_i = p(\xi_i)$. Разобьем множество индексов на части: $E_1 = \{i : \xi_i = x_i\}$, $E_2 = \{i : \xi_i = x_{i+1}\}$ и $E_3 = \{i : x_i < \xi_i < x_{i+1}\}$. Слагаемые в сумме $M_1^r + M_2^r + \dots + M_{N-1}^r$, соответствующие E_1 , E_2 и E_3 , обозначаем последовательно через S_1 , S_2 и S_3 .

Так как

$$S_1 = \sum_{i \in E_1} |p(x_i)|^r, \quad S_2 = \sum_{i \in E_2} |p(x_{i+1})|^r,$$

то, применяя для оценки S_3 сначала неравенство Минковского

$$\left(\sum_i |p(\xi_i)|^r \right)^{1/r} - \left(\sum_i |p(x_i)|^r \right)^{1/r} \leq \left(\sum_i |p(\xi_i) - p(x_i)|^r \right)^{1/r},$$

а затем Гёльдера

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |p'(x)| dx \leq (x_{i+1} - x_i)^{(r-1)/r} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |p(x)|^r dx \right)^{1/r},$$

мы и получаем неравенство (12).

Для получения первого неравенства теоремы 4 оценим S_3 по-другому, для чего в E_3 различим части: $E_{31} = \{i \in E_3 : |x_{i+1}| \leq 2/3\}$ и $E_{32} = \{i \in E_3 : |x_i| \geq 1/3\}$; соответствующие им слагаемые обозначим через S_{31} и S_{32} (возможность пересечения E_{31} и E_{32} не исключается).

Оценка S_{32} . Достаточно рассмотреть случай, когда $x_i \geq 1/3$. Считая $[c, d] = [-1, x_i]$, применяем следствие леммы 1 и получаем

$$|p(\xi_i)| \leq \mu \sum_{j=0}^n \frac{\varphi_j(1 + 2(\xi_i - x_i)/(1 + x_i))}{|\varphi'(\tau_j)|} |p(x_{i,j})|,$$

где $\mu = 13 \exp(38\theta n^2/(N-1))$, $x_{i,j}$ — некоторые точки из набора $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$. Так как $\xi_i - x_i \leq \theta/(N-1)$, $4 \leq 3(1 + x_i)$, то

$$|p(\xi_i)| \leq \mu \sum_{j=0}^n \frac{\varphi_j(1 + 3\theta/(2N-2))}{|\varphi'(\tau_j)|} |p(x_{i,j})|.$$

Применяя неравенство треугольника для нормы, получаем

$$\begin{aligned} S_{32}^{1/r} &\leq \mu \sum_{j=0}^n \left[\sum_{i \in E_{32}} \left(\frac{\varphi_j(1 + 3\theta/(2N-2))}{|\varphi'(\tau_j)|} |p(x_{i,j})| \right)^r \right]^{1/r} \\ &\leq \mu \sum_{j=0}^n \frac{\varphi_j(1 + 3\theta/(2N-2))}{|\varphi'(\tau_j)|} \left(\sum_{i=1}^N |p(x_i)|^r \right)^{1/r}, \end{aligned}$$

или

$$S_{32}^{1/r} \leq \mu T_n \left(1 + \frac{3\theta}{2N-2} \right) \left(\sum_{i=1}^N |p(x_i)|^r \right)^{1/r}.$$

Можно подсчитать, что

$$T_n \left(1 + \frac{3\theta}{2N-2} \right) \leq \exp \left(\frac{2n\theta}{\sqrt{N-1}} \right).$$

Значит,

$$S_{32} \leq \mu^r \exp \left(\frac{2nr\theta}{\sqrt{N-1}} \right) \sum_{i=1}^N |p(x_i)|^r.$$

Оценка S_{31} . Считаем, что $x_i \geq 0$. Для $i \in E_3$ имеем $p'(\xi_i) = 0$. Поэтому

$$|p(\xi_i)| \leq |p(x_i)| + \frac{1}{2} |p''(\bar{\xi}_i)| (\xi_i - x_i)^2, \quad \bar{\xi}_i \in (x_i, \xi_i).$$

Из неравенства Бернштейна $|p'(x)\sqrt{1-x^2}| \leq nM$ следует (см. [12, с. 90, замечание])

$$\left| \frac{d}{dx} (p'(x)\sqrt{1-x^2}) \right| \sqrt{1-x^2} \leq Mn^2.$$

Следовательно,

$$|p''(x)| \leq \frac{2Mn^2}{1-x^2}, \quad -1 < x < 1.$$

Применяя это неравенство, получаем, что

$$|p(\xi_i)| \leq |p(x_i)| + \frac{Mn^2\theta^2}{(1-x_{i+1})(N-1)^2},$$

или, учитывая $i \in E_{32}$,

$$|p(\xi_i)| \leq |p(x_i)| + 3 \frac{Mn^2\theta^2}{(N-1)^2}.$$

Следовательно,

$$S_{31} \leq 2^{r-1} \sum_{i \in E_{31}} |p(x_i)|^r + \frac{1}{2} 6^r |E_{31}| \left(\frac{Mn^2\theta^2}{(N-1)^2} \right)^r.$$

Объединяя установленные оценки, с учетом неравенства $|E_{31}| \leq n-1$ получаем (возможность $x_i < 0$ не исключается, поэтому оценки для S_{31} и S_{32} удвоены)

$$\sum_{i=1}^{N-1} M_i^r \leq \left(2^r + 1 + 2\mu^r \exp \left(\frac{2rn\theta}{\sqrt{N-1}} \right) \right) \sum_{j=1}^N |p(x_j)|^r + 6^r (n-1) \left(\frac{Mn^2\theta^2}{(N-1)^2} \right)^r.$$

Отсюда, используя оценки

$$(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha, \quad \alpha \in [0, 1], \quad (2^r+1)^{1/r} \leq 3, \quad \frac{\theta n^{1/r}}{N-1} \leq \frac{9}{40},$$

$$\frac{2n\theta}{\sqrt{N-1}} < \frac{\sqrt{\theta}}{2} \frac{\theta n^2}{N-1}, \quad \frac{\theta n^2}{N-1} < \exp \left(\frac{\theta n^2}{N-1} - 1 \right),$$

можно получить первое требуемое неравенство. Чтобы установить второе из них, оценим $\|p\|_{r,N}$ через $\|p'\|_r$. Пусть

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |p(x)|^r dx = |p(a_i)|^r (x_{i+1} - x_i), \quad a_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

Используя неравенство $x_{i+1} - x_i \geq \theta_0/N$, во-первых, можно проверить, что

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} |p(a_i)|^r \right)^{1/r} \leq \frac{1}{\theta_0^{1/r}} \|p\|_r,$$

и, во-вторых, точно также, как при доказательстве неравенства (12), имеем

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} |p(x_i)|^r \right)^{1/r} \leq \frac{\theta^{(r-1)/r}}{N} \|p'\|_r + \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} |p(a_i)|^r \right)^{1/r}.$$

Такое же неравенство верно, когда слева вместо x_i имеем x_{i+1} . Поэтому

$$\|p\|_{r,N} \leq 2\theta_0^{-1/r} \|p\|_r + 2 \frac{\theta^{(r-1)/r}}{N} \|p'\|_r.$$

Вместе с (12) это неравенство показывает, что

$$\|p\|_{C,r,N} \leq 8\theta_0^{-1/r} \|p\|_r + 9 \frac{\theta^{(r-1)/r}}{N} \|p'\|_r.$$

Применение аналога неравенства Маркова в пространстве L_r (см., например, [13])

$$\|p'\|_r \leq cn^2 \|p\|_r$$

завершает доказательство теоремы 4.

СЛЕДСТВИЕ. Если $1 \leq r < q \leq \infty$, то для $p \in \mathcal{P}_n$ справедливы неравенства

$$\|p\|_q \leq c(r, q, \theta) \exp\left(c(\theta) \frac{\theta n^2}{N-1}\right) n^{2/r-2/q} \|p\|_{r,N}, \quad (13)$$

$$\|p\|_{C,q,N} \leq c(r, q) \left(8\theta_0^{-1/r} + \frac{9c\theta^{(r-1)/r} n^2}{N} \right) n^{2/r-2/q} \|p\|_r. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства надо применить известное неравенство (см. [14, с. 281])

$$\|p\|_q \leq c(r, q) n^{2/r-2/q} \|p\|_r,$$

теорему 4 и предшествующие ей неравенства.

Неравенства (13) и (14) для равноотстоящих узлов ранее были получены в работе [15]. Там же (см. неравенство (3.10)) доказано, что существует полином p_n такой, что $\|p_n\|_{2,N} \geq (n+1)/\sqrt{2N} \|p_n\|_2$. Используя идею доказательства теоремы 3.10.4 из книги [16], можно убедиться, что в первом неравенстве теоремы 4 множитель вида $\exp(cn^2/N)$ обязателен. Цитированная здесь теорема из [16] также доказывает необходимость множителя вида $\exp(cn^2/m)$ в частном случае следствия теоремы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дзялык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
- [2] Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Знакочувствительные аппроксимации (пространство знакочувствительных весов, жесткость и свобода системы) // Докл. РАН. 1993. Т. 332. № 6. С. 14–17.
- [3] Стечкин С. Б., Ульянов П. Л. Подпоследовательности сходимости рядов. Тр. МИАН. Т. 86. М.: Наука, 1965.
- [4] Бернштейн С. Н. Об одном классе интерполяционных формул // Собрание сочинений. Т. 2. М., 1954. С. 146–154.
- [5] Шарапудинов И. И. Об ограниченности в $C[-1, 1]$ средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье–Чебышева // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 1. С. 143–160.
- [6] Ehrlich H., Zeller K. Numerische Abschätzung von Polynomen // Z. Angew. Math. Mech. 1965. V. 45. P. T20–T22.
- [7] Ehrlich H. Polynomen zwischen Gitter-Punkten // Math. Z. 1966. V. 93. P. 144–153.
- [8] Coppersmith D., Rivlin T. J. The growth of polynomials of equally-spaced points // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 970–983.
- [9] Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.–Л., 1949.
- [10] Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Об определении чебышевских ужей // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1994. № 3. С. 49–59.
- [11] Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их приложение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
- [12] Привалов А. А. Теория интерполирования функций. Кн. 1. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1990.
- [13] Конягин С. В. Оценки производных от многочленов // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. № 5. С. 1116–1118.
- [14] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960.
- [15] Шарапудинов И. И. Об оценивании нормы алгебраического полинома по его значениям в узлах равномерной сетки // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 12. С. 135–156.
- [16] Шарапудинов И. И. Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения. Махачкала: ДГПУ, 1997.

Дагестанский государственный университет, г. Махачкала

Поступило
01.10.2000