Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, Об одном замечательном свойстве матрицы
Марка Каца, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 3, 356–
362

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm427>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 17:09:14

УДК 519.6

ОБ ОДНОМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ СВОЙСТВЕ МАТРИЦЫ МАРКА КАЦА

Х. Д. Икрамов

Треугольная подматрица, выделяемая специальным образом из матрицы Марка Каца, обладает замечательным спектральным свойством: при перестановке ее столбцов в обратном порядке половина собственных значений не меняется, а остальные умножаются на -1 . Этот факт, установленный автором ранее, не имел до сих пор объяснения. Такое объяснение дается в настоящей статье.

Библиография: 4 названия.

1. Матрицей Марка Каца порядка n называется (см. [1]) трехдиагональная матрица

$$S_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ n-1 & 0 & 2 & & & \\ & n-2 & 0 & 3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & 0 & n-1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Число n в дальнейшем считается четным: $n = 2m$.

Определим $n \times n$ матрицу-перестановку $U = (u_{ij})$ следующим образом:

$$u_{ij} = \delta_{i,k(j)}, \quad \text{где } k(j) = \begin{cases} 2j-1, & 1 \leq j \leq m, \\ 2(j-m), & m+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Здесь δ_{pq} – символ Кронекера. Подобие $S_n \rightarrow U^T S_n U$ преобразует S_n в матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & K_m \\ L_m & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$K_m = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 2m-2 & 3 & & & \\ & 2m-4 & 5 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & 2m-1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Именно матрица K_m (а не сама матрица Марка Каца) является предметом исследования в данной статье. Как было показано в [2], эта матрица обладает следующим

замечательным свойством: при изменении порядка ее столбцов на обратный половина собственных значений не меняется, а остальные умножаются на -1 . Сопоставим данный факт с тем, что, как правило, воздействие перестановки (только) столбцов матрицы (или только ее строк) на собственные значения предсказать невозможно.

Эффект предсказуемого изменения собственных значений матрицы K_m был зарегистрирован и доказан в [2], но причина, почему собственные значения изменяются именно таким образом, не была там объяснена. Это объяснение дается в настоящей статье.

2. Положим

$$\mathcal{P}_m = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}.$$

Собственными значениями матрицы K_m являются, очевидно, числа $1, 3, \dots, 2m-1$. Сформулируем точный результат, касающийся собственных значений матрицы

$$N_m = K_m \mathcal{P}_m.$$

ТЕОРЕМА 1. *Спектр матрицы N_m составляют числа*

$$2m-1, -(2m-3), 2m-5, -(2m-7), \dots, (-1)^{m-2}3, (-1)^{m-1}. \quad (2)$$

Если собственные значения матрицы K_m расположить в виде вектора λ_m с возрастающими компонентами, то спектр матрицы N_m можно характеризовать вектором $\mu_m = D_m \lambda_m$, где

$$D_m = \text{diag}((-1)^{m-1}, \dots, -1, 1, -1, 1).$$

Сформулируем вкратце наше объяснение теоремы 1 (его обоснованию посвящена остальная часть статьи). Как и любая квадратная матрица, K_m подобна своей транспонированной матрице. Для наших целей достаточно говорить о подобии над $\mathbb{R}$. Поскольку все собственные значения матрицы K_m различны, всякая матрица Q , трансформирующая K_m подобием в K_m^T , симметрична (см. [3], [4, с. 65]). В n -мерном многообразии таких матриц Q имеется единственная (с точностью до умножения на ненулевую константу) матрица Q_0 , обладающая дополнительными симметриями, а именно: нечетные, считая от конца, столбцы матрицы Q_0 симметричны, а четные, также считая от конца, кососимметричны. Напомним, что вектор $x \in \mathbb{R}^m$ называется *симметричным*, если $x = \mathcal{P}_m x$, и *кососимметричным*, если $x = -\mathcal{P}_m x$. Ясно, что симметричные (кососимметричные) векторы суть собственные векторы матрицы $\mathcal{P}_m$, отвечающие ее собственному значению 1 (-1).

Указанные выше свойства симметрии матрицы Q_0 обеспечивают справедливость матричного равенства

$$\mathcal{P}_m Q_0 = Q_0 D_m.$$

Из него выводим

$$\begin{aligned} N_m &= K_m \mathcal{P}_m = K_m (Q_0 D_m Q_0^{-1}) = (K_m Q_0) D_m Q_0^{-1} \\ &= (Q_0 K_m^T) D_m Q_0^{-1} = Q_0 (K_m^T D_m) Q_0^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, N_m подобна матрице $K_m^T D_m$. Последняя имеет спектр, указанный в (2).

3. Все матрицы Q такие, что

$$Q^{-1}K_m Q = K_m^T,$$

могут быть получены следующим образом. Пусть P – (какая-либо) невырожденная матрица, составленная по столбцам из собственных векторов матрицы K_m . Тогда

$$Q = PDP^T \quad (3)$$

для некоторой невырожденной диагональной матрицы D .

Собственные векторы треугольной матрицы K_m легко могут быть вычислены.

ТЕОРЕМА 2. *Нижнетреугольная $(m \times m)$ -матрица P с элементами*

$$p_{ij} = (-1)^{i-j} \binom{m-j}{i-j}, \quad i \geq j, \quad (4)$$

есть матрица собственных векторов для матрицы K_m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наряду с (1) рассмотрим матрицу

$$K_{m-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 2m-4 & 3 & & & \\ & 2m-6 & 5 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & 2m-3 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что для собственного вектора матрицы K_m , ассоциированного с собственным значением $2k-1$, где $k > 1$, первые $k-1$ компонент равны нулю. Остальные компоненты определяются из однородной системы линейных уравнений размера $(m-k) \times (m-k+1)$ с матрицей коэффициентов

$$\begin{bmatrix} 2(m-k) & 2 & & & \\ & 2(m-k-1) & 4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & 2(m-k) \end{bmatrix}.$$

Точно такая же система определяет ненулевые компоненты собственного вектора матрицы K_{m-1} , отвечающего собственному значению $2k-3$. Это означает, что матрица P_{m-1} собственных векторов для K_{m-1} вложена в P как нижняя угловая подматрица. Следовательно, теорема 2 будет доказана, если проверить, что вектор

$$w = \left(\binom{m-1}{0}, -\binom{m-1}{1}, \dots, (-1)^{m-1} \binom{m-1}{m-1} \right)^T \quad (5)$$

есть собственный вектор матрицы K_m , соответствующий собственному значению 1, т.е. что

$$K_m w = w. \quad (6)$$

Для вектора в левой части i -я компонента ($i > 1$) равна

$$2(m-i+1)(-1)^{i-2} \binom{m-1}{i-2} + (2i-1)(-1)^{i-1} \binom{m-1}{i-1}. \quad (7)$$

Используя известное соотношение

$$\binom{m-1}{i-2} = \frac{i-1}{m-i+1} \binom{m-1}{i-1},$$

приводим (7) к виду

$$(-1)^{i-1} \binom{m-1}{i-1},$$

что является i -й компонентой вектора w . Первые компоненты обоих векторов в (6) равны 1.

Отметим, что в зависимости от четности числа m вектор (5) симметричен либо кососимметричен. Согласно (3) первый столбец матрицы Q отличается от w лишь скалярным множителем, а потому имеет тот же тип симметрии, *какова бы ни была матрица D* . В следующих пунктах будет показано, что D можно выбрать так, чтобы и остальные столбцы в Q обладали симметрией либо косой симметрией.

4. Начнем с разбора случаев $m = 2$ и $m = 3$, где возможность найти нужную матрицу

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_m)$$

почти очевидна.

Для $m = 2$ имеем

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad Q = \begin{bmatrix} d_1 & -d_1 \\ -d_1 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}.$$

Второй столбец матрицы Q будет симметричен при $d_1 + d_2 = -d_1$, т.е. если

$$d_2 = -2d_1. \quad (8)$$

Получаемая при этом матрица Q с точностью до скалярного множителя равна

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Если $m = 3$, то

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad Q = \begin{bmatrix} d_1 & -2d_1 & d_1 \\ -2d_1 & 4d_1 + d_2 & -2d_1 - d_2 \\ d_1 & -2d_1 - d_2 & d_1 + d_2 + d_3 \end{bmatrix}.$$

Условие

$$d_2 = -4d_1 \quad (9)$$

необходимо для того, чтобы второй столбец в Q был кососимметричен: его средняя компонента должна быть нулевой. Условие (9) и достаточно, поскольку в этом случае третья компонента $-2d_1 - d_2 = 2d_1$ противоположна первой.

Для симметрии третьего столбца матрицы Q теперь нужно лишь, чтобы

$$d_1 = d_1 + d_2 + d_3,$$

т.е. чтобы

$$d_3 = 4d_1. \quad (10)$$

Опуская в соответствующей матрице Q множитель d_1 , получаем

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Более содержателен случай $m = 4$. Здесь

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$Q = \begin{bmatrix} d_1 & -3d_1 & 3d_1 & -d_1 \\ -3d_1 & 9d_1 + d_2 & -9d_1 - 2d_2 & 3d_1 + d_2 \\ 3d_1 & -9d_1 - 2d_2 & 9d_1 + 4d_2 + d_3 & -3d_1 - 2d_2 - d_3 \\ -d_1 & 3d_1 + d_2 & -3d_1 - 2d_2 - d_3 & d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \end{bmatrix}.$$

Условия симметрии для второго столбца

$$-3d_1 = 3d_1 + d_2, \quad 9d_1 + d_2 = -9d_1 - 2d_2$$

сводятся к одному равенству

$$d_2 = -6d_1. \quad (11)$$

С учетом (11) косая симметрия третьего столбца требует выполнения соотношений

$$3d_1 = -9d_1 + d_3, \quad 3d_1 = 15d_1 - d_3,$$

означающих, что

$$d_3 = 12d_1. \quad (12)$$

Вследствие (11) и (12) обе средние компоненты четвертого столбца равны $-3d_1$. Для его полной симметрии достаточно, чтобы

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = -d_1,$$

т.е. чтобы

$$d_4 = -8d_1. \quad (13)$$

Итак, с точностью до множителя d_1

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. То обстоятельство, что в проведенных выкладках различные соотношения для очередного элемента d_i всякий раз оказывались непротиворечивыми, можно объяснить с помощью тождеств, которым подчиняются биномиальные коэффициенты. Покажем это, анализируя первые шаги аналогичного процесса при произвольном m , считая, для определенности, что $m = 2k + 1$ – нечетное число.

Будем рассматривать матрицы P и Q как наборы из m столбцов:

$$P = [p_1 \dots p_m], \quad Q = [q_1 \dots q_m].$$

Поскольку число m нечетно, вектор p_1 симметричен (см. (5)). Согласно (3) имеем

$$q_2 = \alpha p_1 + \beta p_2, \quad (14)$$

где (см. (4))

$$\alpha = -(m-1)d_1, \quad \beta = d_2. \quad (15)$$

Определим инверсию m -мерного вектора x соотношением

$$\hat{x} = \mathcal{P}_m x.$$

Применяя инверсию к обеим частям равенства (14) и учитывая симметрию вектора p_1 , получаем

$$\hat{q}_2 = \alpha p_1 + \beta \hat{p}_2.$$

Чтобы q_2 был кососимметричным вектором, должно выполняться условие

$$\beta(p_2 + \hat{p}_2) = -2\alpha p_1. \quad (16)$$

Сравнивая первые компоненты и используя (15), находим

$$d_2 = -2(m-1)d_1. \quad (17)$$

Если $i \geq 2$, то i -я компонента левого вектора в (16) равна числу

$$d_2(-1)^i \left(\binom{m-2}{i-2} + \binom{m-2}{m-i-1} \right) = d_2(-1)^i \binom{m-1}{i-1} = -2\alpha(-1)^{i-1} \binom{m-1}{i-1},$$

т.е. i -й компоненте вектора $-2\alpha p_1$. Таким образом, справедливость равенства (16) обеспечивается соотношением (17). Его частными случаями являются равенства (8), (9) и (11).

Снова привлекая (3), имеем

$$q_3 = \gamma p_1 + \delta p_2 + \varepsilon p_3, \quad (18)$$

где

$$\gamma = \frac{(m-1)(m-2)}{2}d_1, \quad \delta = -(m-2)d_2, \quad \varepsilon = d_3. \quad (19)$$

Производя в (18) инверсию, получаем

$$\hat{q}_3 = \gamma p_1 + \delta \hat{p}_2 + \varepsilon \hat{p}_3.$$

Вектор q_3 будет симметричен, если

$$\delta p_2 + \varepsilon p_3 = \delta \hat{p}_2 + \varepsilon \hat{p}_3,$$

или

$$\delta(p_2 - \hat{p}_2) = -\varepsilon(p_3 - \hat{p}_3). \quad (20)$$

Сравнение первых компонент приводит к равенству $\delta = \varepsilon$, т.е.

$$d_3 = -(m-2)d_2 = 2(m-1)(m-2)d_1 = 4 \binom{m-1}{2} d_1. \quad (21)$$

Заметим, что это согласуется с (10) и (12).

Вторые компоненты векторов $p_2 - \hat{p}_2$ и $p_3 - \hat{p}_3$ равны соответственно $3-m$ и $m-3$, т.е. условие (20) выполняется при $\delta = \varepsilon$ и для вторых компонент. Наконец, при $i \geq 3$ находим

$$\begin{aligned} \{p_2 - \hat{p}_2\}_i &= (-1)^i \left(\binom{m-2}{i-2} - \binom{m-2}{m-i-1} \right) \\ &= (2i-m-1) \frac{(m-2)!}{(i-1)!(m-i)!} = -\{p_3 - \hat{p}_3\}_i. \end{aligned}$$

Итак, при $\delta = \varepsilon$ векторное равенство (20) справедливо.

Аналогичным образом обосновывается возможность выбора последующих элементов d_i , $i \geq 4$. Однако тождества для биномиальных коэффициентов, позволяющие такой выбор, с ростом i постепенно усложняются. Так, чтобы найти d_4 , нужно показать, что при некоторых коэффициентах λ, μ, ν, π имеет место векторное равенство

$$2\lambda p_1 + \mu(p_2 + \hat{p}_2) + \nu(p_3 + \hat{p}_3) + \pi(p_4 + \hat{p}_4) = 0. \quad (22)$$

Здесь

$$\lambda = -\binom{m-1}{3} d_1, \quad \mu = \binom{m-2}{2} d_2, \quad \nu = -\binom{m-3}{1} d_3, \quad \pi = d_4.$$

Само значение d_4 проще всего определить из сравнения первых компонент в (22) с использованием соотношений (17) и (21). Это дает

$$d_4 = -8 \binom{m-1}{3} d_1,$$

что согласуется (при $m=4$) с (13).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Taussky O., Todd J. Another look at a matrix of Mark Kac // Linear Algebra Appl. 1991. V. 150. P. 341–360.
- [2] Икрамов Х. Д. О матрицах, спектр которых предсказуемым образом реагирует на перестановки столбцов // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 3. С. 310–312.
- [3] Taussky O., Zassenhaus H. On the similarity transformation between a matrix and its transpose // Pacific J. Math. 1959. V. 9. № 3. P. 893–896.
- [4] Икрамов Х. Д. О конечных спектральных процедурах в линейной алгебре // Программирование. 1994. № 1. С. 56–69.