Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Коваль, Закон повторного логарифма для матрично-нормированных сумм независимых случайных векторов и его применение, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 3, 363–369

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm428>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 05:46:17

УДК 519.21

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ МАТРИЧНО-НОРМИРОВАННЫХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

В. А. Коваль

В работе исследуется закон повторного логарифма в $\mathbb{R}^d$ для сумм независимых случайных векторов, которые подвергаются преобразованию матрицами. Рассмотрено применение к многомерной линейной регрессии.

Библиография: 10 названий.

Пусть $\mathbb{R}^d$ – d -мерное евклидово пространство вектор-столбцов со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = x^T y$ и нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, где T – знак транспонирования. Норма матрицы A есть $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$, где $\lambda_{\max}(\cdot)$ – максимальное собственное значение матрицы. Если A – симметричная неотрицательно определенная матрица, то $\|A\| = \lambda_{\max}(A)$. Пусть $(X_n, n \geq 1)$ – последовательность независимых случайных векторов в $\mathbb{R}^d$ с нулевыми средними и $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1$. В данной работе исследуется закон повторного логарифма (ЗПЛ) для матрично-нормированных сумм $(A_n S_n, n \geq 1)$, где $(A_n, n \geq 1)$ – последовательность матриц размера $q \times d$. Ранее ограниченный ЗПЛ с матричными нормировками изучался в работе [1].

Рассмотрим сначала нормирование квадратными корнями $B_n^{-1/2}$ из обратных матриц B_n^{-1} к матрицам $B_n = E(S_n S_n^T), n \geq 1$. Здесь и далее предполагается, что матрица B_1 невырожденная и, следовательно, при всех $n > 1$ определены матрицы B_n^{-1} . Положим $t_n = \sqrt{2 \ln \ln \|B_n\|}$ для достаточно больших n .

ТЕОРЕМА 1. 1) *Предположим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n\| = \infty$ и выполняется условие*

$$\sum_{i=1}^n E \|B_n^{-1/2} X_i\|^3 = O\left(\frac{1}{\ln \|B_n\|}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Тогда с вероятностью 1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|B_n^{-1/2} S_n\|}{t_n} \leq 1. \quad (2)$$

2) *Если дополнительно к условиям пункта 1) выполнено условие*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|B_{n+1}\|}{\|B_n\|} < \infty,$$

то в (2) имеет место равенство.

Для доказательства первой части теоремы 1 нам понадобятся следующие три леммы.

ЛЕММА 1. При всех $m \leq n$ имеет место неравенство

$$\|B_m^{-1/2} B_n^{1/2}\|^2 \leq \frac{|B_n|}{|B_m|},$$

где $|\cdot|$ – определитель матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $B_m \leq B_n$ и

$$B_m^{-1/2} B_n B_m^{-1/2} = B_m^{-1/2} (B_n - B_m) B_m^{-1/2} + I,$$

где I – единичная матрица, то собственные значения λ_j матрицы $B_m^{-1/2} B_n B_m^{-1/2}$ удовлетворяют неравенству $\lambda_j \geq 1, j = 1, \dots, d$. Поэтому

$$\|B_m^{-1/2} B_n^{1/2}\|^2 = \lambda_{\max}(B_m^{-1/2} B_n B_m^{-1/2}) \leq \lambda_1 \cdots \lambda_d = |B_m^{-1/2} B_n B_m^{-1/2}| = \frac{|B_n|}{|B_m|}.$$

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть Z – стандартный гауссовский вектор в $\mathbb{R}^d$. Тогда при всех $t > \sqrt{2d}$ выполнено неравенство

$$P(\|Z\| > t) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}(t - \sqrt{2d})^2\right).$$

Лемма 2 есть следствие леммы 3.1 из [2].

ЛЕММА 3. При всех $t > 0$ имеет место оценка

$$|P(\|B_n^{-1/2} S_n\| > t) - P(\|Z\| > t)| \leq \frac{c}{t^3} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \|B_n^{-1/2} X_i\|^3,$$

где c – некоторая абсолютная константа.

Лемма 3 есть следствие теоремы 1 из [3] (см. также п. 6 работы [3]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем сначала первую часть теоремы. Последовательность $(|B_n|, n \geq 1)$ монотонно возрастает к бесконечности в силу условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n\| = \infty$$

и теоремы 3.6.3 [4]. Поэтому для произвольного $\lambda > 1$ найдется строго возрастающая последовательность натуральных чисел $(n_j, j \geq 1)$, удовлетворяющая неравенствам (см. [5, лемма 3.3])

$$\lambda |B_{n_j}| \leq |B_{n_{j+1}}| \leq \lambda^3 |B_{n_{j+1}}|. \quad (3)$$

В силу леммы Бореля–Кантелли для доказательства (2) достаточно показать, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\lambda > 1$ так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{\infty} P\left(\max_{n_j < n \leq n_{j+1}} \frac{\|B_n^{-1/2} S_n\|}{t_n} > 1 + 3\varepsilon\right) < \infty \quad (4)$$

(без ограничения общности предполагаем, что $\|B_{n_1}\| > e$). Фиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$\lambda = \left(\frac{1 + 2\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^{2/3}.$$

Существует $j_0 \geq 1$ такое, что $t_{n_j}^2 > 2d\lambda^3/\varepsilon^2$ при всех $j \geq j_0$. Заметим, что для любых $m \leq n$ из неравенства $B_m \leq B_n$ следует, что $\|B_n^{-1/2}x\| \leq \|B_m^{-1/2}x\|$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Воспользуемся неравенством Оттавиани (см. [2, лемма 6.2]), учитывая лемму 1, правое неравенство (3) и неравенство Чебышева (здесь $j \geq j_0$):

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\max_{n_j < n \leq n_{j+1}} \frac{\|B_n^{-1/2}S_n\|}{t_n} > 1 + 3\varepsilon \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left(\max_{n_j < n \leq n_{j+1}} \|B_{n_{j+1}}^{-1/2}S_n\| > (1 + 3\varepsilon)t_{n_j} \right) \\ & \leq \frac{\mathbb{P}(\|B_{n_{j+1}}^{-1/2}S_{n_{j+1}}\| > (1 + 2\varepsilon)t_{n_j})}{1 - \max_{n_j < n \leq n_{j+1}} \mathbb{P}(\|B_{n_{j+1}}^{-1/2}(S_{n_{j+1}} - S_n)\| > \varepsilon t_{n_j})} \\ & \leq \frac{\mathbb{P}(\|B_{n_{j+1}}^{-1/2}S_{n_{j+1}}\| > (1 + 2\varepsilon)\lambda^{-3/2}t_{n_j})}{1 - \max_{n_j < n \leq n_{j+1}} \mathbb{P}(\|B_{n_{j+1}}^{-1/2}(S_{n_{j+1}} - S_n)\| > \varepsilon\lambda^{-3/2}t_{n_j})} \\ & \leq \frac{\mathbb{P}(\|B_{n_{j+1}}^{-1/2}S_{n_{j+1}}\| > (1 + \varepsilon)t_{n_j})}{1 - d\lambda^3\varepsilon^{-2}t_{n_j}^{-2}} \leq 2\mathbb{P}(\|B_{n_{j+1}}^{-1/2}S_{n_{j+1}}\| > (1 + \varepsilon)t_{n_j}). \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства (4) достаточно показать, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\|B_{n_{j+1}}^{-1/2}S_{n_{j+1}}\| > (1 + \varepsilon)t_{n_j}) < \infty.$$

В силу леммы 3 это соотношение будет выполнено, если

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{t_{n_j}^3} \sum_{i=1}^{n_{j+1}} \mathbb{E} \|B_{n_{j+1}}^{-1/2}X_i\|^3 < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\|Z\| > (1 + \varepsilon)t_{n_j}) < \infty.$$

В свою очередь, в силу условия (1) и леммы 2 для этого достаточно соответственно показать, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln \|B_{n_j}\|)^{3/2} \ln \|B_{n_{j+1}}\|} < \infty \quad (5)$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\ln \|B_{n_j}\|)^{-(1+\varepsilon)^2(1-\delta_j)^2} < \infty, \quad (6)$$

где $\delta_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Используя левое неравенство (3), получаем оценку $\|B_{n_j}\| \geq \lambda^{(j-1)/d} |B_{n_1}|^{1/d}$, $j \geq 1$. Отсюда следуют соотношения (5) и (6).

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Так как

$$\|B_n^{-1/2}x\| \geq \frac{\|x\|}{\|B_n^{1/2}\|}$$

для любого $x \in \mathbb{R}^d$, для доказательства соотношения

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|B_n^{-1/2}S_n\|}{t_n} \geq 1 \quad \text{с вероятностью 1}$$

достаточно показать, что с вероятностью 1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n\|}{\|B_n\|^{1/2}t_n} \geq 1. \quad (7)$$

Из условий (1) и

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|B_{n+1}\|}{\|B_n\|} < \infty$$

следует выполнение условия (1.20) работы [6]. Поэтому в силу [6, теорема 1.2] имеет место (7).

Теорема 1 доказана.

Заметим, что в одномерном случае ($d = 1$) теорема 1 совпадает с теоремой 4 в работе [7, гл. 17].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства теоремы 1 следует, что в гауссовском случае условие (1) не требуется.

Пусть далее $(A_n, n \geq 1)$ – произвольная последовательность матриц размера $q \times d$ ($A_n \neq 0, n \geq 1$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n\| = \infty$ и выполнено условие (1). Тогда с вероятностью 1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|A_n S_n\|}{\|A_n B_n A_n^T\|^{1/2} t_n} \leq 1. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 1 в силу неравенства

$$\|A_n S_n\| \leq \|A_n B_n^{1/2}\| \cdot \|B_n^{-1/2} S_n\|$$

и тождества

$$\|A_n B_n^{1/2}\| = \|A_n B_n A_n^T\|^{1/2}.$$

Заметим, что матрица $A_n B_n A_n^T$ является ковариационной матрицей случайного вектора $A_n S_n$.

Для выяснения условий, при которых в соотношении (8) имеет место точное равенство, ограничимся для простоты гауссовским случаем, что позволяет, кроме того, накладывать наименее жесткие ограничения на последовательность $(A_n, n \geq 1)$. Введем обозначение

$$a_n = \|A_n B_n A_n^T\|^{1/2}, \quad n \geq 1.$$

Обозначим через $(e_n, n \geq 1)$ последовательность единичных векторов в $\mathbb{R}^q$, для которых $A_n B_n A_n^T e_n = a_n^2 e_n, n \geq 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(X_n, n \geq 1)$ – последовательность независимых центрированных гауссовских случайных векторов в $\mathbb{R}^d$ и выполнено следующее условие: найдется постоянная $c > 0$ и последовательность положительных чисел $(f_n, n \geq 1)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \infty, \quad (9)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} < \infty, \quad (10)$$

$$\ln \ln f_n \sim \ln \ln \|B_n\|, \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

и при всех $n > m \geq 1$ выполняется неравенство

$$\frac{\langle B_m A_m^T e_m, A_n^T e_n \rangle}{a_m a_n} \leq c \frac{f_m}{f_n}. \quad (12)$$

Тогда с вероятностью 1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|A_n S_n\|}{a_n t_n} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (9) и (11) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n\| = \infty$. Поэтому в силу теоремы 2 и замечания 1 с вероятностью 1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|A_n S_n\|}{a_n t_n} \leq 1.$$

Покажем, что с вероятностью 1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|A_n S_n\|}{a_n t_n} \geq 1. \quad (13)$$

Рассмотрим центрированную гауссовскую последовательность

$$(\zeta_n = \langle A_n^T e_n, S_n \rangle, \quad n \geq 1).$$

Заметим, что ее дисперсия $E\zeta_n^2 = a_n^2$, а коэффициент корреляции

$$r_{m,n} = \frac{\langle B_m A_m^T e_m, A_n^T e_n \rangle}{a_m a_n}, \quad n > m \geq 1.$$

В силу условий (9), (10) и (12) на основании пункта 2) теоремы из работы [8] заключаем, что с вероятностью 1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\langle A_n^T e_n, S_n \rangle|}{a_n \sqrt{2 \ln \ln f_n}} \geq 1. \quad (14)$$

Так как $\|A_n S_n\| \geq |\langle A_n^T e_n, S_n \rangle|$, $n \geq 1$, то из (11) и (14) следует (13).

Теорема 3 доказана.

В качестве примера применения теоремы 3 исследуем скорость сходимости оценок наименьших квадратов неизвестного параметра многомерной линейной регрессии с гауссовскими возмущениями. Аналогично, используя теорему 2, можно рассмотреть более общую ситуацию. Пусть результаты наблюдений $(Y_n, n \geq 1)$ имеют следующую структуру:

$$Y_n = \Phi_n^T \theta + Z_n, \quad n \geq 1,$$

где $(Z_n, n \geq 1)$ – последовательность независимых центрированных гауссовских случайных векторов в $\mathbb{R}^d$ с общей ковариационной матрицей $\sigma^2 I$ (σ^2 – положительное число); $(\Phi_n, n \geq 1)$ – последовательность матриц размера $d \times q$; θ – неизвестный параметр. Предположим, что матрицы $\psi_n = \sum_{j=1}^n \Phi_j \Phi_j^T$, $n \geq 1$, невырождены. Тогда оценки наименьших квадратов $\hat{\theta}_n$ параметра θ имеют следующий вид:

$$\hat{\theta}_n = \psi_n^{-1} \sum_{i=1}^n \Phi_i Y_i.$$

Если минимальные собственные значения матриц ψ_n удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(\psi_n) = \infty,$$

то с вероятностью 1

$$\|\hat{\theta}_n - \theta\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (15)$$

(см. [9, теорема 3]). Исследуем скорость сходимости в (15).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(\psi_n) = \infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{\min}(\psi_{n+1})}{\lambda_{\min}(\psi_n)} < \infty, \\ \ln \ln \lambda_{\min}(\psi_n) \sim \ln \ln \lambda_{\max}(\psi_n), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тогда с вероятностью 1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_{\min}(\psi_n)}{2\sigma^2 \ln \ln \lambda_{\min}(\psi_n)} \right)^{1/2} \|\hat{\theta}_n - \theta\| = 1. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\hat{\theta}_n - \theta = \psi_n^{-1} \sum_{i=1}^n \Phi_i Z_i$, для доказательства (16) нужно проверить условия теоремы 3, в которой $A_n = \psi_n^{-1}$, $B_n = \sigma^2 \psi_n$, $a_n = \sigma / \sqrt{\lambda_{\min}(\psi_n)}$ и векторы $(e_n, n \geq 1)$ удовлетворяют соотношению $\psi_n^{-1} e_n = (\lambda_{\min}(\psi_n))^{-1} e_n$. Нетрудно убедиться, что условие (12) выполнено с $c = 1$ и $f_n = \sqrt{\lambda_{\min}(\psi_n)}$, $n \geq 1$. Выполнение условия (11) очевидно.

Следствие доказано.

Отметим, что скорость сходимости в (15) покоординатно исследовалась в работах [9], [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Buldygin V., Solntsev S. Asymptotic Behaviour of Linearly Transformed Sums of Random Variables. Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [2] Ledoux M., Talagrand M. Probability in Banach Spaces. Berlin: Springer, 1991.
- [3] Ротарь В. И. Неравномерная оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме // Теория вероятн. и ее примен. 1970. Т. 15. № 4. С. 647-665.
- [4] Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.
- [5] Wittmann R. A general law of iterated logarithm // Z. Wahrscheinlichkeit. Verw. Gebiete. 1985. V. 68. № 4. P. 521-543.
- [6] Chen X. On the law of the iterated logarithm for independent Banach space-valued random variables // Ann. Probab. 1993. V. 21. № 4. P. 1991-2011.
- [7] Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
- [8] Коваль В. О. Про закон повторного логарифма для гауссових послідовностей та його застосування // Теор. ймовірност. матем. статист. 1996. № 54. С. 66-71.
- [9] Lai T. L. Some almost sure convergence properties of weighted sums of martingale difference sequences // Almost Everywhere Convergence II (Evanston, IL, 1989). Boston: Acad. Press, 1991. P. 179-190.
- [10] Lai T. L., Wei C. Z. A law of the iterated logarithm for double arrays of independent random variables with applications to regression and time series models // Ann. Probab. 1982. V. 10. № 2. P. 320-335.

Национальный технический университет Украины (КПИ), г. Киев
E-mail: luda@com.zt.ua

Поступило
03.10.2001
Исправленный вариант
13.02.2002