Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Лунев, Л. Л. Оридорога, Точные константы в обобщенных неравенствах для промежуточных производных, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 5, 737–744

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4299>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 11:36:51

Точные константы в обобщенных неравенствах для промежуточных производных

А. А. Лунёв, Л. Л. Оридорога

Рассматривается соболевское пространство $W_2^n(\mathbb{R}_+)$ на полуоси с нормой общего вида, задаваемой с помощью квадратичного полинома от производных с неотрицательными коэффициентами. Исследуется задача о точных константах $A_{n,k}$ в неравенствах колмогоровского типа для значений промежуточных производных $|f^{(k)}(0)| \leq A_{n,k} \|f\|$. В общем случае выражение для констант $A_{n,k}$ получено в виде отношения двух определителей. С помощью общей формулы найдены явные выражения для констант $A_{n,k}$ в случае следующих норм: $\|f\|_1^2 = \|f\|_{L_2}^2 + \|f^{(n)}\|_{L_2}^2$ и $\|f\|_2^2 = \sum_{l=0}^n \|f^{(l)}\|_{L_2}^2$. В случае нормы $\|\cdot\|_1$ формулы для констант $A_{n,k}$ получены ранее другим методом Калябиным. Изучено также асимптотическое поведение констант $A_{n,k}$ в случае нормы $\|\cdot\|_2$. Кроме того, доказано некоторое свойство симметрии констант $A_{n,k}$ в общем случае.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Пусть $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, причем $a_0 > 0$, $a_n > 0$ и $a_q \geq 0$ при $q \in \{1, \dots, n-1\}$. Рассмотрим $W_2^n(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$ – соболевское пространство, состоящее из всех (комплекснозначных) функций $f(x)$, определенных на положительной полуоси $x \geq 0$, имеющих абсолютно непрерывную производную $f^{(n-1)}(x)$ порядка $n-1$ и обладающих конечной нормой

$$\|f\| = \|f\|_{W_2^n(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})} := \left(\int_0^{+\infty} \sum_{l=0}^n a_l |f^{(l)}(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.1)$$

Цель заметки – вычисление точных, т.е. наименьших возможных, констант в обобщенных неравенствах типа Колмогорова

$$|f^{(k)}(0)| \leq A_{n,k,\mathbf{a}} \|f\|_{W_2^n(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}. \quad (1.2)$$

Ранее в различных работах исследовался случай $\mathbf{a} = (1, 0, \dots, 0, 1)$, т.е. находились точные константы $A_{n,k} := A_{n,k,(1,0,\dots,0,1)}$ в неравенствах

$$|f^{(k)}(0)| \leq A_{n,k} \left(\int_0^{+\infty} (|f(x)|^2 + |f^{(n)}(x)|^2) dx \right)^{1/2}. \quad (1.3)$$

Известные результаты о константах в неравенствах для промежуточных производных в различных случаях содержатся, например, в монографиях Тихомирова [1; § 2.4] и Бабенко, Корнейчука, Кофанова, Пичугова [2]. Так, для пространства

$W_2^n(\mathbb{R})$ точные константы в подобных неравенствах нашел Тайков [3] (см. также [1; п. 2.4.4]). Именно, он получил простую явную формулу

$$A_{n,k}^* = \left(\frac{2n \sin((2k+1)\pi)}{2n} \right)^{-1/2},$$

где $A_{n,k}^*$ – наименьшая константа в неравенствах $|f^{(k)}(0)| \leq A_{n,k}^* \|f\|_{W_2^n(\mathbb{R})}$.

Случай полуоси оказался значительно труднее для исследования. В частности, Габушин [4] (см. также [1; п. 2.4.5]) нашел функции (в виде линейных комбинаций убывающих экспонент), экстремальные для неравенств (1.3). Однако неявно определяемые этим результатом числа $A_{n,k}$ не были вычислены эффективно.

Калябин исследовал эту задачу в работах [5], [6]. В недавней работе [7] он нашел явные формулы для констант $A_{n,k}$

$$A_{n,k} = \left(\sin \frac{\pi(2k+1)}{2n} \right)^{-1/2} \prod_{s=1}^k \operatorname{ctg} \frac{\pi s}{2n}. \quad (1.4)$$

В работе мы предлагаем другой метод для нахождения констант $A_{n,k}$. При этом формула Калябина (1.4) получается в качестве частного случая общей формулы. Кроме того, удалось найти явный вид для рассматриваемых констант в случае вектора $\mathbf{a} = (1, 1, \dots, 1)$, также используемого при определении соболевского пространства.

Перейдем к формулировке полученных результатов. Для этого нам необходимо предварительно провести некоторое рассуждение и ввести нужные обозначения.

Заметим, что уравнение $\sum_{l=0}^n a_l x^l = 0$ имеет ровно n корней x_p , $p \in \{1, \dots, n\}$ (с учетом кратности), причем, в силу условий на коэффициенты уравнения, $x_p \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Поэтому уравнение $\sum_{l=0}^n a_l (-\lambda^2)^l = 0$ имеет ровно n корней с учетом кратности, лежащих в левой полуплоскости $\mathbb{C}_l = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$:

$$\lambda_p = \sqrt{-x_p}, \quad p \in \{1, \dots, n\}, \quad (1.5)$$

где берется значение квадратного корня, лежащее в $\mathbb{C}_l$.

Главным результатом заметки является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть все λ_p различны. Тогда матрица

$$D = (d_{p,q})_{p,q=1}^n = \left(\sum_{l=0}^{n-p} (-1)^{l+1} a_{l+p} \lambda_q^{2l+p} \right)_{p,q=1}^n \quad (1.6)$$

обратима, и наименьшая константа $A_{n,k,\mathbf{a}}$ в неравенстве (1.2) дается формулой

$$A_{n,k,\mathbf{a}}^2 = \frac{\det(D^{(k)})}{\det(D)}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad (1.7)$$

где матрица $D^{(k)} = (d_{p,q}^{(k)})_{p,q=1}^n$ получается из матрицы D заменой $(k+1)$ -й строки строкой $(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.

Доказательство теоремы 1 существенно отличается от доказательства формулы (1.4) в работе [7]. Именно, оно опирается на теорему Рисса об общем виде

линейного функционала в гильбертовом пространстве. Мы вычисляем норму функционала $L_k(L_k(f) = f^{(k)}(0))$, реализуя его в виде $L_k(f) = (f, g_k)$, $g_k \in W_2^n(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$ и вычисляя норму $\|g_k\|_{W_2^n(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})}$ элемента g_k . Более того, теорема Рисса позволяет заменить квадрат нормы этого элемента значением функционала на нем, т.е. вместо довольно сложного интеграла в (1.1) вычислять k -ю производную в нуле $g_k^{(k)}(0)$.

Отметим также, что в недавней работе [8] одним из авторов дано другое доказательство формулы (1.4), также использующее теорему Рисса, хотя и более громоздкое.

Сформулируем теперь некоторые следствия из теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для каждого $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$A_{n,k}^2 = \frac{1}{\sin((2k+1)\alpha)} \prod_{p=1}^k \operatorname{ctg} p\alpha \prod_{p=1}^{n-k-1} \operatorname{ctg} p\alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{2n}. \quad (1.8)$$

Отсюда легко следует формула Калябина (1.4). Кроме того, из формулы (1.8) моментально следует симметрия констант $A_{n,k}$: $A_{n,k} = A_{n,n-k-1}$. Более того, верно следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n+1}$, причем $b_p = a_{n-p}$ при $p \in \{0, \dots, n\}$. Тогда для каждого $k \in \{0, \dots, n-1\}$ справедливо равенство

$$A_{n,n-k-1,\mathbf{b}} = A_{n,k,\mathbf{a}}. \quad (1.9)$$

Отсюда в частности следует, что $A_{n,n-k-1,\mathbf{a}} = A_{n,k,\mathbf{a}}$, если $a_p = a_{n-p}$ при $p \in \{0, \dots, n\}$.

Обозначим $\tilde{A}_{n,k} := A_{n,k,(1,1,\dots,1)}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\tilde{A}_{n,k-1}^2 = \frac{\operatorname{ctg}(\phi/2)}{n+1} \cdot \frac{\sin^2 k\phi}{\sin^2 k\phi - \sin^2(\phi/2)}, \quad \phi = \frac{\pi}{n+1}. \quad (1.10)$$

Из формулы (1.10) сразу видно, что последовательность $\{\tilde{A}_{n,k}\}_{k=0}^{n-1}$ выпукла вниз. Интересно отметить, что последовательность $\{A_{n,k}\}_{k=0}^{n-1}$ выпукла вверх (см. [7]). Кроме того, изучено асимптотическое поведение констант $\tilde{A}_{n,k}$, которое существенно отличается от асимптотического поведения констант $A_{n,k}$.

2. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим в $W_2^n(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$ линейный функционал $L_k(f) := f^{(k)}(0)$. Как известно, этот функционал ограничен. Поэтому искомая константа $A_{n,k,\mathbf{a}}$ равна его норме $\|L_k\|$. Так как пространство $H := W_2^n(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$ – гильбертово со скалярным произведением

$$(f, g) = (f, g)_{W_2^n(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})} := \int_0^{+\infty} \sum_{l=0}^n a_l f^{(l)}(x) \overline{g^{(l)}(x)} dx, \quad (2.1)$$

то по теореме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве существует единственная функция $g_k \in H$ такая, что

$$L_k(f) = (f, g_k), \quad f \in H, \quad (2.2)$$

при этом, $\|L_k\| = \|g_k\|$. Используя равенство (2.2), получим

$$A_{n,k,\mathbf{a}}^2 = \|L_k\|^2 = \|g_k\|^2 = (g_k, g_k) = L_k(g_k) = g_k^{(k)}(0). \quad (2.3)$$

Согласно (2.2) и (2.1) получим

$$L_k(f) = f^{(k)}(0) = \int_0^{+\infty} \sum_{l=0}^n a_l f^{(l)}(x) \overline{g_k^{(l)}(x)} dx, \quad f \in H. \quad (2.4)$$

Интегрируя по частям интеграл в правой части (2.4), меняя порядок суммирования и учитывая, что для $m \in \mathbb{N}$ функции из $W_2^m(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$ исчезают на бесконечности вместе со своими производными до порядка $m - 1$, получим для $f \in W_2^n(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$

$$f^{(k)}(0) = \int_0^{+\infty} \overline{g_k(x)} \sum_{l=0}^n a_l (-1)^l f^{(2l)}(x) dx + \sum_{p=1}^n \overline{g_k^{(p-1)}(0)} \sum_{l=0}^{n-p} (-1)^{l+1} a_{l+p} f^{(2l+p)}(0). \quad (2.5)$$

Подставим в (2.5) $f(x) = f_q(x) = e^{\lambda_q x}$, где числа λ_q определяются равенством (1.5). Так как $\lambda_q \in \mathbb{C}_l$, то $f_q \in W_2^{2n}(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$. Кроме того, из равенства $\sum_{l=0}^n a_l (-\lambda_q^2)^l = 0$ следует, что $\sum_{l=0}^n a_l (-1)^l f_q^{(2l)}(x) = 0$. Поэтому интеграл в правой части (2.5) равен нулю, и значит

$$f_q^{(k)}(0) = \lambda_q^k = \sum_{p=1}^n \overline{g_k^{(p-1)}(0)} \sum_{l=0}^{n-p} (-1)^{l+1} a_{l+p} \lambda_q^{2l+p},$$

$$k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad q \in \{1, \dots, n\}.$$

В матричной форме эти соотношения запишутся в виде

$$V = GD, \quad \text{где} \quad V := (\lambda_q^{r-1})_{r,q=1}^n, \quad G := (\overline{g_{r-1}^{(p-1)}(0)})_{r,p=1}^n,$$

а матрица D определяется равенством (1.6).

Так как числа λ_q различны, то V – невырожденная матрица типа Вандермонда. Поэтому D обратима и $G = VD^{-1}$. Пусть $D^{-1} =: (\tilde{d}_{p,q})_{p,q=1}^n$. По формулам Крамера

$$A_{n,k,\mathbf{a}}^2 = g_k^{(k)}(0) = \overline{g_k^{(k)}(0)} = \sum_{p=1}^n \lambda_p^k \tilde{d}_{p,k+1} = \frac{1}{\det(D)} \sum_{p=0}^n \lambda_p^k D_{k+1,p}, \quad (2.6)$$

где $D_{q,p}$ – алгебраическое дополнение элемента $d_{p,q}$ матрицы D . Раскладывая определитель матрицы $D^{(k)}$ по $(k+1)$ -й строке, получим, $\det(D^{(k)}) = \sum_{p=0}^n \lambda_p^k D_{k+1,p}$. Поэтому $A_{n,k,\mathbf{a}}^2 = \det(D^{(k)}) / \det(D)$. Тем самым теорема 1 доказана.

Мы дополним теорему 1 формулой для функции $g_k(x)$, реализующей функционал L_k .

ЛЕММА 1. *Функция g_k , реализующая функционал L_k по теореме Рисса, может быть найдена явно по формуле*

$$g_k(x) = \sum_{p=1}^n c_p e^{\lambda_p x},$$

где вектор $\vec{c} = (c_p)_{p=1}^n$ является решением системы

$$D\vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{b} = (\delta_p^{k+1})_{p=1}^n, \quad (2.7)$$

δ_i^j – символ Кронекера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим вначале, что $g_k \in W_2^{2n}(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$. Аналогично равенству (2.5) получим

$$f^{(k)}(0) = \int_0^{+\infty} f(x) \sum_{l=0}^n a_l (-1)^l \overline{g_k^{(2l)}(x)} dx + \sum_{p=1}^n f^{(p-1)}(0) \sum_{l=0}^{n-p} (-1)^{l+1} a_{l+p} \overline{g_k^{(2l+p)}(0)}. \quad (2.8)$$

Равенство (2.8) выполняется для всех функций $f \in W_2^n(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$ тогда и только тогда, когда функция g_k – решение задачи

$$\sum_{l=0}^n a_l (-1)^l g_k^{(2l)} = 0, \quad g_k \in W_2^{2n}(\mathbb{R}_+, \mathbf{a}), \quad (2.9)$$

$$\sum_{l=0}^{n-p} (-1)^{l+1} a_{l+p} g_k^{(2l+p)}(0) = \delta_p^{k+1}, \quad p \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.10)$$

Общее решение уравнения (2.9), исчезающее на бесконечности, имеет вид

$$g_k(x) = \sum_{p=0}^{n-1} c_p e^{\lambda_p x}. \quad (2.11)$$

Из (2.10) и (2.11) получим (2.7).

3. Доказательство следствия 1. При $\mathbf{a} = (1, 0, \dots, 0, 1)$ числа λ_q имеют простой вид $\lambda_q = \varepsilon^{q+(n-1)/2}$, где $\varepsilon^r := e^{i\pi r/n}$. Откуда

$$D = ((-1)^{n-p+1} \lambda_q^{2n-p})_{p,q=1}^n = (\varepsilon^{p(n-1)/2} (\varepsilon^{-p})^{q-1})_{p,q=1}^n.$$

Значит

$$|\det(D)| = \left| \det(C) \prod_{p=1}^n \varepsilon^{p(n-1)/2} \right| = |\det(C)|,$$

где $C = ((\varepsilon^{-p})^{q-1})_{p,q=1}^n$. Так как $\lambda_q^k = \varepsilon^{k(n+1)/2} (\varepsilon^k)^{q-1}$, аналогично получаем, что $|\det(D^{(k)})| = |\det(C^{(k)})|$, где матрица $C^{(k)}$ получается из матрицы C заменой $(k+1)$ -й строки строкой $(1, \varepsilon^k, \dots, (\varepsilon^k)^{n-1})$. Ясно, что матрицы C и $C^{(k)}$ являются матрицами типа Вандермонда. Поэтому, используя формулу для определителя Вандермонда $\det(x_s^{m-1})_{s,m=1}^n = \prod_{1 \leq p < s \leq n} (x_s - x_p)$, получим

$$A_{n,k}^2 = |A_{n,k}^2| = \frac{|\det(D^{(k)})|}{|\det(D)|} = \frac{|\det(C^{(k)})|}{|\det(C)|} = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k+1}}^n \frac{|\varepsilon^k - \varepsilon^{-p}|}{|\varepsilon^{-k-1} - \varepsilon^{-p}|}.$$

Учитывая, что $|\varepsilon^q - \varepsilon^{-p}| = 2|\sin((p+q)\alpha)|$, получим

$$\begin{aligned} A_{n,k}^2 &= \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k+1}}^n \frac{|\sin((p+k)\alpha)|}{|\sin((p-k-1)\alpha)|} = \frac{1}{\sin((2k+1)\alpha)} \frac{\prod_{p=k+1}^{k+n} \sin p\alpha}{\prod_{p=1}^k \sin p\alpha \prod_{p=1}^{n-k-1} \sin p\alpha} \\ &= \frac{1}{\sin((2k+1)\alpha)} \prod_{p=1}^k \operatorname{ctg} p\alpha \prod_{p=1}^{n-k-1} \operatorname{ctg} p\alpha. \end{aligned}$$

Итак, следствие 1 доказано.

4. Симметрия констант $A_{n,k,\mathbf{a}}$. Докажем следствие 2. Так как

$$\sum_{l=0}^n (-1)^l a_l \lambda_q^{2l} = 0,$$

то

$$d_{p,q} = (-1)^p \lambda_q^{-p} \sum_{l=0}^{p-1} (-1)^l a_l \lambda_q^{2l}.$$

Так как $b_p = a_{n-p}$, то корнями уравнения $\sum_{l=0}^n (-1)^l b_l x^{2l} = 0$ являются числа $1/\lambda_q$, $q \in \{1, \dots, n\}$. Пусть $\mu_q = 1/\lambda_q$. Обозначим

$$C = (c_{p,q})_{p,q=1}^n = \left((-1)^p \mu_q^{-p} \sum_{l=0}^{p-1} (-1)^l b_l \mu_q^{2l} \right)_{p,q=1}^n.$$

В силу условий $b_p = a_{n-p}$ и $\mu_q = 1/\lambda_q$ получим

$$c_{p,q} = \sum_{l=0}^{p-1} (-1)^{l+p} a_{n-l} \lambda_q^{p-2l} = (-1)^{n+p} \lambda_q^{p-2n} \sum_{l=n-p+1}^n (-1)^l a_l \lambda_q^{2l} = \lambda_q^{1-n} d_{n+1-p,q}.$$

Пусть $C^{(n-k-1)} = (c_{p,q}^{(n-k-1)})_{p,q=1}^n$ — матрица, которая получается из матрицы C заменой $(n-k)$ -й строки строкой $(\mu_1^{n-k-1}, \dots, \mu_n^{n-k-1})$. Ясно, что $c_{p,q}^{(n-k-1)} = \lambda_q^{1-n} d_{n+1-p,q}^{(k)}$. Поэтому согласно теореме 1 имеем

$$A_{n,n-1-k,\mathbf{b}}^2 = \frac{\det(C^{(n-k-1)})}{\det(C)} = \frac{\det(\lambda_q^{1-n} d_{n+1-p,q}^{(k)})_{p,q=1}^n}{\det(\lambda_q^{1-n} d_{n+1-p,q})_{p,q=1}^n} = \frac{\det(D^{(k)})}{\det(D)} = A_{n,k,\mathbf{a}}^2.$$

Тем самым следствие 2 доказано.

5. Доказательство следствия 3. При $\mathbf{a} = (1, 1, \dots, 1)$ числа λ_q имеют вид $\lambda_q = \varepsilon^{q+(n+1)/2}$, где $\varepsilon^r := e^{i\phi r}$. Отсюда для элементов матрицы D получаем соотношения

$$\begin{aligned} d_{p,q} &= \sum_{l=0}^{n-p} (-1)^{l+1} \lambda_q^{2l+p} = \sum_{l=0}^{n-p} (-1)^{l+1} \varepsilon^{(q+(n+1)/2)(2l+p)} = -\varepsilon^{(q+(n+1)/2)p} \sum_{l=0}^{n-p} (-\varepsilon^{2q+n+1})^l \\ &= -i^p \varepsilon^{qp} \sum_{l=0}^{n-p} (\varepsilon^{2q})^l = -i^p \varepsilon^{qp} \frac{\varepsilon^{2q(n+1-p)} - 1}{\varepsilon^{2q} - 1} = -i^p \varepsilon^{qp} \frac{1 - \varepsilon^{-2pq}}{\varepsilon^{2q} - 1} \\ &= -i^p \varepsilon^{qp} \frac{\varepsilon^{-pq}(\varepsilon^{pq} - \varepsilon^{-pq})}{\varepsilon^q(\varepsilon^q - \varepsilon^{-q})} = \frac{i^p \varepsilon^{-q}}{\sin q\phi} \sin pq\phi. \end{aligned}$$

Аналогично, для элементов k -й строки матрицы $D^{(k-1)}$ имеем

$$\begin{aligned} d_{k,q}^{(k-1)} &= \lambda_q^{k-1} = \varepsilon^{(q+(n+1)/2)(k-1)} = i^{k-1} \varepsilon^{qk-q} \\ &= i^k (-i) (\cos qk\phi + i \sin qk\phi) \varepsilon^{-q} = i^k \varepsilon^{-q} (\sin qk\phi - i \cos qk\phi). \end{aligned}$$

Поэтому по теореме 1

$$\tilde{A}_{n,k-1}^2 = \frac{\det(D^{(k-1)})}{\det(D)} = \frac{\det(C^{(k-1)}) - i \det(B^{(k-1)})}{\det(C)},$$

где $C = (\sin pq\phi)_{p,q=1}^n$, матрица $C^{(k-1)}$ получается из матрицы C заменой k -й строки на строку $(\sin q\phi \sin qk\phi)_{q=1}^n$, а матрица $B^{(k-1)}$ получается из матрицы C заменой k -й строки на строку $(\sin q\phi \cos qk\phi)_{q=1}^n$.

Так как C – вещественная матрица, то $\det(C) \in \mathbb{R}$. Кроме того, $\tilde{A}_{n,k-1}^2 \in \mathbb{R}$. Поэтому $\det(B^{(k-1)}) = 0$. Так как

$$\sum_{q=1}^n \sin pq\phi \sin rq\phi = \frac{n+1}{2} \delta_p^r, \quad p, r \in \{1, \dots, n\},$$

то $C \cdot C = (n+1)/2 I_n$, где I_n – единичная матрица порядка n . Отсюда

$$\tilde{A}_{n,k-1}^2 = \frac{\det(C^{(k-1)})}{\det(C)} = \frac{\det(C^{(k-1)} \cdot C)}{\det(C \cdot C)} = \frac{\det(B)}{\det(((n+1)/2)I_n)},$$

где матрица $B = C^{(k-1)} \cdot C$. Ясно, что B получается из $((n+1)/2)I_n$ заменой k -й строки на строку $(\sum_{q=1}^n \sin q\phi \sin kq\phi \sin qp\phi)_{p=1}^n$. Поэтому

$$\det(B) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n-1} \sum_{q=1}^n \sin q\phi \sin^2 kq\phi.$$

А значит,

$$\tilde{A}_{n,k-1}^2 = \frac{2}{n+1} \sum_{q=1}^n \sin q\phi \sin^2 kq\phi. \quad (5.1)$$

После очевидных преобразований равенство (5.1) переходит в формулу (1.10). Следствие 3 доказано.

6. Асимптотическое поведение констант $\tilde{A}_{n,k}$. Отметим сразу, что в силу симметрии вектора $\mathbf{a} = (1, 1, \dots, 1)$ по следствию 2 константы $\tilde{A}_{n,k}$ также обладают свойством симметрии $\tilde{A}_{n,k} = \tilde{A}_{n,n-k-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. При каждом фиксированном $k \in \mathbb{N}$

$$\tilde{A}_{n,k-1}^2 \rightarrow \frac{2}{\pi} \cdot \frac{4k^2}{4k^2 - 1} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 3

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_{n,k-1}^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_{n-1,k-1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{1 - (\sin(\pi/2n)/\sin(k\pi/n))^2} \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - ((\pi/2n) \cdot (n/k\pi))^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{4k^2}{4k^2 - 1}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $k \rightarrow \infty$ и $(n - k) \rightarrow \infty$. Тогда $\tilde{A}_{n,k}^2 \rightarrow 2/\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства будем рассматривать $\tilde{A}_{n-1,k-1}$, где $k \in \{1, \dots, n-1\}$. В силу симметрии констант $\tilde{A}_{n-1,k-1}$ можно считать, что $k < n/2$. Имеем по следствию 3

$$A_{n-1,k-1}^2 = \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sin(\pi/2n)}{\sin(k\pi/n)} \right)^2 \right)^{-1}.$$

Ясно, что $(1/n) \operatorname{ctg}(\pi/2n) \rightarrow (2/\pi)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\frac{\sin(\pi/2n)}{\sin(k\pi/n)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty \text{ и } n > 2k.$$

Это следует из оценки

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\pi/2n)}{\sin(k\pi/n)} &\leq \frac{(\pi/2n)}{(k\pi/n) - (1/6)(k\pi/n)^3} \\ &= \frac{1}{2k - (k^3/3)(\pi/n)^2} < \frac{1}{2k - (k^3/3)(\pi/2k)^2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2 - \pi^2/12}. \end{aligned}$$

Здесь использовалось неравенство $x - x^3/6 \leq \sin x \leq x$.

Таким образом, мы видим, что $\tilde{A}_{n,k}$ ведет себя асимптотически как константа. В то же время $A_{n,k}$ стремится к бесконечности (см. [7]).

Авторы выражают глубокую благодарность М. М. Маламуду за полезное обсуждение и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во МГУ, М., 1976.
- [2] В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Неравенства для производных и их приложения*, Наукова думка, Киев, 2003.
- [3] Л. В. Тайков, “Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования”, *Матем. заметки*, **4:2** (1968), 233–238.
- [4] В. Н. Габушин, “О наилучшем приближении оператора дифференцирования на полуоси”, *Матем. заметки*, **6:5** (1969), 573–582.
- [5] Г. А. Калябин, “Наилучшие операторы продолжения для соболевских пространств на полупрямой”, *Функц. анализ и его прил.*, **36:2** (2002), 28–37.
- [6] Г. А. Калябин, “О точных константах в неравенствах Колмогорова для пространств Соболева $W_2^n(\mathbb{R}_+)$ ”, *Докл. РАН*, **388:2** (2003), 159–161.
- [7] Г. А. Калябин, “Точные константы в неравенствах для промежуточных производных (случай Габушина)”, *Функц. анализ и его прил.*, **38:3** (2004), 29–38.
- [8] А. А. Лунёв, “Точные константы в неравенствах для промежуточных производных”, *Укр. матем. вестн.*, **4:3** (2007), 421–433.

А. А. Лунёв

Донецкий национальный университет, Украина

E-mail: Anton_Lunyov@mail.ru

Л. Л. Оридорога

Донецкий национальный университет

Поступило

19.11.2007

Исправленный вариант

02.12.2008