Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Аверьянов, Базис градуированных тождеств супералгебры $M_{1,2}(F)$, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 4, 483–501

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4298>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 07:55:23

Базис градуированных тождеств супералгебры $M_{1,2}(F)$

И. В. Аверьянов

Обозначим через $\text{Mat}_{k,l}(F)$ алгебру $M_n(F)$ матриц порядка $n = k + l$ с градуировкой $(\text{Mat}_{k,l}^0(F), \text{Mat}_{k,l}^1(F))$, где $\text{Mat}_{k,l}^0(F)$ имеет базис $\{e_{ij}, i \leq k, j \leq k\} \cup \{e_{ij}, i > k, j > k\}$ и $\text{Mat}_{k,l}^1(F)$ имеет базис $\{e_{ij}, i \leq k, j > k\} \cup \{e_{ij}, i > k, j \geq k\}$. Грассманову оболочку супералгебры $\text{Mat}_{k,l}(F)$ обозначим через $M_{k,l}(F)$.

В работе описаны базисы градуированных тождеств супералгебр $\text{Mat}_{1,2}(F)$ и $M_{1,2}(F)$.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. В данной статье термин *алгебра* будет обозначать ассоциативную алгебру над полем F , F – фиксированное поле характеристики нуль. *$\mathbb{Z}_2$ -градуированной алгеброй* или *супералгеброй* будем называть тройку (A, A_0, A_1) , где A – алгебра, A_i – подпространства A , удовлетворяющие условиям

$$A = A_0 + A_1, \quad (1)$$

$$A_0 A_0 + A_1 A_1 \subseteq A_0, \quad (2)$$

$$A_0 A_1 + A_1 A_0 \subseteq A_1. \quad (3)$$

Пару (A_0, A_1) будем называть *градуировкой* алгебры A . Пусть G – алгебра Грассмана счетного ранга, порожденная множеством $\{e_1, e_2, \dots\}$ и с определяющими соотношениями $e_i e_j + e_j e_i = 0$, $i, j = 1, 2, \dots$. Пусть G_0 и G_1 – подпространства G , порожденные словами соответственно четной и нечетной длины. Градуировка (G_0, G_1) превращает G в супералгебру. Супералгебру

$$(A_0 \otimes G_0 + A_1 \otimes G_1, A_0 \otimes G_0, A_1 \otimes G_1)$$

будем называть *грассмановой оболочкой* супералгебры (A, A_0, A_1) .

Пусть $F\langle X \rangle$ – свободная ассоциативная алгебра над полем F , порожденная счетным множеством X . Представим X в виде $X = Y \cup Z$, Z, Y – счетные непересекающиеся подмножества. Множества X, Y, Z зафиксируем. Буквами z всегда будем обозначать переменные из Z , буквами y – из Y . Будем обозначать через $\langle X \rangle_0$ и $\langle X \rangle_1$ множества слов от переменных из X , имеющих соответственно четную и нечетную степень по переменным из Z . Обозначим через F_0 подпространство алгебры $F\langle X \rangle$, порожденное словами из $\langle X \rangle_0$, а через F_1 – подпространство, порожденное словами из $\langle X \rangle_1$. Очевидно, $F\langle X \rangle = F_0 + F_1$, и $(F\langle X \rangle, F_0, F_1)$ – супералгебра.

Идеал I алгебры $F\langle X \rangle$ назовем *T_2 -идеалом*, если из того, что

$$f(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_l) \in I,$$

следует, что

$$f(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l) \in I \quad \text{для всех } a_i \in F_0, \quad b_i \in F_1.$$

Будем говорить, что супералгебра (A, A_0, A_1) удовлетворяет *градуированному тождеству* $f(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_l)$, если

$$f(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l) = 0 \quad \text{для всех } a_i \in A_0, \quad b_i \in A_1.$$

Очевидно, идеал градуированных тождеств любой супералгебры является T_2 -идеалом. Если $f_1, \dots, f_n$ – некоторый набор полиномов, то через $\{f_1, \dots, f_n\}^{T_2}$ будем обозначать T_2 -идеал, порожденный этим набором полиномов. Если для некоторого T_2 -идеала Γ выполнено $\Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}^{T_2}$, то набор полиномов $f_1, \dots, f_n$ называется *базисом* T_2 -идеала Γ .

Будем обозначать через $\text{Mat}_{k,l}(F)$ алгебру $M_n(F)$ матриц порядка $n = k + l$ с градуировкой $(\text{Mat}_{k,l}^0(F), \text{Mat}_{k,l}^1(F))$, где $\text{Mat}_{k,l}^0(F)$ имеет базис

$$\{e_{ij}, i \leq k, j \leq k\} \cup \{e_{ij}, i > k, j > k\}$$

и $\text{Mat}_{k,l}^1(F)$ имеет базис

$$\{e_{ij}, i \leq k, j > k\} \cup \{e_{ij}, i > k, j \geq k\}.$$

Грассманову оболочку супералгебры $\text{Mat}_{k,l}(F)$ обозначим через $M_{k,l}(F)$.

Матричные алгебры и их градуированные тождества являются важными объектами изучения в современной PI-теории. Базис тождеств алгебры $\text{Mat}_{1,1}(F)$ был описан в 1992 г. Винченцо [1]. Различные Z_2 -градуировки алгебры $M_2(K)$ и базисы соответствующих идеалов градуированных тождеств в случае конечного поля K были описаны в [2]. Также в работах [3] и [4] описаны базисы градуированных тождеств алгебры $M_n(K)$, наделенной Z_n -градуировкой, в случае произвольного бесконечного поля K . В статье Дренского и Бахтурина исследуются градуированные тождества G -градуированной алгебры $M_n(K)$ в случае произвольной группы G и $\text{char } K = 0$, также в ней найдены базисы соответствующих идеалов градуированных тождеств в случае простейшей градуировки [5].

В работе описаны базисы градуированных тождеств супералгебр $\text{Mat}_{1,2}(F)$ и $M_{1,2}(F)$.

2. Предварительные замечания. Пусть Mat_∞^* – пространство бесконечных матриц. Выделим в нем подпространство Mat_∞^0 , порожденное элементами $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^\infty$ и $\sum_{i=1}^\infty e_{ii}$. Очевидно, оно является алгеброй относительно обычных операций умножения и сложения. Супералгеброй $\text{Mat}_{k,\infty}(F)$ назовем алгебру M_∞^0 , наделенную градуировкой $(\text{Mat}_{k,\infty}^0(F), \text{Mat}_{k,\infty}^1(F))$, где $\text{Mat}_{k,\infty}^0(F)$ имеет базис

$$\{e_{ij}, i \leq k, j \leq k\} \cup \{e_{ij}, i > k, j > k\} \cup \left\{ \sum_{i>k} e_{ii} \right\}$$

и $\text{Mat}_{k,\infty}^1(F)$ имеет базис

$$\{e_{ij}, i \leq k, j > k\} \cup \{e_{ij}, i > k, j \geq k\}.$$

Рассмотрим алгебру $\text{Mat}_{k,l}(F)$, где l может принимать значение ∞ . Обозначим через

$$\text{Mat}_{k,l}^{00}(F), \quad \text{Mat}_{k,l}^{01}(F), \quad \text{Mat}_{k,l}^{10}(F), \quad \text{Mat}_{k,l}^{11}(F)$$

подпространства $\text{Mat}_{k,l}(F)$, имеющие базисы соответственно

$$\{e_{ij}, i \leq k, j \leq k\}, \quad \{e_{ij}, i \leq k, j > k\}, \quad \{e_{ij}, i > k, j \leq k\}, \quad \{e_{ij}, i > k, j > k\}.$$

В случае $l = \infty$ добавим к базису $\text{Mat}_{k,l}^{11}(F)$ также элемент $\sum_{i>k} e_{ii}$. Очевидно, что пространство

$$\text{Mat}_{k,l}(F) = \text{Mat}_{k,l}^{00}(F) + \text{Mat}_{k,l}^{01}(F) + \text{Mat}_{k,l}^{10}(F) + \text{Mat}_{k,l}^{11}(F),$$

где сумма прямая.

Обозначим через $T_{k,l}$ T_2 -идеал $T_2[\text{Mat}_{k,l}(F)]$ градуированных тождеств супералгебры $\text{Mat}_{k,l}(F)$.

Пусть u – некоторый моном из $\langle X \rangle$ степени 1 по каждой входящей в него переменной. Обозначим через $Z_0(u)$ (соответственно $Z_1(u)$) множество переменных z из Z , входящих в моном u , таких, что u имеет вид $u = vzw$ и $\deg_Z(v)$ четна (соответственно нечетна). Также обозначим через $Y_0(u)$ (соответственно $Y_1(u)$) множество переменных y из Y , входящих в моном u , таких, что u имеет вид $u = vyw$ и $\deg_Z(v)$ четна (соответственно нечетна). Например, если $u = y_0 z_0 y_1 z_1$, то

$$Y_0(u) = \{y_0\}, \quad Z_0(u) = \{z_0\}, \quad Y_1(u) = \{y_1\}, \quad Z_1(u) = \{z_1\}.$$

Четверку $((Y_0(u), Z_0(u), Y_1(u), Z_1(u)))$ будем обозначать через $k(u)$.

Пусть $f(y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_r) \in T_{k,l}$ – некоторый полилинейный полином. Обозначим через f_K сумму всех мономов u , входящих в f , для которых $k(u) = K$. Таким образом,

$$f = \sum_K f_K, \quad K = (Y_0, Z_0, Y_1, Z_1), \quad Z_i \subset Z, \quad Y_i \subset Y.$$

Покажем, что тогда для любого K_0 $f_{K_0} \in T_{k,l}$. Пусть для определенности $K_0 = (Y_0, Z_0, Y_1, Z_1)$. Если $f_{K_0} = 0$, то доказывать нечего. В противном случае в силу линейности f достаточно показать, что f_{K_0} обнуляется при подстановке матричных единиц вместо переменных. Пусть $z_0 \in Z_0$ и мы делаем подстановку, при которой в z_0 подставляется $e_{ij} \in \text{Mat}_{k,l}^{01}(F)$. Тогда f_{K_0} обнуляется при всех таких подстановках, кроме, возможно, тех, при которых в переменные из Y_0, Z_0, Y_1, Z_1 подставляются матричные единицы соответственно из $\text{Mat}_{k,l}^{00}(F), \text{Mat}_{k,l}^{01}(F), \text{Mat}_{k,l}^{11}(F), \text{Mat}_{k,l}^{10}(F)$.

Заметим, что

- 1) при таких подстановках обнуляются все f_K , кроме, возможно, f_{K_0} и f_{K_1} , $K_1 = (Y_1, Z_1, Y_0, Z_0)$;
- 2) при таких подстановках образ f_{K_i} , $i \in \{0, 1\}$, лежит целиком в одном из подпространств $\text{Mat}_{k,l}^{00}(F), \text{Mat}_{k,l}^{01}(F), \text{Mat}_{k,l}^{11}(F), \text{Mat}_{k,l}^{10}(F)$, причем для f_{K_0} и f_{K_1} эти подпространства различны.

В силу того, что $f \in T_2[\text{Mat}_{k,l}(F)]$, получаем, что и на этих подстановках f_{K_0} обнуляется. В случае, когда вместо z_0 подставляется матричная единица из $\text{Mat}_{k,l}^{10}(F)$, рассуждения аналогичны.

В дальнейшем все полилинейные полиномы f , имеющие вид $f = f_K$ для некоторого $K = (Y_0, Z_0, Y_1, Z_1)$, будем называть K -однородными. Полиномы, линеаризация которых дает K -однородный полином, тоже будем называть K -однородными. Если не указано явно, то через s_i, z_i, r_i, t_i будем обозначать буквы соответственно из Y_0, Z_0, Y_1, Z_1 . Подстановки, при которых в переменные из Y_0, Z_0, Y_1, Z_1 подставляются элементы соответственно из $\text{Mat}_{k,l}^{00}(F), \text{Mat}_{k,l}^{01}(F), \text{Mat}_{k,l}^{11}(F), \text{Mat}_{k,l}^{10}(F)$ либо

$\text{Mat}_{k,l}^{11}(F)$, $\text{Mat}_{k,l}^{10}(F)$, $\text{Mat}_{k,l}^{00}(F)$, $\text{Mat}_{k,l}^{01}(F)$, будем называть K -согласованными. Из вышесказанного следует, что принадлежность K -однородного полинома f T -идеалу $T_{k,l}$ эквивалентна тому, что f обнуляется на всех K -согласованных подстановках.

3. Описание градуированных тождеств супералгебры $\text{Mat}_{1,\infty}(F)$. Обозначим через T_0 T_2 -идеал градуированных тождеств супералгебры $\text{Mat}_{1,\infty}(F)$. Так как $\text{char } F = 0$, то T_0 порождается мультилинейными полиномами.

Следующая лемма является критерием принадлежности полинома идеалу T_0 .

ЛЕММА 1. Пусть $f(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n)$ – некоторый K -однородный полилинейный полином, $K = (Y_0, Z_0, Y_1, Z_1)$. Тогда $f \in T_0$, если и только если он одновременно представим в виде

$$\sum_i \alpha_i a_i [b_i, c_i] d_i \quad (4)$$

и в виде

$$\sum_i \alpha'_i a'_i [b'_i, c'_i] d'_i, \quad (5)$$

где $a_i, b_i, b'_i, c_i, c'_i \in \langle X \rangle_0$, $a'_i \in \langle X \rangle_1$, $d_i, d'_i \in \langle X \rangle$, $\alpha_i, \alpha'_i \in F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность утверждения леммы очевидна: действительно, после любой K -согласованной подстановки либо образы b_i, c_i , либо образы b'_i, c'_i лежат в $\text{Mat}_{1,\infty}^{00}(F)$, а элементы $\text{Mat}_{1,\infty}^{00}(F)$ коммутируют между собой.

Необходимость. Рассмотрим случай, когда $k = l$. Очевидно, f представим в виде

$$f = \sum_I f_I, \quad f_I = g_I(z_1 u_1 t_{\sigma(1)}, z_1 u_2 t_{\sigma(2)}, \dots, z_k u_k t_{\sigma(k)}, s_1, \dots, s_n),$$

где $I = (\sigma, u_1, \dots, u_k)$, $u_i \in \langle Y \rangle$ (слова от переменных r_i), $\sigma \in S(k)$ (группа перестановок множества $\{1, \dots, k\}$), а g_I – однозначно определенный полилинейный ассоциативный многочлен от $n + k$ переменных.

Пусть

$$g_{I_0} \neq 0, \quad I_0 = (\text{id}, r_1, r_2, \dots, r_m, 1, \dots, 1).$$

Сделаем подстановку

$$\begin{aligned} z_1 &= e_{12}, & r_1 &= e_{23}, & r_2 &= e_{34}, & \dots, & r_m &= e_{m+1,m+2}, & t_1 &= e_{m+2,1}, \\ z_2 &= e_{1,m+3}, & t_2 &= e_{m+3,1}, & \dots, & z_l &= e_{1,m+l+1}, & t_l &= e_{m+l+1,1}, \\ s_i &= e_{11}, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Очевидно, что после такой подстановки заведомо обнулятся все f_I , кроме, возможно, f_{I_0} (так как для каждого такого $I = (\sigma, u_1, \dots, u_k)$ будет равен нулю хотя бы один моном из $z_i u_i t_{\sigma(i)}$). Следовательно, значение f на этой подстановке будет равно $g_{I_0}(e_{11}, e_{11}, \dots, e_{11})$. Так как $f \in T_0$, то $g_{I_0}(e_{11}, e_{11}, \dots, e_{11}) = 0$ и, следовательно, $g_{I_0}(x_1, \dots, x_{k+n})$ принадлежит идеалу $F\langle X \rangle$, порожденному коммутаторами $[x_i, x_j]$, а значит, f_{I_0} представим в виде (4). Совершенно аналогично доказывается представимость в виде (4) остальных f_I .

Пусть теперь $k = l + 1$ (других вариантов быть не может). Тогда f можно представить в виде

$$f = \sum_I f_I, \quad f_I = g_I(z_{i_1} u_1 t_{\sigma(1)}, z_{i_2} u_2 t_{\sigma(2)}, \dots, z_{i_l} u_l t_{\sigma(l)}, s_1, \dots, s_n) z_q u_{l+1},$$

где $I = (q, \sigma, u_1, \dots, u_{l+1})$, $u_i \in \langle Y_1 \rangle$ (мономы от переменных r_i), $q \in \{1, \dots, k\}$, $(i_1, i_2, \dots, i_l) = (1, 2, \dots, \widehat{q}, \dots, k)$, $\sigma \in S(l)$ (группа перестановок множества $\{1, \dots, l\}$), g_I – однозначно определенный полилинейный ассоциативный многочлен от $n + l$ переменных. Пусть

$$g_{I_0} \neq 0, \quad I_0 = (k, \text{id}, r_1, r_2, \dots, r_m, 1, \dots, 1).$$

Сделаем подстановку $z_{l+1} = e_{1,m+l+2}$, остальные r_i , z_i , s_i , t_i – как в случае $k = l$. После такой подстановки все f_I обнулятся, кроме, возможно, f_{I_0} . Так как $f \in T_0$, то $g_{I_0}(e_{11}, e_{11}, \dots, e_{11})e_{1,m+l+2} = 0$ и, следовательно, $g_{I_0}(x_1, \dots, x_{k+n})$ опять принадлежит идеалу $F\langle X \rangle$, порожденному коммутаторами $[x_i, x_j]$, и f_{I_0} представим в виде (4). Возможность представления остальных f_I в виде (4) доказывается совершенно аналогично.

Точно так же доказывается возможность представления f в виде (5). Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Следующие многочлены являются градуированными тождествами супералгебры $\text{Mat}_{1,\infty}(F)$:

- a) $F_1(s_1, s_2, z_0, r_1, r_2) = [s_1, s_2]z_0[r_1, r_2]$;
- b) $F_2(s_0, z_0, z_1, r_0, t_0) = s_0z_0[t_0z_1, r_0] - z_0[t_0s_0z_1, r_0]$;
- c) $F_3(s_0, z_0, z_1, r_0, t_0) = [z_0r_0t_0, s_0]z_1 - [z_0t_0, s_0]z_1r_0$;
- d) $F_4(s_0, z_0, r_0, r_1, t_0) = [z_0[r_0, r_1]t_0, s_0]$;
- e) $F_5(z_0, z_1, r_0, t_0, t_1) = z_0[t_0z_1, r_0]t_1 + z_1[t_1z_0, r_0]t_0$;
- f) $F_6(z_0, z_1, z_2, t_0, t_1) = [z_0t_0, z_1t_1]z_2 + [z_2t_0, z_0t_1]z_1 + [z_1t_0, z_2t_1]z_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принадлежность указанных полиномов T_2 -идеалу T_0 является прямым следствием леммы 1.

ТЕОРЕМА 1. Полиномы $F_1, \dots, F_7$ из леммы 2 образуют базис T_2 -идеала T_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для полиномов $f, g \in F\langle X \rangle$ будем писать $f \sim g$, если $f = g \bmod T_0$. Пусть $f \in T_0$, т.е. $f = 0$ – градуированное тождество супералгебры $\text{Mat}_{1,\infty}(F)$. Любое тождество $\text{Mat}_{1,\infty}(F)$ следует из конечного числа полилинейных тождеств; также было показано, что полилинейные тождества следуют из K -однородных тождеств. Таким образом, можно считать, что

$$f = f(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n)$$

– некоторый K -однородный полином, $K = (\{s_i\}, \{z_i\}, \{r_i\}, \{t_i\})$. В силу леммы 1 f представим в виде (5), т.е. f имеет вид

$$f = \sum_I \alpha_I u_0 z_1 u_1 [u_2, u_3] u_4 + \sum_J \beta_J v_0 [v_1 z_1 v_2, v_3] v_4 + \sum_L \gamma_L w_0 [w_1, w_2] w_3 z_1 w_4, \quad (6)$$

$$I = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4), \quad J = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4), \quad L = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4),$$

$$u_0, u_1, u_2, u_3, v_2, v_3, w_0, w_2, w_3 \in \langle X \rangle_0, \quad v_0, v_1, w_0 \in \langle X \rangle_1, \quad \alpha_I, \beta_J, \gamma_L \in F.$$

Рассмотрим произвольное слагаемое первой суммы $\alpha u_0 z_1 u_1 [u_2, u_3] u_4$. Оно может иметь вид

- 1) $\alpha a s_1 b z_1 u_1 [u_2, u_3] u_4$, $u_0 = a s_1 b$, $a, b \in \langle X \rangle_0$;
- 2) $\alpha u_0 z_1 a s_1 b [u_2, u_3] u_4$, $u_1 = a s_1 b$, $a, b \in \langle X \rangle_1$;
- 3) $\alpha u_0 z_1 u_1 [a s_1 b, u_3] u_4$, $u_2 = a s_1 b$, $a, b \in \langle X \rangle_1$;

4) $\alpha u_0 z_1 u_1 [u_2, u_3] a s_1 b, u_2 = a s_1 b, a \in \langle X \rangle_1$.

(Другие случаи не имеют места в силу K -однородности f .)

В случае 1) имеем

$$a s_1 b z_1 u_1 [u_2, u_3] u_4 = a b s_1 z_1 u_1 [u_2, u_3] u_4 + a [s_1, b] z_1 u_1 [u_2, u_3] u_4 \sim a b s_1 z_1 u_1 [u_2, u_3] u_4.$$

Эквивалентность имеет место в силу тождества $F_1 = 0$.

В случае 2)

$$u_0 z_1 a s_1 b [u_2, u_3] u_4 = u_0 s_1 z_1 a b [u_2, u_3] u_4 + u_0 [z_1 a, s_1] b [u_2, u_3] u_4 \sim u_0 z_1 a s_1 b [u_2, u_3] u_4$$

(в силу тождества $F_1 = 0$).

В случае 3)

$$\begin{aligned} u_0 z_1 u_1 [a s_1 b, u_3] u_4 &= u_0 s_1 z_1 u_1 [a b, u_3] u_4 - (u_0 s_1 z_1 u_1 [a b, u_3] u_4 - u_0 z_1 u_1 [a s_1 b, u_3] u_4) \\ &\sim u_0 s_1 z_1 u_1 [a b, u_3] u_4 \end{aligned}$$

(в силу тождества $F_2 = 0$).

В случае 4)

$$u_0 z_1 u_1 [u_2, u_3] a s_1 b = u_0 s_1 z_1 u_1 [u_2, u_3] a b + u_0 [z_1 u_1 [u_2, u_3] a, s_1] b \sim u_0 s_1 z_1 u_1 [u_2, u_3] a b$$

(в силу тождества $F_4 = 0$).

Таким образом, первая сумма в (6) $\sum_I \alpha_I u_0 z_1 u_1 [u_2, u_3] u_4$ эквивалентна некоторому K -однородному полиному f_1 вида

$$\begin{aligned} f_1(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n) \\ = f'(s_1, z_1, z_2, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m, s_2, \dots, s_n). \end{aligned}$$

Поступая совершенно аналогично с остальными буквами s_i и остальными двумя суммами в (6), получаем, что

$$\begin{aligned} f &\sim g(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n) \\ &= g_1(s_1, s_2, \dots, s_n, z_1, z_2, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m) \end{aligned}$$

для некоторых полиномов g и $g_1(z_1, z_2, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m)$. Так как $f \in T_0$, то $g \in T_0$ и, следовательно,

$$g_1 = g(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m, 1, 1, \dots, 1) \in T_0.$$

С другой стороны, g , а значит, и f следуют (в T -смысле) из g_1 . Таким образом, можно сразу считать, что f не зависит от s_i ($Y_0(f) = \emptyset$). Совершенно аналогично, используя представление (4) леммы 1, можно считать, что f не зависит от r_i ($Y_1(f) = \emptyset$); $f = f(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l)$.

Возможны 2 случая: $k = l$ и $k = l + 1$.

Случай $k = l$. Используя представление (5), имеем

$$\begin{aligned} f(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l) &= \sum \alpha_I u_0 z_1 u_1 [t_{i_1} z_{j_1}, t_{i_2} z_{j_2}] v_0 \\ &\quad + \sum \beta_J v_0 [t_{i_1} z_{j_1}, t_{i_2} z_{j_2}] v_1 + \sum \gamma_L v_0 [t_{i_1} z_{j_1}, t_{i_2} z_{j_2}] v_1 z_1 v_2, \\ I &= (i_1, i_2, j_1, j_2, u_0, u_1, v_0), \quad J = (i_1, i_2, j_2, v_0, v_1), \quad L = (i_1, i_2, j_1, j_2, v_0, v_1, v_2), \\ u_i &\in \langle X \rangle_0, \quad v_i \in \langle X \rangle_1, \quad \alpha_I, \beta_J, \gamma_L \in F. \end{aligned}$$

Преобразуем слагаемые первой суммы с помощью тождества $F_2 = 0$:

$$u_0 z_1 u_1 [t_{i_1} z_{j_1}, t_{i_2} z_{j_2}] v_0 \sim z_1 u_1 [t_{i_1} u_0 z_{j_1}, t_{i_2} z_{j_2}] v_0.$$

Преобразуем слагаемые второй суммы с помощью тождества $F_5 = 0$:

$$v_0 [t_{i_1} z_1, t_{i_2} z_{j_2}] v_1 \sim -z_1 [v_1 v_0, t_{i_2} z_{j_2}] t_{i_1}.$$

Преобразуем слагаемые третьей суммы с помощью тождества $F_4 = 0$:

$$v_0 [t_{i_1} z_{j_1}, t_{i_2} z_{j_2}] v_1 z_1 v_2 = z_1 v_2 v_0 [t_{i_1} z_{j_1}, t_{i_2} z_{j_2}] v_1.$$

Таким образом, имеем

$$f(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l) \sim z_1 f_1(z_2, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l)$$

для некоторого полилинейного полинома f_1 . Легко проверяется, что из этого и из того, что $f \in T_0$, следует, что $f_1 \in T_0$. Так как f следует из f_1 в T -смысле, то задача свелась к многочлену f_1 на единицу меньшей степени.

Случай $k = l + 1$. Используя представление (4), имеем

$$\begin{aligned} f(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l) &= \sum \alpha_I u_0 [z_{j_1} t_{i_1}, z_{j_2} t_{i_2}] u_1 z_1 + \sum \beta_J u_0 z_i, \\ I &= (i_1, i_2, j_1, j_2, u_0, u_1), \quad J = (i, u_0), \quad i \neq 1, \\ u_i &\in \langle X \rangle_0, \quad v_i \in \langle X \rangle_1, \quad \alpha_I, \beta_J \in F. \end{aligned}$$

С помощью тождества $F_6 = 0$ преобразуем слагаемые первой суммы:

$$u_0 [z_{j_1} t_{i_1}, z_{j_2} t_{i_2}] u_1 z_1 \sim -u_0 [u_1 z_1 t_{i_1}, z_{j_1} t_{i_2}] z_{j_2} - u_0 [z_{j_2} t_{i_1}, u_1 z_1 t_{i_2}] z_{j_1}.$$

Отсюда видим, что

$$\begin{aligned} f &\sim \sum \gamma_J u_0 z_i, \\ J &= (i, u_0), \quad i \neq 1, \quad u_i \in \langle X \rangle_0, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} f &\sim f_1(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l) = \sum_I \delta_I z_{i_1} t_{j_1} z_{i_2} t_{j_2} \cdots z_{i_l} t_{j_l} z_{i_{l+1}}, \\ I &= (i_1, \dots, i_{l+1}, j_1, \dots, j_l), \quad i_{l+1} \neq 1. \end{aligned}$$

С помощью коммутаторов вида $[t_{j_1} z_{i_1}, t_{j_2} z_{i_2}]$ представим f_1 в виде

$$f_1 = \sum_I \zeta_I v [t_{j_1} z_{i_1}, t_{j_2} z_{i_2}] u + \sum_J \eta_J z_q t_{j_1} z_{q_1} \cdots t_{j_l} z_{q_l},$$

$$I = (j_1, i_1, j_2, i_2, v, u), \quad J = (k, j_1, \dots, j_l), \quad (q_1, \dots, q_l) = (1, 2, \dots, \widehat{q}, \dots, l),$$

причем отметим, что в силу предыдущего преобразования это можно сделать так, что в первой сумме не будет ненулевых слагаемых с u вида $v_1 z_1$ и слагаемых с $u = 1$, $1 \in \{i_1, i_2\}$. Далее, делая подстановки

$$\begin{aligned} t_{j_1} &= e_{12}, \quad z_{q_1} = e_{21}, \quad t_{j_2} = e_{13}, \quad z_{q_2} = e_{31}, \quad \dots, \quad t_{j_l} = e_{1,l+1}, \quad z_{q_l} = e_{l+1,1}, \\ z_q &= e_{l+2,1}, \end{aligned}$$

убеждаемся, что вторая сумма не содержит ненулевых слагаемых. Таким образом, f_1 имеет вид

$$f_1 = \sum_I \alpha_I v_0[t_{j_1} z_{i_1}, t_{j_2} z_{i_2}] v_1 z_1 t_{i_3} u_0 \\ + \sum_J \beta_J v_0[t_{j_1} z_1, t_{j_2} z_{i_2}] t_{j_3} z_{i_3} u_0 + \sum_L \gamma_L w_0 z_1 v_0[t_{j_1} z_1, t_{j_2} z_{i_2}] w_1.$$

Преобразуем слагаемые первой суммы с помощью тождества $F_4 = 0$:

$$v_0[t_{j_1} z_{i_1}, t_{j_2} z_{i_2}] v_1 z_1 t_{i_3} u_0 \sim z_1 t_{i_3} v_0[t_{j_1} z_{i_1}, t_{j_2} z_{i_2}] v_1 u_0.$$

Преобразуем слагаемые второй суммы с помощью тождества $F_5 = 0$:

$$v_0[t_{j_1} z_1, t_{j_2} z_{i_2}] t_{j_3} z_{i_3} u_0 \sim -z_1 [t_{j_3} v_0, t_{j_2} z_{i_2}] t_{j_1} z_{i_3} u_0.$$

Преобразуем слагаемые третьей суммы с помощью тождества $F_2 = 0$:

$$w_0 z_1 v_0[t_{j_1} z_{i_1}, t_{j_2} z_{i_2}] w_1 \sim z_1 v_0[t_{j_1} w_0 z_{i_1}, t_{j_2} z_{i_2}] w_1.$$

Таким образом, опять имеем

$$f \sim f_2(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l) = z_1 f_3(z_2, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l),$$

и f следует в T -смысле из тождеств $F_i = 0$ и тождества $f_3 = 0$, где f_3 имеет степень на единицу меньшую, чем f .

Легко проверить, что T_0 не содержит нетривиальных тождеств с $k < 3$. Таким образом, теорема доказана по индукции.

4. Тождества $\text{Mat}_{1,n}(F)$ от нечетных переменных. Пусть, как и выше, $S(n)$ обозначает симметрическую группу, действующую на множестве $1, \dots, n$.

ЛЕММА 3. *Имеем*

$$G^n(z_1, \dots, z_{n+1}, t_1, \dots, t_n) = \sum_{\sigma \in S(n+1)} (-1)^\sigma z_{\sigma(1)} t_1 z_{\sigma(2)} t_2 \cdots t_n z_{\sigma(n+1)} \in T_{1,n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу полилинейности G^n достаточно проверить, что G^n обнуляется на K -однородных подстановках матричных единиц ($K = (\emptyset, z_i, \emptyset, t_j)$), т.е. при подстановках вместо z_i матричных единиц из $\text{Mat}_{1,n}^{10}(F)$ и при подстановках вместо z_i матричных единиц из $\text{Mat}_{1,n}^{01}(F)$. Но это очевидно, так как G^n кососимметричен по $n+1$ переменной z_i , а размерности $\text{Mat}_{1,n}^{01}(F)$ и $\text{Mat}_{1,n}^{10}(F)$ равны n . Лемма доказана.

Пусть $f(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n)$ — K -однородный полином, $K = (\{s_1, \dots, s_n\}, \{z_1, \dots, z_k\}, \{r_1, \dots, r_m\}, \{t_1, \dots, t_l\})$. Определим действие группы $S(k)$ на f следующим образом:

$$\sigma f(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n) \\ = f(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k)}, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n).$$

Очевидно, что это действие превращает множество K -однородных полиномов из $T_{1,n}$ в $FS(n)$ -модуль.

Пусть T – некоторая диаграмма Юнга из n клеток ($|T| = n$), T^* – таблица Юнга, полученная заполнением клеток T числами $1, \dots, n$. Пусть $C(T^*)$ (соответственно $R(T^*)$) обозначает подгруппу $S(n)$, состоящую из таких перестановок $\gamma \in S(n)$, что $\gamma(i)$ и i лежат в одном столбце (соответственно строке) T^* , $i = 1, \dots, n$. Обозначим через e_{T^*} элемент $FS(n)$, определенный следующим образом:

$$e_{T^*} = \sum_{\rho \in R(T^*)} \sum_{\gamma \in C(T^*)} (-1)^\gamma \rho \gamma.$$

Из свойств представлений симметрической группы [6] следует, что упомянутый $FS(n)$ -модуль порожден элементами $e_{T^*}g$, $|T| = n$.

Рассмотрим подробнее элементы $e_{T^*}g$. Обозначим для краткости $C = C(T^*)$, $R = R(T^*)$. Пусть диаграмма T имеет более n строк. Обозначим через C_1 группу перестановок чисел, стоящих в первом столбце таблицы T^* . Имеем

$$e_{T^*}g = \sum_{\rho \in R} \sum_{\gamma \in C} (-1)^\gamma \rho \gamma g = \sum_{\rho \in R} \rho \sum_{\gamma \in C} (-1)^\gamma \gamma g = \sum_{\rho \in R} \rho \sum_{\delta \in M} (-1)^\delta \delta \sum_{\gamma \in C_1} (-1)^\gamma \gamma g,$$

где M – множество представителей правых смежных классов группы C по подгруппе C_1 . Полином $\sum_{\gamma \in C_1} (-1)^\gamma \gamma g$ кососимметричен по $n+1$ переменной z_i и, следовательно, является T -следствием G^n . Таким образом, для таких T полином $e_{T^*}g$ следует из G^n .

Пусть теперь T имеет $m \leq n$ строк. Обозначим через T_i множество чисел, стоящих в i -й строке T^* , а через R_i – группу перестановок множества T_i . Очевидно, $R = \prod_{i=1}^m R_i$, где произведение является прямым.

Тогда

$$e_{T^*}g = \sum_{\rho \in R} \sum_{\gamma \in C} (-1)^\gamma \rho \gamma g = \sum_{\rho_i \in R_i} \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_m g_1, \quad g_1 = \sum_{\gamma \in C} (-1)^\gamma \gamma g.$$

Полином $\sum_{\rho_i \in R_i} \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_m g_1$ является симметричным группам букв $\{z_j\}_{j \in T_i}$, $i = 1, \dots, m$, и, следовательно, является линеаризацией некоторого полинома $g_2(z'_1, \dots, z'_m, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n)$.

Таким образом, нами доказана

ЛЕММА 4. *Идеал $T_{1,n}$ порожден полиномом G^n и конечным набором полиномов $g_i(z_1, \dots, z_n, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n)$.*

ТЕОРЕМА 2. *Имеем*

$$T_{1,n} \cap F\langle Z \rangle = \{G^n, F_1, \dots, F_6\}^{T_2} \cap F\langle Z \rangle,$$

где G^n – полином из леммы 3, а F_i – полиномы из леммы 2. Иначе говоря, все тождества $\text{Mat}_{1,n}(F)$ от переменных из Z следуют из $G^n, F_1, \dots, F_6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение

$$\{G^n, F_1, \dots, F_6\}^T \cap F\langle Z \rangle \subseteq T_{1,n} \cap F\langle Z \rangle$$

очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $f \in T_{1,n} \cap F\langle Z \rangle$. В силу леммы 4 можно считать, что $f = f(z_1, \dots, z_n, t_1, \dots, t_l)$ и f K -однороден и линеен по переменным t_i , $K = (\emptyset, \{z_i\}, \emptyset, \{t_j\})$.

Обозначим через k степень f по переменным z_i . Возможно два варианта: $k = l$ и $k = l + 1$.

Случай $k = l$. Каждый моном с ненулевым коэффициентом в f имеет вид $u = \alpha z_{i_1} t_{j_1} z_{i_2} t_{j_2} \cdots z_{i_k} t_{j_k}$. Обозначим через $N_m(u)$ множество букв t_i таких, что u может быть представлен в виде $u = \alpha v z_m t_i w$, т.е. $N_m(u)$ – это множество букв t_i , встречающихся после z_m в мономе u . Обозначим через $f_{N_1, N_2, \dots, N_n}$ сумму мономов u , входящих в f с ненулевым коэффициентом, таких, что $N_i(u) = N_i$. Таким образом,

$$f = \sum_{N_1, N_2, \dots, N_n} f_{N_1, N_2, \dots, N_n}.$$

Рассмотрим произвольный $f_{N_1^0, N_2^0, \dots, N_n^0}$. Сделаем подстановку в f : $z_i = e_{1, i+1}$, в переменные t_j из N_i^0 подставим $e_{i+1, 1}$. После такой подстановки заведомо обнулятся все мономы, входящие в остальные $f_{N_1, N_2, \dots, N_n}$, а мономы αu , входящие в $f_{N_1^0, N_2^0, \dots, N_n^0}$, примут значение $\alpha(e_{11})^k = \alpha e_{11}$. Так как $f \in T_{1, n}$, то после этой подстановки $f_{N_1^0, N_2^0, \dots, N_n^0}$ обнулится, следовательно, $f_{N_1^0, N_2^0, \dots, N_n^0}$ представим в виде

$$f_{N_1^0, N_2^0, \dots, N_n^0} = \sum_I \alpha_I u[z_{i_1} t_{j_1}, z_{i_2} t_{j_2}] v,$$

$$I = (u, v, i_1, j_1, i_2, j_2), \quad u, v \in \langle X \rangle_0.$$

Так как мы выбрали произвольный $f_{N_1^0, N_2^0, \dots, N_n^0}$, то это значит, что f также представим в виде

$$f = \sum_I \beta_I u[z_{i_1} t_{j_1}, z_{i_2} t_{j_2}] v.$$

Действуя совершенно аналогично, можно показать, что f представим в виде (4) в случае $k = l + 1$, а также представим в виде (5). Таким образом, согласно лемме 1 $f \in T_0$ и, следовательно, принадлежит $\{F_1, \dots, F_6\}^{T_2}$. Теорема доказана.

5. Базис тождеств супералгебры $\text{Mat}_{1,2}(F)$. В этом пункте мы найдем базис градуированных тождеств супералгебры $\text{Mat}_{1,2}(F)$. Следующая теорема устанавливает связь между градуированными тождествами супералгебры $\text{Mat}_{1,2}(F)$ и тождествами со следом алгебры $M_2(F)$.

ТЕОРЕМА 3. 1. Пусть полилинейный полином $f(x, r_1, \dots, r_l)$ со следом имеет вид

$$f = \sum_{u, v} \alpha_{u, v} u x v + \sum_{u, v} \beta_{u, v} u \text{Tr}(xv), \quad (7)$$

где u, v – некоторые полиномы от переменных r_j , причем для каждого слагаемого обеих сумм хотя бы один из полиномов u, v обнуляется на подстановке $r_1 = 1, \dots, r_l = 1$. Тогда, если $f \in \tilde{T}[M_2(F)]$, то полилинейный полином

$$g(z_2, t_1, t_2, r_1, \dots, r_l) = \sum_{u, v} \alpha_{u, v} u t_1 z_2 v t_2 + \sum_{u, v} \beta_{u, v} u t_2 z_2 v t_1, \quad (8)$$

$r_i \in Y$, $z_i, t_i \in Z$, является градуированным тождеством супералгебры $\text{Mat}_{1,2}(F)$.

2. Обратно, пусть полилинейный полином (8) является градуированным тождеством супералгебры $\text{Mat}_{1,2}(F)$. Тогда полином (7) является тождеством со следом для алгебры $M_2(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Докажем, что полином

$$g_1(z_1, z_2, t_1, t_2, r_1, \dots, r_l) = \sum_{u,v} \alpha_{u,v} z_1 u t_1 z_2 v t_2 + \sum_{u,v} \beta_{u,v} z_1 u t_2 z_2 v t_1$$

является градуированным тождеством супералгебры $\text{Mat}_{1,2}(F)$. В силу его K -однородности ($K = (\emptyset, \{z_1, z_2\}, \{r_1, r_2, \dots, r_l\}, \{t_1, t_2\})$) и полилинейности, достаточно проверить, что g обнуляется на K -согласованных подстановках матричных единиц, т.е. когда в переменные z_i, r_i, t_i подставляются матричные единицы из соответственно $\text{Mat}_{1,2}^{10}(F)$, $\text{Mat}_{1,2}^{00}(F)$, $\text{Mat}_{1,2}^{01}(F)$, либо соответственно из $\text{Mat}_{1,2}^{01}(F)$, $\text{Mat}_{1,2}^{11}(F)$, $\text{Mat}_{1,2}^{10}(F)$. В первом случае доказывать нечего, так как в переменные r_i подставляется e_{11} , и в каждом слагаемом в силу условия обнулится один из полиномов u, v . Рассмотрим второй случай, т.е. подстановку в переменные z_i, r_i, t_i матричных единиц a_i, b_i, c_i из соответственно $\text{Mat}_{1,2}^{01}(F)$, $\text{Mat}_{1,2}^{11}(F)$, $\text{Mat}_{1,2}^{10}(F)$. Заметим, что, так как

$$a_i u(b_1, \dots, b_l) c_j, a_i v(b_1, \dots, b_l) c_j \in \text{Mat}_{1,2}^{00}(F),$$

то

$$\begin{aligned} a_i u(b_1, \dots, b_l) c_j a_p v(b_1, \dots, b_l) c_q &= \text{Tr}(a_i u(b_1, \dots, b_l) c_j a_p v(b_1, \dots, b_l) c_q) e_{11} \\ &= \text{Tr}(a_i u(b_1, \dots, b_l) c_j) \text{Tr}(a_p v(b_1, \dots, b_l) c_q) e_{11}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} g_1(a_1, a_2, c_1, c_2, b_1, \dots, b_l) &= \sum_{u,v} \alpha_{u,v} a_1 u(b_i) c_1 a_2 v(b_i) c_2 + \sum_{u,v} \beta_{u,v} a_1 u(b_i) c_2 a_2 v(b_i) c_1 \\ &= \sum_{u,v} \text{Tr}(\alpha_{u,v} a_1 u(b_i) c_1 a_2 v(b_i) c_2) e_{11} + \text{Tr}\left(\sum_{u,v} \beta_{u,v} a_1 u(b_i) c_2\right) \text{Tr}(a_2 v(b_i) c_1) e_{11} \\ &= \text{Tr}\left(c_2 a_1 \left(\sum_{u,v} \alpha_{u,v} u(b_i) c_1 a_2 v(b_i) + \beta_{u,v} u(b_i) \text{Tr}(c_1 a_2 v(b_i))\right)\right) e_{11}. \end{aligned}$$

Но выражение

$$c_2 a_1 \left(\sum_{u,v} \alpha_{u,v} u(b_i) c_1 a_2 v(b_i) + \beta_{u,v} u(b_i) \text{Tr}(c_1 a_2 v(b_i))\right)$$

обнуляется в силу того, что

$$f = \sum_{u,v} \alpha_{u,v} u x v + \sum_{u,v} \beta_{u,v} u \text{Tr}(x v)$$

является тождеством алгебры $M_2(F)$. Таким образом,

$$\sum_{u,v} \alpha_{u,v} z_1 u t_1 z_2 v t_2 + \sum_{u,v} \beta_{u,v} z_1 u t_2 z_2 v t_1,$$

а следовательно, и

$$\sum_{u,v} \alpha_{u,v} u t_1 z_2 v t_2 + \sum_{u,v} \beta_{u,v} u t_2 z_2 v t_1$$

является тождеством супералгебры $\text{Mat}_{1,2}(F)$.

Часть 2 теоремы доказывается с использованием этой же цепочки равенств: так как значение $c_1 a_2$ можно сделать равным любой матричной единице из $\text{Mat}_{1,2}^{11}(F)$ и выражение

$$c_2 a_1 \left(\sum_{u,v} \alpha_{u,v} u(b_i) c_1 a_2 v(b_i) + \beta_{u,v} u(b_i) \text{Tr}(c_1 a_2 v(b_i)) \right)$$

обнуляется при всех $b_i \in \text{Mat}_{1,2}^{11}(F)$, то

$$f = \sum_{u,v} \alpha_{u,v} u x v + \sum_{u,v} \beta_{u,v} u \text{Tr}(x v)$$

является тождеством алгебры $M_2(F)$.

ЛЕММА 5. *Имеем*

$$H_1(z_2, t_1, t_2, r_1, r_2) = [r_1, r_2] t_1 z_2 t_2 + t_1 z_2 [r_1, r_2] t_2 - [r_1, r_2] t_2 z_2 t_1 - t_2 z_2 [r_1, r_2] t_1 \in T_{1,2},$$

где $r_i \in Y$, $z_i, t_i \in Z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгебра $M_2(F)$ удовлетворяет тождеству $\chi_2(x_1, x_2) = 0$, где $\chi_2(x_1, x_2)$ – полином Гамильтона–Кэли [7]. Утверждение леммы вытекает из п. 1) леммы 3, примененного к тождеству $\chi_2(x, [r_1, r_2]) = 0$.

ЛЕММА 6. *Имеем*

$$H_2(z_2, t_1, t_2, r_1, r_2, r_3) = [r_1, r_2, r_3] t_1 z_2 t_2 - [[r_1, r_2] t_2 z_2 + t_2 z_2 [r_1, r_2], r_3] t_1 \in T_{1,2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы вытекает из п. 1) леммы 3, примененного к хорошо известному тождеству алгебры матриц $M_2(F)$

$$[r_1, r_2, r_3] \text{Tr}(x) = [[r_1, r_2] x + x [r_1, r_2], r_3], \quad (9)$$

которое можно легко получить, вычислив полином $[\chi_2([r_1, r_2], x), r_3]$.

ЛЕММА 7. *Имеем*

$$H_3(r_1, \dots, r_4) = S_4(r_1, r_2, r_3, r_4) \in T_{1,2},$$

$$H_4(r_1, \dots, r_5) = [[r_1, r_2][r_3, r_4] + [r_3, r_4][r_1, r_2], r_5] \in T_{1,2},$$

где $r_i \in Y$, $S_4(r_1, r_2, r_3, r_4)$ – стандартный полином четвертой степени.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы сразу следует из того, что тождества

$$S_4(r_1, r_2, r_3, r_4) = 0 \quad \text{и} \quad [[r_1, r_2][r_3, r_4] + [r_3, r_4][r_1, r_2], r_5]$$

выполнены в $M_2(F)$.

ЛЕММА 8. *Супералгебра $\text{Mat}_{1,2}(F)$ удовлетворяет некоторому тождеству вида*

$$H_7(z_2, t_1, t_2, r_1, \dots, r_4) = 0,$$

$$H_7(z_2, t_1, t_2, r_1, \dots, r_4) = [r_1, r_2][r_3, r_4] t_1 z_2 t_2 - g(z_2, t_1, t_2, r_1, \dots, r_4),$$

где g имеет вид

$$g(z_2, t_1, t_2, r_1, \dots, r_4) = \sum_{u,v} \alpha_{u,v} u t_2 z_2 v t_1,$$

u, v – некоторые мономы от переменных r_i , $r_i \in Y$, $z_i, t_i \in Z$, причем это тождество следует из тождеств $H_3 = 0$ и $H_2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 7 супералгебра $\text{Mat}_{1,2}(F)$ удовлетворяет тождеству $S_4(r_1, r_2, r_3, r_4)t_1z_2t_2 = 0$. Утверждение леммы следует из тождества $H_2 = 0$ и того факта, что многочлен $S_4(r_1, r_2, r_3, r_4)$ равен $[r_1, r_2][r_3, r_4]$ по модулю T -идеала $\{[x, y, z]\}^T$, порожденного тройным коммутатором.

ЛЕММА 9. *Имеем*

$$H_5(z_1, z_2, t_1, t_2, s_1) = [s_1, z_1t_2z_2t_1 + z_2t_1z_1t_2 - z_2t_2z_1t_1 - z_1t_1z_2t_2] \in T_{1,2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как тождество $H_1 = 0$ выполнено в $\text{Mat}_{1,2}(F)$, то выполнено равенство

$$\text{Tr}(a_1H_1(a_2, c_1, c_2, b_1, b_2)) = 0$$

$$\text{для всех } a_i, c_i \in \text{Mat}_{1,2}^{01}(F) + \text{Mat}_{1,2}^{10}(F), \quad b_i \in \text{Mat}_{1,2}^{00}(F) + \text{Mat}_{1,2}^{11}(F).$$

Пользуясь свойством $\text{Tr}(uv) = \text{Tr}(vu)$, равенство $\text{Tr}(a_1H_1(a_2, c_1, c_2, b_1, b_2)) = 0$ можно переписать в виде $\text{Tr}(b_1H_5(c_1, c_2, a_1, a_2, b_2)) = 0$. Из этого следует, что

$$H_5(c_1, c_2, a_1, a_2, b_2) = 0$$

$$\text{для всех } a_i, c_i \in \text{Mat}_{1,2}^{00}(F) + \text{Mat}_{1,2}^{11}(F), \quad b_i \in \text{Mat}_{1,2}^{01}(F) + \text{Mat}_{1,2}^{10}(F),$$

т.е. $H_5(z_1, z_2, t_1, t_2, s_1) \in T_{1,2}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. *Супералгебра $\text{Mat}_{1,2}(F)$ удовлетворяет тождеству*

$$H_6(z_2, t_1, t_2, r_1, r_2, r_3) = 0,$$

$$H_6(z_2, t_1, t_2, r_1, \dots, r_4) = [r_1, r_2]t_1z_2r_3t_2 - r_3[r_1, r_2]t_1z_2t_2 - [r_3, r_1]t_1z_2r_2t_2 + r_2r_4[r_3, r_1]t_1z_2t_2 - g,$$

где g имеет вид

$$g(z_2, t_1, t_2, r_1, \dots, r_4) = \sum_{u,v} \alpha_{u,v} ut_2z_2vt_1,$$

u, v – некоторые мономы от переменных r_i . Полином g мы укажем явно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi(x_1, x_2)$ – полином Гамильтона–Кэли. Рассмотрим разность $\chi([a, b], x) - \chi([x, a], b)$, мы получим тождество алгебры $M_2(F)$

$$[a, b] \text{Tr}(x) = [x, a] \text{Tr}(b) + g_1(a, b, x), \quad g_1(a, b, x) = x[a, b] + [a, b]x - [x, a]b - b[x, a].$$

Обозначим через $g_2(r_1, r_2, r_3, x)$ полином, стоящий в правой части (9). Тогда по модулю тождеств со следом алгебры $M_2(F)$ имеем

$$\begin{aligned} & [a, b] \text{Tr}(xc) - c[a, b] \text{Tr}(x) - [c, a] \text{Tr}(xb) + b[c, a] \text{Tr}(x) \\ &= -[b, a] \text{Tr}(xc) + c[b, a] \text{Tr}(x) - [c, a] \text{Tr}(xb) + b[c, a] \text{Tr}(x) \\ &= -[xc, b] \text{Tr}(a) + c[x, b] \text{Tr}(a) - [xb, c] \text{Tr}(a) + b[x, c] \text{Tr}(a) \\ &\quad - g_1(b, a, xc) + cg_1(b, a, x) - g_1(c, a, xb) + bg_1(c, a, x) \\ &= [b, x, c] \text{Tr}(a) + [c, x, b] \text{Tr}(a) \\ &\quad - g_1(b, a, xc) + cg_1(b, a, x) - g_1(c, a, xb) + bg_1(c, a, x) \\ &= g_2(b, x, c, a) + g_2(c, x, b, a) - g_1(b, a, xc) \\ &\quad + cg_1(b, a, x) - g_1(c, a, xb) + bg_1(c, a, x). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем тождество со следом алгебры $M_2(F)$:

$$[a, b] \operatorname{Tr}(xc) - c[a, b] \operatorname{Tr}(x) - [c, a] \operatorname{Tr}(xb) + b[c, a] \operatorname{Tr}(x) - g_3 = 0,$$

где

$$g_3 = g_2(b, x, c, a) + g_2(c, x, b, a) - g_1(b, a, xc) + cg_1(b, a, x) - g_1(c, a, xb) + bg_1(c, a, x).$$

Применив лемму 3, получаем утверждение леммы и выражение для g .

Пусть имеется некоторый полилинейный полином

$$f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Обозначим через f^* полином

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(n)} \cdots x_{\sigma(1)}.$$

Так как в супералгебре $\operatorname{Mat}_{1,2}(F)$ имеется антиавтоморфизм, сохраняющий градуировку (транспонирование), то если f является градуированным тождеством супералгебры $\operatorname{Mat}_{1,2}(F)$, f^* также является градуированным тождеством супералгебры $\operatorname{Mat}_{1,2}(F)$.

ТЕОРЕМА 4. *Имеем*

$$T_{1,2} = \{F_1, \dots, F_6, G^2, H_1, \dots, H_6, H_1^*, \dots, H_6^*\}^{T_2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через T_1 T_2 -идеал

$$\{F_1, \dots, F_6, G^2, H_1, \dots, H_6, H_1^*, \dots, H_6^*\}^{T_2}.$$

Очевидно, $T_1 \subseteq T_{1,2}$. Нам нужно показать, что $T_{1,2} \subseteq T_1$, другими словами, что градуированные тождества супералгебры $\operatorname{Mat}_{1,2}(F)$ следуют из полиномов идеала T_1 . Под эквивалентностью полиномов далее будем понимать равенство полиномов по модулю T_1 . Пусть $f(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n)$ — K -однородный полином, $K = (\{s_1, \dots, s_n\}, \{z_1, \dots, z_k\}, \{r_1, \dots, r_m\}, \{t_1, \dots, t_l\})$. Покажем сначала, что по модулю тождеств $F_1, \dots, F_6$ можно считать, что либо f не зависит от переменных r_i , либо f не зависит от переменных s_i . Очевидно, f представим в виде

$$f = \sum_I \alpha_I u_1 z_{i_1} v_1 t_{j_1} u_2 z_{i_2} v_2 t_{j_2} \cdots,$$

u_i, v_i — мономы соответственно от букв s_j и r_k . Преобразуем f к виду

$$f = g + \sum_I \beta_I z_{i_1} v_1 t_{j_1} \cdots s_1 s_2 \cdots s_n z_1 \cdots,$$

где g принадлежит идеалу $F\langle X \rangle$, порожденному коммутаторами вида $[z_i v t_j, s_q]$, $[s_q, s_p]$. С помощью тождеств $F_1, \dots, F_6$ g представим в виде

$$\sum_I \gamma_I u_{i_1} z_{i_1} t_{j_1} \cdots z_1 r_1 \cdots r_m \cdots.$$

Таким образом,

$$f = f_1(s_1, \dots, s_n z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m) \\ + f_2(z_1 r_1, \dots, r_m, z_2, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, s_1, \dots, s_n)$$

для некоторых полиномов f_1, f_2 , причем $f_2|_{s_1=1, \dots, s_n=1} = 0$. Отсюда следует, что

$$f|_{s_1=1, \dots, s_n=1} = f_1(s_1, \dots, s_n z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m)|_{s_1=1, \dots, s_n=1} \\ = f_1(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m),$$

т.е. $f_1(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m)$ следует из f . Также

$$f - f_1(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m)|_{z_1=s_1, \dots, s_n z_1} \\ = f_2(z_1 r_1, \dots, r_m, z_2, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, s_1, \dots, s_n),$$

таким образом, $f_2(z_1 r_1, \dots, r_m, z_2, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, s_1, \dots, s_n)$, а значит, и $f_2(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, s_1, \dots, s_n)$ следуют из f . С другой стороны, f , очевидно, следует из $f_1(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m)$ и $f_2(z_1, \dots, z_k, t_1, \dots, t_l, s_1, \dots, s_n)$.

Таким образом, мы можем считать f K -однородным, где либо $K = (\emptyset, \{z_1, \dots, z_k\}, \{r_1, \dots, r_m\}, \{t_1, \dots, t_l\})$, либо $K = (\{s_1, \dots, s_n\}, \{z_1, \dots, z_k\}, \emptyset, \{t_1, \dots, t_l\})$.

Пусть $K = (\emptyset, \{z_1, \dots, z_k\}, \{r_1, \dots, r_m\}, \{t_1, \dots, t_l\})$. Возможно два случая: $k = l$ и $k = l + 1$.

Пусть $k = l$ и $k \geq 3$. Тогда f имеет вид

$$f = \sum_I \alpha_I z_{i_1} v_1 t_{j_1} \cdots z_{i_l} v_l t_{j_l}, \quad I = (i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_l, v_1, \dots, v_l),$$

v_i — мономы от переменных r_i . Покажем, что по модулю T_1 f можно считать имеющим вид

$$f = \sum_I \beta_I z_1 v_1 t_{j_1} \cdots z_l v_l t_{j_l}, \quad I = (j_1, \dots, j_l, v_1, \dots, v_l).$$

Очевидно, f можно представить в виде

$$f = \sum_I \gamma_I z_1 v_1 t_{j_1} \cdots z_l v_l t_{j_l} + g,$$

где g принадлежит идеалу $F\langle X \rangle$, порожденному коммутаторами $[z_{p_1} w_1 t_{q_1}, z_{p_2} w_2 t_{q_2}]$. С помощью тождеств $F_1, \dots, F_6$ получаем, что g эквивалентен полиному вида

$$g_1 = \sum_K \delta_K z_{i_1} t_{j_1} \cdots z_1 r_1 r_2 \cdots r_m t_{j_q} \cdots z_{i_l} t_{j_l}.$$

Полином $f|_{r_1=1, \dots, r_m=1}$ лежит в $T_{1,2} \cap F\langle Z \rangle$ и, следовательно, в T_1 . Но

$$(g_1|_{r_1=1, \dots, r_m=1})|_{z_1=z_1 r_1 r_2 \dots r_m} = g_1,$$

и поэтому полином $f - (f|_{r_1=1, \dots, r_m=1})|_{z_1=z_1 r_1 r_2 \dots r_m}$ эквивалентен полиному вида

$$f = \sum_I \gamma_I z_1 v_1 t_{j_1} \cdots z_l v_l t_{j_l}.$$

Пусть f и g — K -однородные полиномы (K выбрано выше). Будем обозначать $f \sim_* g$, если полином $f - g$ эквивалентен полиному вида

$$h = \sum_I \alpha_I z_{i_1} v_1 t_{j_1} \cdots z_{i_l} v_l t_{j_l}, \quad (10)$$

где никакие i_q и j_q не принимают одновременно значения 1 (другими словами, мономы $z_{i_1} v_1 t_{j_1} \cdots z_{i_l} v_l t_{j_l}$ не содержат подслов вида $z_1 v t_1$, $v \in \langle Y \rangle$).

Очевидно, $f \sim_* f_1$,

$$f_1 = \sum_I \alpha_I z_1 v_1 t_1 z_2 v_2 t_{j_2} \cdots z_{i_l} v_l t_{j_l}.$$

Используя тождество G^2 , легко видеть, что

$$z_1 v_1 t_1 z_{i_2} v_2 t_{j_2} z_{i_3} v_3 t_{j_3} \sim_* z_1 v_1 t_1 z_{i_2} v_3 t_{j_3} z_{i_3} v_2 t_{j_2}.$$

Взяв $v_1 = v$, $v_2 = a$, $v_3 = b$ и используя несколько раз упомянутую $\sim_*$ -эквивалентность, имеем

$$\begin{aligned} z_1 v t_1 z_{i_2} a t_{j_2} z_{i_3} b t_{j_3} &\sim_* z_1 v t_1 z_{i_2} a b t_{j_3} z_{i_3} t_{j_2} \sim_* z_1 v t_1 z_{i_2} t_{j_2} z_{i_3} a b t_{j_3} \\ &\sim_* z_1 v t_1 z_{i_2} t_{j_3} z_{i_3} a b t_{j_2} \sim_* z_1 v t_1 z_{i_2} b t_{j_2} z_{i_3} a t_{j_3}. \end{aligned}$$

То есть в слагаемом $\alpha_I z_1 v_1 t_1 z_2 v_2 t_{j_2} \cdots z_{i_l} v_l t_{j_l}$ мы можем с точностью до $\sim_*$ -эквивалентности переставлять между собой буквы $t_2, \dots, t_l$, а также переставлять между собой буквы мономов $v_2, \dots, v_l$. Пусть теперь в произвольном слагаемом $\alpha_I z_1 v_1^0 t_1 z_2 v_2^0 t_{j_2} \cdots z_{i_l} v_l^0 t_{j_l}$ v_1^0 содержит буквы $r_{q_1}, \dots, r_{q_d}$, $q_1 < q_2 < \dots < q_d$. Тогда $v_1^0 = r_{q_1} r_{q_2} \cdots r_{q_d} + g$, где g — полином, лежащий в идеале алгебры $F\langle r_i \rangle$, порожденном коммутаторами $[r_{q_i}, r_{q_j}]$. Отсюда с помощью тождества H_1 получаем, что

$$\begin{aligned} z_1 v_1^0 t_1 z_2 v_2^0 t_{j_2} \cdots z_{i_l} v_l^0 t_{j_l} &\sim_* z_1 r_{q_1} r_{q_2} \cdots r_{q_d} t_1 z_2 v_2^0 t_{j_2} \cdots z_{i_l} v_l^0 t_{j_l} \\ &\quad + \sum_I \alpha_I z_1 v_1 t_1 z_2 v_2 t_{j_2} \cdots z_{i_l} v_l t_{j_l}, \end{aligned}$$

где $\deg v_1 < d$ для всех I .

В конечном итоге имеем

$$f \sim_* \sum_I \alpha_I z_1 r_{q_1} r_{q_2} \cdots r_{q_d} t_1 z_2 r_{p_1} r_{p_2} \cdots r_{p_{m-d}} t_2 z_3 t_3 \cdots z_l t_l,$$

$I = (q_1, q_2, \dots, q_d), q_1 < q_2 < \dots < q_d$. То есть

$$f \sim_* \sum_I \alpha_I z_1 r_{q_1} r_{q_2} \cdots r_{q_d} t_1 z_2 r_{p_1} r_{p_2} \cdots r_{p_{m-d}} t_2 z_3 t_3 \cdots z_l t_l + h,$$

где h имеет вид (10). Выберем в указанном представлении f индекс I_0 с максимальным среди всех I множеством $\{r_{q_1} r_{q_2} \cdots, r_{q_d}\}$ и сделаем подстановку

$$\begin{aligned} r_{q_1} &= r_{q_2} = \cdots = r_{q_d} = e_{22}, & z_1 &= e_{12}, & t_1 &= e_{21}, \\ r_{p_1} &= r_{p_2} = \cdots = r_{p_{m-d}} = e_{33}, & t_2 &= \cdots = t_i = e_{31}, & z_2 &= \cdots = z_l = e_{13}. \end{aligned}$$

После этого мы получим $\alpha_{(q_1, q_2, \dots, q_d)} = 0$. То есть мы имеем $f \sim_* 0$, другими словами, f представим в виде (10). Теперь представим f в виде

$$f = \sum_I \alpha_I z_{i_1} t_{j_1} \cdots z_1 r_1 r_2 \cdots r_m t_q \cdots z_{i_l} t_{j_l} + g,$$

g принадлежит идеалу алгебры $F\langle X \rangle$, порожденному коммутаторами вида $[t_q z_p, r_i]$, $[r_i, r_j]$. Так как $f|_{r_1=1, r_2=1, \dots, r_m=1}$ лежит в $T_{1,2}$ и $F\langle Z \rangle$, то в силу теоремы 2 получаем, что $f|_{r_1=1, r_2=1, \dots, r_m=1}$ лежит в T_1 . Следовательно, f эквивалентен полиному

$$f - (f|_{r_1=1, r_2=1, \dots, r_m=1})|_{z_1=z_1 r_1 r_2 \dots r_m} = g.$$

Таким образом, можно считать, f K -однородным полиномом вида (10), принадлежащим идеалу алгебры $F\langle X \rangle$, порожденному коммутаторами вида $[t_q z_p, r_i]$, $[r_i, r_j]$. Теперь с помощью тождеств $F_1, \dots, F_6$ представим f с точностью до эквивалентности в виде

$$f = f_1(z_2, \dots, z_k, t_2, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m, t_1 z_1),$$

причем f принадлежит идеалу алгебры $F\langle X \rangle$, порожденному коммутаторами вида $[t_q z_p, r_i]$, $[r_i, r_j]$ (теперь это возможно в силу представимости f в виде (10)). Из такого представления и того, что f является градуированным тождеством алгебры $\text{Mat}_{1,2}(F)$, сразу следует, что полином $f_1(z_2, \dots, z_k, t_2, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m, r_{m+1})$ является градуированным тождеством алгебры $\text{Mat}_{1,2}(F)$, причем f следует из $f_1(z_2, \dots, z_k, t_2, \dots, t_l, r_1, \dots, r_m, r_{m+1})$.

Таким образом, мы показали, что f следует из полиномов из T_1 и полиномов из $T_{1,2}$, имеющих на два меньшую степень по переменным из Z , чем f . Аналогичным способом это можно сделать в остальных трех случаях при $k \geq 3$: $k = l + 1$ при выбранном K , и $k = l$ и $k = l + 1$ при $K = (\{s_1, \dots, s_n\}, \{z_1, \dots, z_k\}, \emptyset, \{t_1, \dots, t_l\})$.

Пусть теперь $k < 3$. Также рассмотрим случай $K = (\emptyset, \{z_1, \dots, z_k\}, \{r_1, \dots, r_m\}, \{t_1, \dots, t_l\})$ и $k = l$ (остальные случаи аналогичны). В этом случае f имеет вид

$$f = \sum_I \alpha_I z_{i_1} v_1 t_{j_1} z_{i_2} v_2 t_{j_2}.$$

Точно так же, как и в случае $k \geq 3$, можно считать $f = \sum_I \alpha_I z_1 v_1 t_{j_1} z_2 v_2 t_{j_2}$, т.е.

$$f = \sum_{u,v} \alpha_{u,v} z_1 u t_1 z_2 v t_2 + \sum_{u,v} \beta_{u,v} z_1 u t_2 z_2 v t_1.$$

С помощью тождеств H_1 , H_2 и H_7 f с точностью до эквивалентности представим в виде

$$\begin{aligned} f &= \sum_I \alpha_I z_1 r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_p} [r_i, r_j] t_1 z_2 r_{j_1} r_{j_2} \cdots r_{j_d} t_2 \\ &\quad + \sum_J \beta_J z_1 r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_p} t_1 z_2 r_{j_1} r_{j_2} \cdots r_{j_d} t_2 + \sum_{u,v} \gamma_{u,v} z_1 u t_2 z_2 v t_1, \end{aligned} \quad (11)$$

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_p, i, j, j_1, j_2, \dots, j_d), \quad J = (i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_d),$$

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_p, \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_d, \quad i < j.$$

Беря произвольный $J = (i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_d)$ и делая подстановку

$$\begin{aligned} z_1 &= e_{12}, & r_{i_1} &= r_{i_2} = \dots = r_{i_p} = e_{22}, & t_1 &= e_{21}, \\ z_2 &= e_{13}, & r_{j_1} &= r_{j_2} = \dots = r_{j_d} = e_{33}, & t_2 &= e_{31}, \end{aligned}$$

видим, что $\beta_J = 0$ для всех J . Далее, с помощью тождеств H_6 и H_2 , H_7 приведем f к виду

$$\begin{aligned} f &= \sum_I \gamma_I z_1 r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_p} [r_i, r_j] t_1 z_2 r_q t_2 \\ &\quad + \sum_J \delta_J z_1 r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_p} [r_i, r_j] t_1 z_2 t_2 + \sum_{u,v} \eta_{u,v} z_1 u t_2 z_2 v t_1, \\ I &= (i_1, i_2, \dots, i_p, i, j, q), & i_1 < i_2 < \dots < i_p, & \quad i < j < q, \\ J &= (i_1, i_2, \dots, i_p, i, j), & i_1 < i_2 < \dots < i_p, & \quad i < j. \end{aligned} \quad (12)$$

Из леммы 3 следует, что $M_2(F)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} f &= \sum_I \gamma_I r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_p} [r_i, r_j] \operatorname{Tr}(x r_q) \\ &\quad + \sum_J \delta_J r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_p} [r_i, r_j] \operatorname{Tr} x + \sum_{u,v} \eta_{u,v} u x v. \end{aligned} \quad (13)$$

Предположим, что для некоторого $I = (i_1, i_2, \dots, i_p, i, j, k)$ выполнено $\gamma_I \neq 0$. Сделаем подстановку

$$r_{i_1} = r_{i_2} = \dots = r_{i_p} = x = 1.$$

Получим тождество алгебры $M_2(F)$ вида $[r_i, r_j] \operatorname{Tr}(r_q) = h(r_i, r_j, r_q)$ (h – бесследовый полином), чего, как несложно проверить, быть не может. Аналогично все $\delta_J = 0$, т.е. f имеет вид

$$f = \sum_{u,v} \gamma_{u,v} z_1 u t_2 z_2 v t_1$$

и, как выше, следует из некоторого полинома $g(z_1, t_1, r_1, \dots, r_{m+1})$. Очевидно, что все градуированные тождества вида $f = z_1 g(r_1, \dots, r_{m+1}) t_1$ следуют из тождеств H_3 , H_4 , так как f является тождеством тогда и только тогда, когда $g(r_1, \dots, r_{m+1})$ является тождеством алгебры $M_2(F)$, а полиномы $H_3(x_1, \dots, x_4)$, $H_4(x_1, \dots, x_5)$ образуют базис тождеств для $M_2(F)$ [8]. Теорема доказана.

Зафиксируем некоторый линейный порядок на множестве Z . Запишем произвольный полилинейный полином f в виде

$$\begin{aligned} f &= \sum_{u,\sigma} \alpha_{u,\sigma} u_1 z_{\sigma(1)} u_2 z_{\sigma(2)} \dots z_{\sigma(n)} u_{n+1}, \\ u &= (u_1, \dots, u_{n+1}), \quad u_i \in \langle Y \rangle, \quad z_i \in Z, \quad z_1 < z_2 < \dots < z_n, \quad \alpha_{u,\sigma} \in F. \end{aligned}$$

Положим

$$f^- = \sum_{u,\sigma} (-1)^\sigma \alpha_{u,\sigma} u_1 z_{\sigma(1)} u_2 z_{\sigma(2)} \dots z_{\sigma(n)} u_{n+1}.$$

С помощью указанной операции мы сразу же получаем базис тождеств алгебры $M_{1,2}(F)$, так как $M_{1,2}$ является грасмановой оболочкой алгебры $\text{Mat}_{1,2}(F)$ [9]. В качестве него можно взять набор полиномов

$$F_1^-, \dots, F_6^-, (G^2)^-, H_1^-, \dots, H_6^-, (H_1^*)^-, \dots, (H_6^*)^-.$$

Автор выражает глубокую признательность А. Р. Кемеру за множество интересных обсуждений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] O. M. Di Vincenzo, “On the graded identities of $M_{1,1}(E)$ ”, *Israel J. Math.*, **80**:3 (1992), 323–335.
- [2] P. Koshlukov, S. S. Azevedo, “A basis for the graded identities of the matrix algebra of order two over a finite field of characteristic $p \neq 2$ ”, *Finite Fields Appl.*, **8**:4 (2002), 597–609.
- [3] S. Yu. Vasilovsky, “ $\mathbf{Z}_n$ -graded polynomial identities of the full matrix algebra of order n ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**:12 (1999), 3517–3524.
- [4] S. S. Azevedo, “Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field”, *Comm. Algebra*, **30**:12 (2002), 5849–5860.
- [5] Y. Bahturin, V. Drensky, “Graded polynomial identities of matrices”, *Linear Algebra Appl.*, **357**:1 (2002), 15–34.
- [6] Г. Джеймс, *Теория представлений симметрических групп*, Математика. Новое в зарубежной науке, **32**, Мир, М., 1982.
- [7] Ю. П. Размыслов, “Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики нуль”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:4 (1974), 723–756.
- [8] В. Дренски, “Минимальный базис тождеств алгебры матриц второго порядка над полем характеристики 0”, *Алгебра и логика*, **20**:3 (1981), 282–290.
- [9] A. R. Kemer, *Ideals of Identities of Associative Algebras*, Transl. Math. Monogr., **87**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

И. В. Аверьянов

Ульяновский государственный университет

Поступило

02.11.2007

Исправленный вариант

23.05.2008