Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Мусин, Закон повторного логарифма для сумм экспоненциально стабилизирующихся функционалов, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 2, 234–245

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4297>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:44:15

Закон повторного логарифма для сумм экспоненциально стабилизирующихся функционалов

М. М. Мусин

Рассматриваются суммы экспоненциально стабилизирующихся функционалов, введенных Пенроузом и Юкичем, от пуассоновского точечного потока в d -мерном евклидовом пространстве. Асимптотическое поведение сумм исследуется при помощи случайного поля (заданного на решетке $\mathbb{Z}^d$), каждый элемент которого есть определенная сумма функционалов по соответствующему единичному кубу в $\mathbb{R}^d$. Для этого случайного поля получена экспоненциальная оценка убывания коэффициента сильного перемешивания и установлен закон повторного логарифма.

Библиография: 17 названий.

1. Введение и формулировка основного результата. В стохастической геометрии, теории массового обслуживания, анализе эпидемий и многих других областях используется теория точечных случайных потоков. Такие потоки, в частности, пуассоновский точечный поток, широко исследуются. Для них построена развитая теория (см., например, [1], [2]). В данной работе изучаются некоторые суммы функционалов от точек случайного потока, обладающие определенным ограничением на структуру зависимости.

Понятие стабилизации, в частности, экспоненциальной стабилизации, возникает в различных оптимизационных моделях, таких как триангуляция Делоне, мозаика Вороного и граф ближайших соседей, построенные для точек потока. Суть стабилизации заключается в том, что точки, находящиеся вне шара случайного радиуса, не влияют на значение функционала, берущегося от всей конфигурации точек потока. Точное определение будет дано ниже.

Функционалы, обладающие свойствами стабилизации, были впервые рассмотрены Пенроузом и Юкичем [3], [4]. В дальнейшем они были исследованы Пенроузом, Юкичем, Барышниковым, Эйчельбахером и другими (см., например, [3]–[7]). Для сумм такого рода функционалов Пенроузом и Юкичем были установлены слабый закон больших чисел [4], центральная предельная теорема [3] и оценка скорости сходимости к нормальному закону [7]. В статье [7] можно найти важные примеры экспоненциально стабилизирующихся функционалов. Работа [7] является обобщением более ранних результатов [8] для комбинаторных структур.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00373-а).

Цель данной статьи – установить закон повторного логарифма (ЗПЛ) для сумм экспоненциально стабилизирующихся функционалов от стационарного пуассоновского потока, а также оценить коэффициент сильного перемешивания для случайных полей, порожденных данными функционалами. Последний результат не только облегчает доказательство ЗПЛ, но представляет и самостоятельный интерес, так как выявляет связь между двумя условиями зависимости: экспоненциальной стабилизацией и перемешиванием.

Рассмотрим пуассоновский точечный поток Π на $\mathbb{R}^d$, имеющий постоянную интенсивность $\lambda = 1$. Напомним ряд понятий и дадим необходимые определения. Все используемые случайные элементы считаются заданными на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Пусть $B_R(x)$ – замкнутый шар радиуса $R > 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^d$, т.е. $B_R(x) = \{y : \rho(x, y) \leq R\}$, где $\rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i|$ – метрика в пространстве $\mathbb{R}^d$. *Мерой Радона* в пространстве $\mathbb{R}^d$ называется дискретная мера, значение которой на любых ограниченных борелевских множествах конечно. В пространстве мер Радона можно ввести метрику так, чтобы оно стало полным сепарабельным (см., например, [2]). Мы будем отождествлять меры Радона с их локально-конечными носителями. *Точечным потоком* называется носитель случайного элемента $\mu(\cdot)$ в пространстве мер Радона (см., например, [1]).

Введем функционал $\xi(x, \mathcal{X})$, где $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{X}$ – локально-конечное множество в $\mathbb{R}^d$. Другими словами, $\xi(\cdot, \cdot)$ является измеримым отображением в $\mathbb{R}$ из произведения $\mathbb{R}^d$ и пространства мер Радона.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [9]. Для любого локально-конечного множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ и любого $x \in \mathbb{R}^d$, назовем *радиусом стабилизации* функционала $\xi = \xi(x, \mathcal{X})$ величину $R = R(x, \mathcal{X}) > 0$ такую, что для любого натурального числа $r > R$ выполняются равенства

$$\xi(x, \{x\} \cup \mathcal{X} \cap B_r(x)) = \xi(x, \{x\} \cup \mathcal{X}).$$

Если такого конечного R не существует, то положим $R = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [9]. Семейство функционалов $\xi = \xi(x, \cdot)$, $x \in \mathbb{R}^d$, *экспоненциально стабилизируется*, если его радиус стабилизации п.н. конечен, и для всех $t \geq 0$ и некоторых положительных постоянных C и c справедливо неравенство

$$\tau(t) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} P(R(x, \{x\} \cup \Pi) > t) < Ce^{-ct}. \quad (1)$$

Говорят, что функционал ξ *трансляционно инвариантен*, если $\xi(x + y, \mathcal{X} + y) = \xi(x, \mathcal{X})$ для любого $y \in \mathbb{R}^d$, где множество $\mathcal{X} + y = \{x + y : x \in \mathcal{X}\}$.

Положим

$$Q_i = \{x \in \mathbb{R}^d : i - 1 \leq x < i\}, \quad i \in \mathbb{Z}^d.$$

Здесь, как всегда, для $x, y \in \mathbb{R}^d$ запись $x \leq y$ означает $x_i \leq y_i$, $i = 1, \dots, d$ (аналогично $x < y$ означает $x_i < y_i$, $i = 1, \dots, d$). Рассмотрим случайное поле

$$X_i = \sum_{x \in \Pi \cap Q_i} \xi(x, \Pi), \quad i \in \mathbb{Z}^d. \quad (2)$$

Мы будем изучать функционалы, обладающие следующими свойствами:

(A1) ξ – трансляционно инвариантен;

- (A2) ξ – экспоненциально стабилизируется;
 (A3) $E X_0 = 0$;
 (A4) $E |X_0|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta \in (0, 1]$.

Примерами таких функционалов являются (после соответствующей нормировки) расстояние до ближайшего соседа, площадь и периметр ячейки мозаики Вороного в $\mathbb{R}^2$ и другие (см., например, [7]).

Напомним определение коэффициента сильного перемешивания. Для σ -алгебр $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ обозначим

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} |P(AB) - P(A)P(B)|.$$

Для $r > 0$, $u, v \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и случайного поля $X = \{X_i, i \in \mathbb{Z}^d\}$, определим согласно [10] коэффициенты сильного перемешивания

$$\alpha(r, u, v) = \sup \alpha(\sigma\{X_i, i \in I\}, \sigma\{X_j, j \in J\}), \quad (3)$$

где верхняя грань берется по всем конечным множествам $I, J \subset \mathbb{Z}^d$ таким, что $\rho(I, J) \geq r$, $|I| \leq u$, $|J| \leq v$, $|I|$ – число элементов множества I .

ТЕОРЕМА 1. Пусть функционал ξ удовлетворяет условиям (A1) и (A2). Тогда коэффициенты перемешивания поля $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ допускают оценку

$$\alpha(r, u, v) \leq C(u \wedge v)e^{-cr},$$

где положительные постоянные C и c не зависят от u, v и r , $\wedge$ обозначает минимум из двух чисел.

Следуя [11], для некоторого $\tau > 0$ рассмотрим множество

$$G_\tau = \left\{ n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d : n_i > \prod_{j \neq i} n_j^\tau, i = 1, \dots, d \right\}.$$

Далее запись $n \rightarrow \infty$ будет обозначать, что $n_i \rightarrow \infty$, $i = 1, \dots, d$.

ТЕОРЕМА 2 (Закон повторного логарифма). Пусть функционал ξ обладает свойствами (A1)–(A4) и выполняется условие

$$\sigma^2 := \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \text{cov}(X_0, X_i) > 0. \quad (4)$$

Тогда справедливо предельное соотношение

$$\limsup_{n \rightarrow \infty, n \in G_\tau} \frac{\sum_{1 \leq j \leq n} X_i}{\sqrt{2d\sigma^2 \langle n \rangle \log \log \langle n \rangle}} = 1 \quad \text{н.н.},$$

где $\langle n \rangle = n_1 \cdots n_d$.

Доказательства основных и вспомогательных результатов даны в п. 2.

2. Доказательства. Нам понадобятся новые обозначения. Для $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^d$ положим

$$\rho(B_1, B_2) = \inf\{\rho(x, y) : x \in B_1, y \in B_2\}.$$

Для $B \subset \mathbb{R}^d$ введем

$$B^{(r)} := \{x : \rho(\{x\}, B) \leq r\}, \quad \text{где } r > 0.$$

Границей дискретного множества $D \subset \mathbb{Z}^d$ назовем множество

$$\partial D = \{j \in D : \rho(\{j\}, \mathbb{Z}^d \setminus D) = 1\}.$$

Всюду далее C и c будут обозначать положительные множители, значение которых может меняться от формулы к формуле. Величины C и c могут, вообще говоря, зависеть от d , функции $\tau(\cdot)$, введенной в (1), постоянной $\delta > 0$, фигурирующей в условии (A4) и от моментов случайной величины X_0 .

Пусть $\bar{G} := \Omega \setminus G$ для события G , $I(G)(\omega)$ – индикатор G . Определим для любых $j \in \mathbb{Z}^d$ и $r > 0$ события

$$G(j, r) = \left\{ R(x, \Pi \cup \{x\}) \leq \frac{r-1}{2} \text{ для всех } x \in \Pi \cap Q_j \right\},$$

где $R(x, \mathcal{X})$ – те же, что в (1). Здесь значение $(r-1)/2$ выбрано для упрощения формулировок и доказательств, в частности, следующего результата.

ЛЕММА 1. Пусть функционал ξ обладает свойствами (A1) и (A2). Тогда для любого $j \in \mathbb{Z}^d$ существуют такие случайные величины X'_{jr} , измеримые относительно $\sigma\{\Pi(H), H \subset Q_j^{(r-1)/2}\}$, для которых $X'_{jr} I(G(j, r)) = X_j I(G(j, r))$. При этом

$$P(\overline{G(j, r)}) \leq C e^{-cr}, \quad r > 0, \quad (5)$$

где C и c не зависят от j и r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случайные величины

$$X'_{jr} := \sum_{x \in \Pi \cap Q_j} \xi(x, \Pi \cap B_{r/2-1/2}(x)), \quad j \in \mathbb{Z}^d, \quad r > 0.$$

Из определения события $G(j, r)$ следует, что $X'_{jr} I(G(j, r)) = X_j I(G(j, r))$. Таким образом, первая часть леммы 1 доказана. Остается получить (5). Оценим вероятность события $\overline{G(j, r)}$ при помощи формулы Кэмпбелла–Сливняка (см., например, [2]) для пуассоновского потока постоянной интенсивности 1. Имеем

$$\begin{aligned} P(\overline{G(j, r)}) &= P\left(\exists x \in \Pi \cap Q_j : R(x, \Pi) > \frac{r-1}{2}\right) \\ &= E \sup_{x \in \Pi \cap Q_j} I\left(R(x, \Pi) > \frac{r-1}{2}\right) \leq E \sum_{x \in \Pi \cap Q_i} I\left(R(x, \Pi) > \frac{r-1}{2}\right) \\ &= E \int_{Q_i} I\left(R(x, \Pi) > \frac{r-1}{2}\right) d\Pi = \int_{Q_i} E I\left(R(x, \Pi \cup \{x\}) > \frac{r-1}{2}\right) dx \\ &\leq \sup_{x \in Q_i} P\left(R(x, \Pi \cup \{x\}) > \frac{r-1}{2}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Правая часть (6) оценивается при помощи (1), что дает (5).

Введем для $D \subset \mathbb{Z}^d$ и $r > 0$ событие $G(D, r) = \bigcap_{j \in D} G(j, r)$. Из леммы 1 немедленно вытекает оценка

$$P(\overline{G(D, r)}) \leq |D| C e^{-cr}, \quad r > 0. \quad (7)$$

Пусть множество

$$[m, n] := [m_1, n_1] \times \cdots \times [m_d, n_d] \cap \mathbb{Z}^q,$$

где $m, n \in \mathbb{Z}^q$, $m \leq n$, $q \in \mathbb{N}$. Для произвольного конечного множества $D \subset \mathbb{Z}^d$ положим $S(D) = \sum_{i \in D} X_i$. Для $n \in \mathbb{N}^d$ обозначим $S_n := S([1, n])$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем, пользуясь структурой зависимости пуассоновского потока Π , мы сможем заменить набор случайных величин $\{X_i, i \in D\}$ на r -зависимый набор $\{X'_{ir}, i \in D\}$, совпадающий с исходным на событии $G(D, r)$, имеющем большую вероятность.

Для $n \in \mathbb{N}^d$ введем величину $\rho_n = [b \log \langle n \rangle]$, где $[\cdot]$ – целая часть числа, постоянная $b > 0$ будет выбрана позднее. Пусть $G_n := G([1, n], \rho_n)$. Из (7) следует, что

$$P(\overline{G_n}) \leq C \langle n \rangle e^{-c\rho_n} \leq C \langle n \rangle^{-2d}, \quad n \in \mathbb{N}^d, \quad (8)$$

где последнее неравенство получено за счет выбора достаточно большого b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для произвольных $r > 0$, $u, v \in \mathbb{N}$ оценим коэффициент $\alpha(r, u, v)$. Без ограничения общности можем считать, что $u \leq v$, $u < \infty$. Пусть $I, J \subset \mathbb{Z}^d$, $|I| \leq u$, $|J| \leq v$, $\rho(I, J) > r$. Для любых $D \subset \mathbb{R}^d$ и $s > 0$ положим $G(D, s) := G(D \cap \mathbb{Z}^d, s)$. Рассмотрим события $G(I, r)$ и $\bigcap_{m \geq r} G(I^{(m)} \setminus I^{(m-1)}, m)$. Очевидно, $J \subset \mathbb{Z}^d \setminus I^{(r)}$ и событие $\bigcap_{m \geq r} G(I^{(m)} \setminus I^{(m-1)}, m)$ влечет событие $G(J, r)$. Обозначим

$$E = G(I, r) \cap G(J, r) = G(I \cup J, r).$$

Рассмотрим векторы X_I и X_J , составленные соответственно из случайных величин $\{X_i, i \in I\}$ и $\{X_j, j \in J\}$. События $A \in \sigma\{X_I\}$ и $B \in \sigma\{X_J\}$ могут быть представлены в виде $A = \{X_I \in D_1\}$ и $B = \{X_J \in D_2\}$, где $D_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{|I|})$, $D_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{|J|})$. По замечанию 1 мы можем заменить случайные векторы X_I , X_J на независимые векторы $X'_{Ir} = (X'_{ir})_{i \in I}$, $X'_{Jr} = (X'_{jr})_{j \in J}$ так, чтобы $X'_{ir} \mathbf{I}(E) = X_i \mathbf{I}(E)$, $i \in I \cup J$. Обозначим

$$A' := \{X'_{Ir} \in D_1\}, \quad B' := \{X'_{Jr} \in D_2\}.$$

Таким образом, справедливы соотношения

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq |P(A'B') - P(A')P(B')| + 2P(\overline{E}) = 2P(\overline{E}). \quad (9)$$

Учитывая (9), для оценки $\alpha(\sigma\{X_I\}, \sigma\{X_J\})$ достаточно воспользоваться неравенствами

$$\begin{aligned} P(\overline{E}) &\leq P(\overline{G(I, r)}) + \sum_{m \geq r} P(\overline{G(I^{(m)} \setminus I^{(m-1)}, m)}) \\ &\leq C \left(|I| e^{-cr} + \sum_{m \geq r} |I| m^{d-1} e^{-cm} \right) \leq C |I| e^{-cr/2}, \end{aligned}$$

где предпоследнее неравенство получено в силу леммы 1, величина C не зависит от множества I и от r . Осталось заметить, что $|I| \leq u = u \wedge v$.

Перед доказательством теоремы 2 докажем несколько вспомогательных утверждений. Предположим, что всюду далее выполняются ее условия. Следующая лемма немедленно следует из неравенства Розенталь (см., например, [12; с. 26]) и теоремы Морица [13].

ЛЕММА 2. Для любого конечного $D \subset \mathbb{Z}^d$ имеем $\mathbb{E}|S(D)|^{2+\delta} \leq C|D|^{1+\delta/2}$, а для любого $n \in \mathbb{N}^d$ справедливо неравенство

$$\mathbb{E} \max_{1 \leq m \leq n} |S_m|^{2+\delta} \leq C\langle n \rangle^{1+\delta/2},$$

где множители C и c не зависят от D и n .

ЛЕММА 3. Для любого конечного множества $D \subset \mathbb{Z}^d$ верна оценка

$$\left| \frac{\mathbb{E} S(D)^2}{\sigma^2 |D| - 1} \right| \leq C \frac{|\partial D|}{|D|} \log^{2d} \frac{|D|}{|\partial D|}, \quad (10)$$

где C не зависит от множества D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случайного поля $X = \{X_i, i \in \mathbb{Z}^d\}$ из теоремы 1 и условия (A4) при помощи известного ковариационного неравенства (см., например, [12; с. 9]) легко получить следующую оценку:

$$|\text{cov } X_i, X_j| \leq C e^{-c\rho(i,j)}, \quad i, j \in \mathbb{Z}^d, \quad (11)$$

где C и c зависят лишь от δ и $\mathbb{E}|X_i|^{2+\delta}$. Благодаря этой оценке мы сразу получаем конечность σ^2 .

Заметим, что

$$|\text{Var } S(D) - \sigma^2 |D|| \leq \left| \sum_{i \in D} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d \setminus D} \text{cov } X_i, X_j \right|. \quad (12)$$

Аналогично [14; гл. 3, § 1], разбивая каждую сумму на две (относя в одну из них те i, j , для которых $\rho(i, j) < m_D := \lceil c^{-1} \log |D| / |\partial D| \rceil$, а в другую – все остальные) и используя (11), приходим к (10).

ЛЕММА 4 [15]. Пусть центрированное случайное поле $X = \{X_i, i \in \mathbb{Z}^d\}$ таково, что

$$L := \sup_j \mathbb{E}|X_j|^{2+\delta} < \infty \quad \text{и} \quad \alpha(r, u, v) \leq (u + v)^p e^{-cr}, \quad p > 0.$$

Пусть $D \subset \mathbb{Z}^d$ – произвольное конечное множество. Тогда для некоторой постоянной C , значение которой зависит от величины p и не зависит от множества D , верна оценка

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left(\frac{S(D)}{\sqrt{\text{Var } S(D)}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \\ & \leq C \left[\frac{L|D|}{(\text{Var } S(D))^{1+\delta/2}} \log^{d(1+\delta)} |D| + \frac{L^{2/(2+\delta)} |D|^{1/2}}{\text{Var } S(D)} \log^{1+dp\delta/(4+2\delta)} |D| \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Воспользуемся следующей элементарной оценкой (см., например, [16; с. 161]):

$$|\Phi(px) - \Phi(x)| \leq C(p-1) \vee (p^{-1} - 1), \quad p > 0. \quad (14)$$

С помощью лемм 3, 4 и неравенства (14) легко получить следующие две леммы.

ЛЕММА 5. Для любого конечного $D \subset \mathbb{Z}^d$ имеем

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left(\frac{S(D)}{|\sigma| |D|^{1/2}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq C |D|^{-1/2} \log^{1+d\delta} |D| + C \frac{|\partial D|}{|D|} \log^{2d} \frac{|D|}{|\partial D|},$$

где C не зависит от D .

ЛЕММА 6. Пусть $a_l \sim \sqrt{2\sigma^2 l d \log \log l}$, $l \rightarrow \infty$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ и любого конечного $D \subset \mathbb{Z}^d$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S(D)| \geq (1 + \varepsilon) a_{|D|}) &\leq C (\log |D|)^{-d(1+\varepsilon/2)} + C \frac{|\partial D|}{|D|} \log^{2d} \frac{|D|}{|\partial D|}, \\ \mathbb{P}(|S(D)| \geq (1 - \varepsilon) a_{|D|}) &\geq C (\log |D|)^{-d(1-\varepsilon/2)} - C \frac{|\partial D|}{|D|} \log^{2d} \frac{|D|}{|\partial D|}, \end{aligned} \quad (15)$$

где величина C не зависит от множества D , но может зависеть от ε и последовательности $(a_l)_{l \in \mathbb{N}}$.

ЛЕММА 7. Пусть $a_l \sim (1 + \varepsilon) \sqrt{2\sigma^2 d l \log \log l}$, при $l \rightarrow \infty$, $l \in \mathbb{N}$, для некоторого $\varepsilon \in (0, 1)$; последовательность $(\beta_l)_{l \in \mathbb{N}}$ такова, что $\beta_l = o(a_l)$, $l/\beta_l^2 \rightarrow 0$, $l \rightarrow \infty$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо следующее максимальное неравенство:

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq m \leq n} |S_m| \geq a_{\langle n \rangle} \right) \leq 2^d \mathbb{P}(|S_n| \geq a_{\langle n \rangle} - 2d\beta_{\langle n \rangle}) + C \langle n \rangle^{-\nu} \quad (16)$$

при всех достаточно больших $n \in G_\tau$ и некотором $\nu > 0$, где C не зависит от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно убедиться, что для любого $n \in G_\tau$, $q = 1, \dots, d$ и некоторого $\nu > 0$ верно неравенство

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\max\{|S_{(m_1, \dots, m_q, n_{q+1}, \dots, n_d)}| : 1 \leq m_p \leq n_p, 1 \leq p \leq q\} \geq a_{\langle n \rangle}) \\ &\leq 2 \mathbb{P}(\max\{|S_{(m_1, \dots, m_{q-1}, n_q, \dots, n_d)}| : 1 \leq m_p \leq n_p, 1 \leq p < q\} \geq a_{\langle n \rangle} - 2\beta_{\langle n \rangle}) \\ &\quad + C \langle n \rangle^{-\nu}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17) и индукции по d следует (16), поскольку $a_l - 2\beta_l \sim a_l$ при $l \rightarrow \infty$, $l \in \mathbb{N}$.

Следуя [17], для фиксированного $q \geq 2$ рассмотрим величины

$$S_{m_1, \dots, m_{q-1}}(m_q) = \sum_{J_1^{m_1, \dots, m_{q-1}}} Y_{(j_1, \dots, j_{q-1}, m_q)}^q, \quad 1 \leq m_p \leq n_p, \quad 1 \leq p \leq q,$$

где $J_1^{m_1, \dots, m_{q-1}} = \{(j_1, \dots, j_{q-1}) : 1 \leq j_p \leq m_p\}$, и

$$Y_{(j_1, \dots, j_q)}^q = \sum_{J_2} X_{(j_1, \dots, j_q, i_{q+1}, \dots, i_d)}, \quad 1 \leq j_p \leq n_p, \quad 1 \leq p \leq q,$$

где $J_2 = \{(i_{q+1}, \dots, i_d) : 1 \leq i_p \leq n_p\}$.

Введем случайные векторы размерности $n_1 \cdots n_{q-1}$

$$U_t := (S_{m_1, \dots, m_{q-1}}(t) : (m_1, \dots, m_{q-1}) \in J_1), \quad 1 \leq t \leq n_q, \quad t \in \mathbb{N},$$

где $J_1 = J_1^{n_1, \dots, n_{q-1}}$, и положим

$$V_t := U_1 + \dots + U_t = (S_j : j \in J_1 \times (t, n_{q+1}, \dots, n_d)). \quad (18)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\max_{1 \leq t \leq n_q} \|V_t\| &= \max\{|S_j| : j \in J_1 \times [1, n_q] \times (n_{q+1}, \dots, n_d)\}, \\ \|V_{n_q}\| &= \max\{|S_j| : j \in J_1 \times (n_q, n_{q+1}, \dots, n_d)\},\end{aligned}\quad (19)$$

где $\|\cdot\|$ обозначает максимальную норму $(n_1 \cdots n_{q-1})$ -мерного вектора.

Заметим, что при наступлении события G_n случайные векторы V_t , $V_{n_q} - V_{t+\rho_n}$ могут быть заменены на независимые V'_t и $V'_{n_q} - V'_{t+\rho_n}$, так как множества индексов, по которым ведется суммирование в (18), разделены “слоями”

$$D_t^q = J_1 \times [t+1, t+\rho_n] \times J_2 \subset [1, n] \subset \mathbb{N}^d, \quad 1 \leq t \leq n_q - \rho_n.$$

Пусть $\rho_n^q := (0, \dots, 0, \rho_n, 0, \dots, 0)$, причем ρ_n стоит на q -м месте. Рассмотрим событие

$$E^q = \{|S_{j+\rho_n^q} - S_j| \leq \beta_{\langle n \rangle} \text{ для всех } j \in J_1 \times [1, n_q - \rho_n] \times (n_{q+1}, \dots, n_d)\}.$$

Обозначим $J_3 = J_1 \times [1, n_q - \rho_n] \times (n_{q+1}, \dots, n_d)$. Применяя неравенство Чебышева и лемму 2, видим, что $P(E^q)$ допускает следующую верхнюю оценку:

$$\begin{aligned}\sum_{J_3} P(|S_{j+\rho_n^q} - S_j| > \beta_{\langle n \rangle}) &\leq (n_q - \rho_n) n_{q-1} \cdots n_1 \left(\max_{J_3} E |S_{j+\rho_n^q} - S_j|^{2+\delta} \right) \beta_{\langle n \rangle}^{-(2+\delta)} \\ &\leq C n_1 \cdots n_q (|D_1^q|^{1+\delta/2}) \langle n \rangle^{-(1+\delta/2)} \\ &= C (n_1 \cdots n_q)^{-\delta/2} \frac{\rho_n^{1+\delta/2} (n_{q+1} \cdots n_d)^{1+\delta/2}}{(n_{q+1} \cdots n_d)^{1+\delta/2}} \\ &= C \rho_n^{1+\delta/2} (n_1 \cdots n_q)^{-\delta/2} \leq C \rho_n^{1+\delta/2} \langle n \rangle^{-(\delta/2)q\tau/(1+\tau)} \leq \langle n \rangle^{-\nu}\end{aligned}\quad (20)$$

для всех достаточно больших $n \in G_\tau$ и некоторого $\nu > 0$.

Введем величину

$$\varkappa_n^q = \min_{1 \leq t \leq n_q} P(\|V_{n_q} - V_t\| \leq \beta_{\langle n \rangle}).$$

Чтобы изучить ее поведение при $n \rightarrow \infty$, $n \in G_\tau$, произведем ряд оценок:

$$\begin{aligned}\max_{1 \leq t \leq n_q} P(\|V_{n_q} - V_t\| > \beta_{\langle n \rangle}) &\leq \max_{1 \leq t \leq n_q} \left[P\left(\|V_{n_q}\| > \frac{\beta_{\langle n \rangle}}{2}\right) + P\left(\|V_t\| > \frac{\beta_{\langle n \rangle}}{2}\right) \right] \\ &\leq \max_{1 \leq t \leq n_q} 2 E \|V_t\|^{2+\delta} \beta_{\langle n \rangle}^{-(2+\delta)} 2^{2+\delta} \\ &= 2^{3+\delta} \beta_{\langle n \rangle}^{-(2+\delta)} \max_{1 \leq t \leq n_q} E \max\{|S_j|^{2+\delta} : j \in J_1 \times [1, t] \times (n_{q+1}, \dots, n_d)\} \\ &\leq 2^{3+\delta} \beta_{\langle n \rangle}^{-(2+\delta)} E \max_{1 \leq j \leq n} |S_j|^{2+\delta} \leq C \langle n \rangle^{1+\delta/2} \beta_{\langle n \rangle}^{-(2+\delta)} \\ &= C \left(\frac{\langle n \rangle}{\beta_{\langle n \rangle}^2} \right)^{1+\delta/2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из леммы 2.

Таким образом,

$$\varkappa_n^q = 1 - \max_{1 \leq t \leq n_p} \mathbf{P}(\|V_{n_q} - V_t\| > \beta_{\langle n \rangle}) \rightarrow 1.$$

Тогда при всех достаточно больших $n \in G_\tau$ приходим к неравенству $\varkappa_n^q \geq 1/2$.

Пусть A_t обозначает событие первого перехода последовательностью $(\|V_t\|)_{t=1}^{n_q}$ уровня $a_{\langle n \rangle}$. Тогда, используя замеченное ранее свойство зависимости векторов V_t и $V_{n_q} - V_{t+\rho_n}$, получаем для всех достаточно больших $n \in G_\tau$ цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq t \leq n_q} \|V_t\| \geq a_{\langle n \rangle}\right) &\leq \varkappa_n^q \sum_{t=1}^{n_q} \mathbf{P}(A_t) \leq \sum_{t=1}^{n_q} \mathbf{P}(A_t) \mathbf{P}(\|V_{n_q} - V_t\| \leq \beta_{\langle n \rangle}) \\ &\leq \sum_{t=1}^{n_q} [\mathbf{P}(A_t | G_n) \mathbf{P}(\|V_{n_q} - V_{t+\rho_n}\| \leq \beta_{\langle n \rangle} | G_n) + 3 \mathbf{P}(\overline{G_n})] \\ &\leq \sum_{t=1}^{n_q} [\mathbf{P}(A'_t) \mathbf{P}(\|V'_{n_q} - V'_{t+\rho_n}\| \leq \beta_{\langle n \rangle}) + 3 \mathbf{P}(\overline{G_n})] \\ &= \sum_{t=1}^{n_q} [\mathbf{P}(A'_t; \|V'_{n_q} - V'_{t+\rho_n}\| \leq \beta_{\langle n \rangle}) + 3 \mathbf{P}(\overline{G_n})] \\ &\leq \sum_{t=1}^{n_q} \mathbf{P}(A_t; \|V_{n_q} - V_{t+\rho_n}\| \leq \beta_{\langle n \rangle}) + 4n_q \mathbf{P}(\overline{G_n}), \end{aligned} \quad (21)$$

где события и случайные величины со штрихами обозначают конечно-зависимые аппроксимации, получающиеся описанной заменой X_j на $X'_{j \rho_n}$ для всех $j \in [1, n]$. Продолжим оценку (21). Используя (20), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{n_q} \mathbf{P}(A_t; \|V_{n_q} - V_{t+\rho_n}\| \leq \beta_{\langle n \rangle}) &\leq \sum_{t=1}^{n_q} \mathbf{P}(A_t; E^q; \|V_{n_q} - V_{t+\rho_n}\| \leq \beta_{\langle n \rangle}) + \sum_{t=1}^{n_q} \mathbf{P}(A_t; \overline{E^q}) \\ &\leq \sum_{t=1}^{n_q} \mathbf{P}(A_t; E^q; \|V_{n_q} - V_{t+\rho_n}\| \leq \beta_{\langle n \rangle}) + C \langle n \rangle^{-\nu} \\ &\leq \sum_{t=1}^{n_q} \mathbf{P}(A_t; \|V_{n_q}\| \geq \|V_t\| - \|V_{t+\rho_n} - V_t\| - \|V_{n_q} - V_{t+\rho_n}\| \geq a_{\langle n \rangle} - 2\beta_{\langle n \rangle}) \\ &\quad + C \langle n \rangle^{-\delta_1} \\ &\leq \mathbf{P}(\|V_{n_q}\| \geq a_{\langle n \rangle} - 2\beta_{\langle n \rangle}) + C \langle n \rangle^{-\nu}. \end{aligned} \quad (22)$$

Объединяя (19), (21), (22) и оценку (8), получаем требуемое неравенство (17). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Введем $\gamma > 0$, значение которого выберем позднее, и обозначим

$$(1 + \gamma)^k := ([(1 + \gamma)^{k_1}], \dots, [(1 + \gamma)^{k_d}]) \in \mathbb{N}^d, \quad k \in \mathbb{N}^d.$$

Положим

$$\psi(x) := \sqrt{2d\sigma^2 x \log \log x}, \quad x > 3.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, 1)$. Докажем вначале неравенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty, n \in G_\tau} \frac{S_n}{\psi(\langle n \rangle)} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{п.н.} \quad (23)$$

Рассмотрим события

$$B_k = \left\{ \max_{(1+\gamma)^{k-1} \leq m \leq (1+\gamma)^k} S_m > (1+\varepsilon)\psi(\langle (1+\gamma)^k \rangle) \right\}, \quad k \in \mathbb{N}^d, \quad (1+\gamma)^k \in G_\tau.$$

Для доказательства (23) проверим, что п.н. происходит лишь конечное число событий B_k . Заметим, что для достаточно большого γ , некоторого $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ и всех достаточно больших k таких, что $(1+\gamma)^k \in G_\tau$, событие B_k влечет событие

$$B'_k = \left\{ \max_{1 \leq m \leq (1+\gamma)^k} S_m > (1+\varepsilon')\psi(\langle (1+\gamma)^k \rangle) \right\}. \quad (24)$$

Оценим вероятность (24) при помощи лемм 6 и 7. Пусть $D_k = [1, (1+\gamma)^k] \subset \mathbb{N}^d$, тогда

$$\begin{aligned} P(B'_k) &\leq P(|S_{(1+\gamma)^k}| > (1+\varepsilon')\psi(\langle (1+\gamma)^k \rangle) - 2d\beta_{\langle (1+\gamma)^k \rangle}) \\ &\leq C(\log \langle (1+\gamma)^k \rangle)^{-(1+\varepsilon'/2)} + \frac{|\partial D_k|}{|D_k|} \log^{2d} \frac{|D_k|}{|\partial D_k|} \leq C(\log \langle (1+\gamma)^k \rangle)^{-(1+\varepsilon'/2)}, \end{aligned} \quad (25)$$

при всех достаточно больших k , где последняя оценка получена с учетом того, что $(1+\gamma)^k \in G_\tau$.

Из (25) и леммы Бореля–Кантелли следует, что происходит лишь конечное число событий B'_k , а следовательно, и событий B_k , $k \in \mathbb{N}^d$, $(1+\gamma)^k \in G_\tau$.

Проверим теперь выполнение неравенства

$$\limsup_{n \rightarrow \infty, n \in G_\tau} \frac{S_n}{\psi(\langle n \rangle)} \geq 1 - \varepsilon \quad \text{п.н.} \quad (26)$$

Для каждого $j \in \mathbb{N}^d$ и $k \in \mathbb{N}^d$ таких, что $(1+\gamma)^k \in G_\tau$, введем множества

$$A_k = [(1+\gamma)^{k-1} + \rho_{(1+\gamma)^k}, (1+\gamma)^k], \quad D_k = [1, (1+\gamma)^k] \setminus A_k,$$

а также события

$$B_k = \{S(A_k) \geq (1-\varepsilon')\psi(|A_k|)\}, \quad E_k = \{S(D_k) \leq -(1+\varepsilon'')\psi(|D_k|)\},$$

где $\varepsilon', \varepsilon'' \in (0, 1)$ будут выбраны далее. Кроме того, рассмотрим величины $S'(A_k)$, являющиеся суммами величин $X'_{j\rho_{(1+\gamma)^k}}$, $1 \leq j \leq (1+\gamma)^k$, соответствующих событию $G_{(1+\gamma)^k}$.

Обозначим

$$B'_k = \{S'(A_k) \geq (1-\varepsilon')\psi(|A_k|)\}.$$

Заметим, что из свойств аппроксимации, с одной стороны, $B'_k G_{(1+\gamma)^k} = B_k G_{(1+\gamma)^k}$, а с другой – события B'_k , $k \in \mathbb{N}^d$, $(1+\gamma)^k \in G_\tau$, независимы в совокупности. Последнее наблюдение дает нам возможность применить лемму Бореля–Кантелли. С учетом оценок

$$|A_k| \leq \langle (1+\gamma)^k \rangle, \quad \frac{|\partial A_k|}{|A_k|} \leq 2 \sum_{i=1}^d (1+\gamma)^{-k_i} \leq C \langle (1+\gamma)^k \rangle^{\tau/(1+\tau)}$$

в силу (8) и по лемме 6 имеем

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{P}(B'_k) &\geq \sum [\mathbf{P}(B_k) - \mathbf{P}(\overline{G_{(1+\gamma)^k}})] \\ &\geq C \sum \left[(\log |A_k|)^{-d(1-\varepsilon'/2)} + \frac{|\partial A_k|}{|A_k|} \log^{2d} \frac{|A_k|}{|\partial A_k|} \right] - C = \infty. \end{aligned}$$

Воспользуемся еще два раза леммой Бореля–Кантелли для наборов событий

$$\{E_k, k \in \mathbb{N}^d, (1+\gamma)^k \in G_\tau\} \quad \text{и} \quad \{\overline{G((1+\gamma)^k)}, k \in \mathbb{N}^d, (1+\gamma)^k \in G_\tau\}.$$

В результате получаем, что п.н. для всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}^d$, $(1+\gamma)^k \in G_\tau$, наступают события G_k и $S(D_k) > -(1+\varepsilon'')\psi(|D_k|)$.

Итак, с вероятностью единица бесконечно часто происходят события

$$S_{(1+\gamma)^k} = S'(A_k) + S(D_k) \geq (1-\varepsilon')\psi(|A_k|) - (1+\varepsilon'')\psi(|D_k|). \quad (27)$$

С другой стороны, легко видеть, что для всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}^d$ таких, что $(1+\gamma)^k \in G_\tau$, справедливы неравенства

$$|D_k| \leq \frac{C}{1+\gamma} \langle (1+\gamma)^k \rangle, \quad |A_k| \geq \left(1 - \frac{C}{1+\gamma}\right) \langle (1+\gamma)^k \rangle.$$

Следовательно, мы можем выбрать ε' , ε'' и γ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$(1-\varepsilon')\psi(|A_k|) - (1+\varepsilon'')\psi(|D_k|) \geq (1-\varepsilon)\psi(\langle (1+\gamma)^k \rangle). \quad (28)$$

Из (28) и (27) следует, что п.н. бесконечно часто для $k \in \mathbb{N}^d$, $(1+\gamma)^k \in G_\tau$,

$$S_{(1+\gamma)^k} \geq (1-\varepsilon)\psi(\langle (1+\gamma)^k \rangle),$$

т.е. (26) выполняется. Для завершения доказательства осталось заметить, что соотношения (23) и (26) выполнены для произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. J. Daley, D. Vere-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes*. Vol. I. *Elementary theory and methods*, Probab. Appl. (N. Y.), Springer-Verlag, New York, 2003.
- [2] O. Kallenberg, *Random Measures*, Academic Press, New York, 1986.
- [3] M. D. Penrose, J. E. Yukich, “Central limit theorems for some graphs in computational geometry”, *Ann. Appl. Probab.*, **11**:4 (2001), 1005–1041.

- [4] M. D. Penrose, J. E. Yukich, “Weak laws of large numbers in geometric probability”, *Ann. Appl. Probab.*, **13**:1 (2003), 277–303.
- [5] Yu. Baryshnikov, P. Eichelsbacher, T. Schreiber, J. E. Yukich, “Moderate deviations for some point measures in geometric probability”, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, **44**:3 (2008), 422–446.
- [6] Yu. Baryshnikov, J. E. Yukich, “Gaussian limits for random measures in geometric probability”, *Ann. Appl. Probab.*, **15**:1A (2005), 213–253.
- [7] M. D. Penrose, J. E. Yukich, “Normal approximation in geometric probability”, *Stein’s Method and Applications*, Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap., **5**, Singapore Univ. Press, Singapore, 2005, 37–58.
- [8] F. Avram, D. Bertsimas, “On central limit theorems in geometrical probability”, *Ann. Appl. Probab.*, **3**:4 (1993), 1033–1046.
- [9] M. D. Penrose, *Convergence of Random Measures in Geometric Probability*, [arXiv: math.PR/0508464](https://arxiv.org/abs/math.PR/0508464).
- [10] А. В. Булинский, *Предельные теоремы в условиях слабой зависимости*, Изд-во МГУ, М., 1989.
- [11] I. Berkes, G. J. Morrow, “Strong invariance principle for mixing random fields”, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **57**:1 (1981), 15–37.
- [12] P. Doukhan, *Mixing. Properties and Examples*, Lecture Notes in Statist., **85**, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [13] F. Móricz, “A general moment inequality for the maximum of the rectangular partial sums of multiple series”, *Acta Math. Hungar.*, **41**:3–4 (1983), 337–346.
- [14] A. Bulinski, A. Shashkin, *Limit Theorems for Associated Random Fields and Related Systems*, Adv. Ser. Stat. Sci. Appl. Probab., **10**, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.
- [15] Д. Санклодас, “Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабовязисимых случайных полей”, *Литовск. матем. сб.*, **26**:3 (1986), 541–559.
- [16] В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*, Теория вероятностей и математическая статистика, **39**, Наука, М., 1987.
- [17] M. J. Wichura, “Inequalities with applications to the weak convergence of random processes with multi-dimensional time parameters”, *Ann. Math. Statist.*, **40**:2 (1969), 681–687.

М. М. Мусин

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: maxmmsu@gmail.com

Поступило

11.06.2008