Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Плотников, Вопросы единственности для некоторых классов рядов Хаара, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 392–404

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm43>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:50:16

УДК 517.518

ВОПРОСЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ РЯДОВ ХААРА

М. Г. Плотников

Работа посвящена изучению множеств относительной единственности для рядов Хаара. Изучается целый класс условий на поведение ряда Хаара, включая условие Арутюняна–Талаляна. В работе введены новые числовые характеристики совершенных множеств. С их помощью получены необходимые, а также достаточные условия того, что данное множество является множеством относительной единственности при заданных условиях. Тем самым обобщаются результаты Г. М. Мушегяна, полученные в 1967 г. Также показывается наличие при $0 < p < 2$ совершенных U -множеств с $G(p)$ -условиями, введенными В. Уэйдом в 1981 г. и дается способ построения таких множеств.

Библиография: 7 названий.

В статье будут рассмотрены некоторые вопросы единственности для рядов Хаара. Мы используем следующее определение *функций Хаара*: $\chi_1(x) \equiv 1$ для $x \in [0, 1]$; если $n = 2^k + i$, где $k \geq 0$, $1 \leq i \leq 2^k$, то

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } x \in \left(\frac{2i-2}{2^{k+1}}, \frac{2i-1}{2^{k+1}} \right), \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{2i}{2^{k+1}} \right), \\ 0 & \text{при } \left[\frac{2i-2}{2^{k+1}}, \frac{2i}{2^{k+1}} \right]. \end{cases}$$

В точках 0 и 1 функцию $\chi_n(x)$ мы полагаем равной пределу справа (слева) функции $\chi_n(x)$, а в остальных точках отрезка $[0, 1]$ функция $\chi_n(x)$ равна среднему арифметическому правого и левого пределов.

Известно, что пустое множество является U -множеством для рядов Хаара (см. [1]–[3]). Это означает, что если ряд Хаара сходится к нулю вне пустого множества, т.е. всюду на $[0, 1]$, то все его коэффициенты нулевые. В то же время легко построить ряд Хаара (см. [4]), у которого не все коэффициенты нулевые, сходящийся к нулю всюду на $[0, 1]$, кроме заданной точки x . Это означает, что любое одноточечное множество $A \subset [0, 1]$ есть M -множество для рядов Хаара. В связи с этим естественно рассматривать множества относительной единственности для рядов Хаара, наложив ограничения на поведение коэффициентов (или частичных сумм) ряда.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00428.

Будем пользоваться следующей терминологией. Рассматривая класс рядов Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x), \quad (1)$$

удовлетворяющих некоторому условию (а); скажем, что множество A является M -множеством для рядов Хаара с условием (а), если существует ряд (1), удовлетворяющий условию (а), который сходится к нулю вне A и не все коэффициенты которого нулевые. Если такого ряда не существует, т.е. из сходимости к нулю ряда (1) с условием (а) вне множества A следует, что $a_n = 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$, то множество A назовем U -множеством для рядов (1) с условием (а). Иначе такие множества называют *множествами относительной единственности*.

В 1967 году Г. М. Мушегян доказал (см. [5, теорема 1]), что если рассматривать ряды Хаара с условием Арутюняна–Талаляна

$$\frac{a_{n_k}}{\chi_{n_k}(x)} \rightarrow 0, \quad (2)$$

где n_k – последовательность номеров таких, что $\chi_{n_k}(x) \neq 0$, то множество A является M -множеством для ряда (1) с условием (2) тогда и только тогда, когда A содержит совершенное подмножество. Отсюда получается, что борелевское множество является U -множеством для рядов (1) с условием (2), только если оно не более чем счетно. В нашей работе мы наложим более сильные ограничения на поведение ряда Хаара и получим более широкий класс U -множеств. Задав $\alpha \in [0, 1)$, рассмотрим класс рядов Хаара, удовлетворяющих условию

$$S_N(x) = o(N^{1-\alpha}), \quad (3)$$

где $S_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n \chi_n(x)$, а “ o ” – “свое” для каждого x .

Дадим ряд определений (см. [3], [6]). Интервал вида $[p/2^n, (p+1)/2^n]$, где $n = 0, 1, \dots$, $p = 0, \dots, 2^n - 1$, называется *двоичным интервалом*, а число n – его *рангом*. Точка отрезка $[0, 1]$, имеющая вид $p/2^n$, называется *двоично-рациональной* (обозначение $x \in \mathbb{R}$), а если точка отрезка $[0, 1]$ не имеет вид $p/2^n$, то она называется *двоично-иррациональной* (обозначение $x \in \mathbb{I}$). Последовательность двоичных интервалов $\{\Delta_n\}$ называется основной для точки x , если $x \in \Delta_n$, ранг Δ_n равен n и $\Delta_n \subset \Delta_{n-1}$. Если $x \in \mathbb{I}$, то для точки x существует одна, а если $x \in \mathbb{R}$ и $x \neq 0, 1$, то две основные последовательности.

Пусть задан ряд (1). Поставим ему в соответствие функцию двоичного интервала

$$\Psi(\Delta) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\Delta} a_m \chi_m(x) dx. \quad (4)$$

В работе [6] (см. теорема 1) показано, что если Δ_n – двоичный интервал ранга n , то сумма в правой части конечна и верно равенство

$$S_{2^n}(x) = \frac{\Psi(\Delta_n)}{|\Delta_n|}, \quad (5)$$

где x – любая внутренняя точка Δ_n . В силу конечной аддитивности интеграла Римана функция $\Psi(\Delta)$ – аддитивная функция двоичного интервала. Покажем, что соответствие

между рядами (1) и аддитивными функциями двоичного интервала на самом деле взаимно-однозначно и для любой аддитивной функции двоичного интервала $\Psi(\Delta)$ существует (притом единственный) ряд (1), для которого $\Psi(\Delta)$ определяется по формуле (4).

Обозначим через S_n^i , где $n = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, 2^n$, постоянное значение частичной суммы $S_{2^n}(x)$ на открытом двоичном интервале $\Delta_n^i = ((i-1)/2^n, i/2^n)$. Нетрудно заметить, что набор чисел S_n^i удовлетворяет свойству

$$2S_n^i = S_{n+1}^{2i-1} + S_{n+1}^{2i}. \quad (6)$$

Покажем, что на самом деле существует взаимно-однозначное соответствие между тремя объектами: рядами Хаара, аддитивными функциями двоичного интервала и наборами чисел S_n^i , где $n = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, 2^n$, удовлетворяющих свойству (6), причем при данном соответствии эти три объекта будут связаны равенствами (4) и (5), а также равенством

$$S_{2^n}(x) = S_n^i \quad (7)$$

(если x – внутренняя точка Δ_n^i). Действительно, между аддитивными функциями двоичного интервала $\Psi(\Delta)$ и между наборами чисел S_n^i можно осуществить взаимно-однозначное соответствие по формуле (5) (при этом аддитивность функции $\Psi(\Delta)$ будет равносильна выполнению свойства (6) для набора S_n^i). Полагая $a_1 = S_0^1$ и

$$a_n = \frac{S_{k+1}^{2i-1} - S_k^i}{2^{k/2}} = \frac{S_{k+1}^{2i} - S_k^i}{-2^{k/2}} \quad (8)$$

(последнее равенство выполняется в силу условия (6)), если $n = 2^k + i$, где $k \geq 0$, $1 \leq i \leq 2^k$, можно осуществить взаимно-однозначное соответствие между рядами Хаара и наборами чисел S_n^i , удовлетворяющих свойству (6). При этом соответствии в силу свойства (8) будет выполняться равенство (7). Таким образом, существование взаимно-однозначного соответствия между тремя объектами доказано. Остается только заметить, что наличие условий (6) и (7) при этом соответствии гарантирует то, что аддитивная функция двоичного интервала $\Psi(\Delta)$ строится по соответствующему ряду Хаара по формуле (4).

Имея взаимно-однозначное соответствие между рядами Хаара и аддитивными функциями двоичного интервала, можно в терминах функции $\Psi(\Delta)$ сформулировать условия сходимости рядов Хаара.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если $x \in \mathbb{I}$, или x равно 0 или 1, то $S_N(x) \rightarrow S$ тогда и только тогда, когда $\Psi(\Delta_n)/|\Delta_n| \rightarrow S$, где $\{\Delta_n\}$ – основная для точки x последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в работе [6] (теорема 1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если $x \in \mathbb{R}$ и x не равно 0 или 1, то $S_N(x) \rightarrow S$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\Psi(\Delta_n^1) + \Psi(\Delta_n^2)}{2|\Delta_n^1|} \rightarrow S, \quad (9)$$

и

$$\frac{\Psi(\Delta_n^i) - \Psi(\Delta_{n-1}^i)/2}{|\Delta_n^i|} \rightarrow 0 \quad (10)$$

при $n \rightarrow \infty$, где $\{\Delta_n^i\}$ – i -я основная последовательность для точки x , $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x = p/2^n$, то $S_N(x) \rightarrow S$ тогда и только тогда, когда $S_{2N}(x) \rightarrow S$, $S_{2N+\frac{p}{2^n}2^N}(x) \rightarrow S$, $S_{2N+\frac{p}{2^n}2^{N+1}}(x) \rightarrow S$ при $N \rightarrow \infty$. Это эквивалентно тому что $S_{2N}(x) \rightarrow S$, $S_{2N+\frac{p}{2^n}2^N}(x) - S_{2N}(x) \rightarrow 0$ и $S_{2N+\frac{p}{2^n}2^{N+1}}(x) - S_{2N+\frac{p}{2^n}2^N}(x) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Рассмотрим условие $S_{2N}(x) \rightarrow S$. При достаточно малом (зависящем от N) ε

$$\begin{aligned} S_{2N}(x) &= \frac{1}{2}(S_{2N}(x+\varepsilon) + S_{2N}(x-\varepsilon)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Psi(\Delta_N^1)}{|\Delta_N^1|} + \frac{\Psi(\Delta_N^2)}{|\Delta_N^2|} \right) = \frac{\Psi(\Delta_N^1) + \Psi(\Delta_N^2)}{2|\Delta_N^1|} \end{aligned}$$

и условие $S_{2N}(x) \rightarrow S$ равносильно условию (9). Покажем, что условие

$$S_{2N+\frac{p}{2^n}2^{N+1}}(x) - S_{2N+\frac{p}{2^n}2^N}(x) \rightarrow 0$$

равносильно условию (10) для правой основной последовательности для точки x (и, аналогично, условие $S_{2N+\frac{p}{2^n}2^N}(x) - S_{2N}(x) \rightarrow 0$ равносильно условию (10), если $\{\Delta_n^i\}$ – левая основная последовательность для точки x). Если $i = 2^N + p2^N/2^n$, то при достаточно малом ε

$$\begin{aligned} S_{i+1}(x) - S_i(x) &= a_{i+1}\chi_{i+1}(x) = \frac{1}{2}a_{i+1}\chi_{i+1}(x+\varepsilon) \\ &= \frac{1}{2}(S_{2N+1}(x+\varepsilon) - S_{2N}(x+\varepsilon)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Psi(\Delta_{N+1})}{|\Delta_{N+1}|} - \frac{\Psi(\Delta_N)}{|\Delta_N|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Psi(\Delta_{N+1})}{|\Delta_{N+1}|} - \frac{\Psi(\Delta_N)}{2|\Delta_{N+1}|} \right) = \frac{1}{2} \frac{\Psi(\Delta_{N+1}) - \frac{1}{2}\Psi(\Delta_N)}{|\Delta_{N+1}|}, \end{aligned}$$

что и доказывает равносильность условия $S_{2N+\frac{p}{2^n}2^{N+1}}(x) - S_{2N+\frac{p}{2^n}2^N}(x) \rightarrow 0$ и условия (10). Утверждение доказано.

Аналогично устанавливаются следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если $x \in \mathbb{I}$, или x равно 0 или 1, то $S_N(x) = o(N^{1-\alpha})$ тогда и только тогда, когда $\Psi(\Delta_n)/|\Delta_n|^\alpha \rightarrow 0$, где $\{\Delta_n\}$ – основная для точки x последовательность.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если $x \in \mathbb{R}$ и x не равно 0 или 1, то $S_N(x) = o(N^{1-\alpha})$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\Psi(\Delta_n^1) + \Psi(\Delta_n^2)}{|\Delta_n^1|^\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{\Psi(\Delta_n^i) - \frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n-1}^i)}{|\Delta_n^i|^\alpha} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, где $\{\Delta_n^i\}$ – i -я основная последовательность для точки x , $i = 1, 2$.

Для нахождения U -множеств и M -множеств для рядов Хаара с условием (3) нам потребуются новые числовые характеристики совершенных множеств. Пусть $A \subset [0, 1]$ – непустое совершенное множество. Построим по этому множеству аддитивную функцию двоичного интервала $\beta_A(\Delta)$. Положим $\beta_A([0, 1]) = 1$. Условимся, что $\beta_A(\Delta) = 0$ тогда и только тогда, когда $A \cap \Delta$ содержит не более чем конечное число точек. Далее, предположив, что функция β_A задана на двоичном интервале Δ_n ранга n , определим

β_A на каждом из двух двоичных интервалов Δ_{n+1}^1 и Δ_{n+1}^2 ранга $n+1$, для которых $\Delta_n = \bigcup_{i=1}^2 \Delta_{n+1}^i$. Если $\Delta_{n+1}^i \cap A$ содержит бесконечное число точек при $i = 1, 2$, то положим $\beta_A(\Delta_{n+1}^i) = \beta_A(\Delta_n)/2$. Если $\Delta_{n+1}^i \cap A$ содержит бесконечное число точек ровно при одном значении i ($i = 1$ или $i = 2$), то для этого номера i положим $\beta_A(\Delta_{n+1}^i) = \beta_A(\Delta_n)$, а для другого номера $\bar{i}$ положим $\beta_A(\Delta_{n+1}^{\bar{i}}) = 0$. Если же $\Delta_{n+1}^1 \cap A$ и $\Delta_{n+1}^2 \cap A$ содержат лишь конечное число точек, то $\beta_A(\Delta_{n+1}^i) = 0$ при $i = 1, 2$.

Теперь дадим ряд определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть A – непустое совершенное множество из $[0, 1]$. Назовем *индексом точки* $x \in A$ относительно множества A число $\text{ind}_A x$ (или, возможно, два числа $\text{ind}_A^1 x$ и $\text{ind}_A^2 x$, если $x \in \mathbb{R}$), равное $\sup\{\alpha \geq 0: \beta_A(\Delta_n) = o(|\Delta_n|^\alpha)\}$, где $\{\Delta_n\}$ – основная последовательность для точки x , причем каждый двоичный интервал Δ_n содержит бесконечное число точек из A .

Отметим, что данное определение корректно, так как в силу совершенности множества A точка x не является изолированной точкой множества A и поэтому $\beta_A(\Delta_n) = o(1) = o(|\Delta_n|^0)$ для основной для точки $x \in \mathbb{I}$ последовательности и хотя бы для одной из двух основных для точки $x \in \mathbb{R}$ последовательностей. Заметим, что $0 \leq \text{ind}_A x \leq 1$. В случае $x \in A \cap \mathbb{R}$ точка x имеет один индекс, если только одна из двух основных для точки x последовательностей $\{\Delta_n^i\}$ такова, что $\Delta_n^i \cap A$ содержит бесконечное число точек, а если таких последовательностей две, то точка x имеет два индекса $\text{ind}_A^1 x$ и $\text{ind}_A^2 x$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем *верхним индексом* непустого совершенного множества $A \subset [0, 1]$ число $\text{ind} A = \sup_{x \in A} \text{ind}_A x$ и *нижним индексом* множества A число $\underline{\text{ind}} A = \inf_{x \in A} \text{ind}_A x$. Если верхний и нижний индексы множества A совпадают, то их общее значение назовем *индексом множества* A (обозначение $\text{ind} A$).

Перейдем к формулировке и доказательству основных результатов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – М-множество для рядов (1) с условием (3). Тогда A содержит совершенное подмножество B с $\text{ind} B \geq \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – М-множество для рядов (1) с условием (3). Это означает, что существует ряд вида (1), удовлетворяющий условию (3), не все коэффициенты которого нулевые и $S_N(x) \rightarrow 0$ вне A . Построим по ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ в соответствии с (4) аддитивную функцию двоичного интервала $\Psi(\Delta)$. Тогда существует такой двоичный интервал Δ_0 , что $\Psi(\Delta_0) \neq 0$. Без ограничения общности будем считать, что $\Psi(\Delta_0) > 0$. Рассмотрим аддитивную функцию двоичного интервала $\Psi_1(\Delta) = \Psi(\Delta) - \varepsilon|\Delta|$, где ε настолько мало, что $\Psi_1(\Delta_0) > 0$. Пусть $[(2j+i)/2^n, (2j+i+1)/2^n]$ – двоичный интервал, где i равно 0 или 1. Назовем число i *типом* данного двоичного интервала. Пусть $\{\Delta_n\}$ – вложенная последовательность двоичных интервалов, причем ранг Δ_n равен n . Тогда, если среди типов Δ_n каждое из чисел 0 и 1 встречается бесконечное число раз, то $\{\Delta_n\}$ стягивается к точке $x \in \mathbb{I}$, а если одно из чисел 0 или 1 встречается среди типов Δ_n конечное число раз, то $\{\Delta_n\}$ стягивается к точке $x \in \mathbb{R}$. Этим мы будем пользоваться.

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. Пусть двоичный интервал Δ_0 таков, что $\Psi_1(\Delta_0) > 0$. Тогда можно построить набор двоичных интервалов I_l^k, J_l^k , где $l = 0, 1, 2, \dots, k = 1, \dots, 2^l$ (k и l не связаны с рангом), со следующими свойствами:

- 1) $I_0^1 = J_0^1 = \Delta_0$;

- 2) $J_l^k \supseteq I_{l+1}^{2k-1} \supseteq J_{l+1}^{2k-1}$, $J_l^k \supseteq I_{l+1}^{2k} \supseteq J_{l+1}^{2k}$;
- 3) $\Psi_1(I_l^k) > 0$ и $\Psi_1(J_l^k) > 0$ при всех k и l ;
- 4) $\text{тип } I_l^k$ не совпадает с типом J_l^k при всех $l \geq 1$ и $k = 1, \dots, 2^l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Построим наш набор индукцией по l . При $l = 0$ у нас есть $I_0^1 = J_0^1 = \Delta_0$. Пусть построены I_l^k, J_l^k при $l = 0, \dots, n$, $k = 1, \dots, 2^l$ с заданными свойствами. Построим I_{l+1}^k, J_{l+1}^k при всех $k = 1, \dots, 2^{l+1}$.

Из условия (3) следует, что $S_N(x) = o(N)$, а значит общий член ряда (1) есть $o(N)$. Пусть $x \in [0, 1]$ и $\{\Delta_n\}$ — одна из основных для точки x последовательностей. Пусть последовательность номеров n_s такова, что Δ_{s-1} является носителем функции χ_{n_s} . Тогда

$$\begin{aligned} a_{n_s} \chi_{n_s}(y) &= S_{2^s}(y) - S_{2^{s-1}}(y) \\ &= \frac{\Psi(\Delta_s)}{|\Delta_s|} - \frac{\Psi(\Delta_{s-1})}{|\Delta_{s-1}|} = \frac{1}{|\Delta_s|} \left[\Psi(\Delta_s) - \frac{1}{2} \Psi(\Delta_{s-1}) \right] \end{aligned}$$

(здесь y — любая внутренняя точка двоичного интервала Δ_s). Раз это есть $o(n_s)$, то

$$\Psi(\Delta_s) - \frac{1}{2} \Psi(\Delta_{s-1}) = \frac{1}{|\Delta_s|} \left[\Psi(\Delta_s) - \frac{1}{2} \Psi(\Delta_{s-1}) \right] \cdot \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^s} o(2^s) = o(1).$$

Таким образом, равенство $S_N(x) = o(N)$ влечет за собой условие

$$\Psi(\Delta_{n+1}) - \frac{\Psi(\Delta_n)}{2} \rightarrow 0,$$

а если заметить, что $\Psi(\Delta_{n+1}) - \Psi(\Delta_n)/2 = \Psi_1(\Delta_{n+1}) - \Psi_1(\Delta_n)/2 \rightarrow 0$, то из равенства $S_N(x) = o(N)$ следует выполнение условия

$$\Psi_1(\Delta_{n+1}) - \frac{1}{2} \Psi_1(\Delta_n) \rightarrow 0 \quad (11)$$

для любой основной для точки x последовательности $\{\Delta_n\}$.

Покажем, что если выполняется условие (11), то невозможна ситуация, когда $\Psi_1(\Delta_n) > 0$, а $\Psi_1(\overline{\Delta_n \setminus \Delta_{n+1}}) \leq 0$ при всех $n \geq n_0$. Если это не так и такая ситуация возможна, то

$$\begin{aligned} \Psi_1(\Delta_{n+1}) - \frac{1}{2} \Psi_1(\Delta_n) &= \frac{1}{2} (\Psi_1(\Delta_{n+1}) - \Psi_1(\overline{\Delta_n \setminus \Delta_{n+1}})) \\ &\geq \frac{1}{2} \Psi_1(\Delta_{n+1}) > 0, \end{aligned}$$

а значит, $\Psi_1(\Delta_{n+1}) \geq \Psi_1(\Delta_n)$, т.е. $\Psi_1(\Delta_n)$ не убывает. Получается, что

$$\Psi_1(\Delta_n) \geq \Psi_1(\Delta_{n_0}) > 0;$$

следовательно,

$$\Psi_1(\Delta_{n+1}) - \frac{\Psi_1(\Delta_n)}{2} \geq \frac{\Psi_1(\Delta_n)}{2} \geq \frac{\Psi_1(\Delta_{n_0})}{2} > 0,$$

что противоречит условию (11).

Раз ситуация, описанная в начале предыдущего абзаца, невозможна, то для каждого раз двоичный интервал пополам, мы найдем такой двоичный интервал $M_l^k \subseteq J_l^k$, что

$\Psi_1(M_l^k) > 0$ и $\Psi_1(M_{kl}^i) > 0$ при $i = 1, 2$, где M_{kl}^1 и M_{kl}^2 — неперекрывающиеся двоичные интервалы, составляющие в объединении M_l^k . Положим $I_{l+1}^{2k-1} = M_{kl}^1$, $I_{l+1}^{2k} = M_{kl}^2$. Теперь определим J_{l+1}^{2k-1} и J_{l+1}^{2k} . Для этого найдем такие двоичные интервалы $P_l^k \subset I_{l+1}^{2k-1}$, P_{kl}^1 и P_{kl}^2 , что $\Psi_1(P_l^k) > 0$, $\Psi_1(P_{kl}^i) > 0$ при $i = 1, 2$, и неперекрывающиеся двоичные интервалы P_{kl}^1 и P_{kl}^2 составляют в объединении P_l^k . Из двух интервалов P_{kl}^1 и P_{kl}^2 выберем тот интервал $P_{kl}^{j_0}$, тип которого не совпадает с типом I_{l+1}^{2k-1} и положим $J_{l+1}^{2k-1} = P_{kl}^{j_0}$. Аналогично найдем такой интервал $J_{l+1}^{2k} \subset I_{l+1}^{2k}$, что $\Psi_1(J_{l+1}^{2k}) > 0$ и тип J_{l+1}^{2k} не совпадает с типом I_{l+1}^{2k} . Лемма доказана.

Возобновим доказательство основной теоремы. В лемме мы построили набор двоичных интервалов со свойствами 1–4. Заметим, что множество

$$L(\Delta_0) = \bigcap_{l=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^l} I_l^k = \bigcap_{l=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^l} J_l^k$$

является совершенным, лежит в Δ_0 , и в силу свойства 4 принадлежит $\mathbb{I}$. Так как $L(\Delta_0) \subset I$, в случае $x \in L(\Delta_0)$ имеем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi(\Delta_n)}{|\Delta_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi_1(\Delta_n)}{|\Delta_n|} + \varepsilon \geq 0 + \varepsilon = \varepsilon,$$

т.е. в точках $L(\Delta_0)$ данный ряд не сходится к нулю, а значит, $L(\Delta_0) \subset A$. Таким образом, имея двоичный интервал Δ_0 , на котором $\Psi(\Delta_0) > 0$, можно найти совершенное множество $L(\Delta_0) \subset \Delta_0$, принадлежащее М-множеству A . Этим мы воспользуемся в дальнейшем.

Построим по индукции вложенную последовательность двоичных интервалов $\{\Delta_n\}_{n \geq n_0}$ (причем ранг Δ_n равен n , $\Psi_1(\Delta_n) > 0$, $\Delta_{n_0} = \Delta_0$), а также числовую последовательность τ_{m_k} . Сначала мы имеем интервал $\Delta_{n_0} = \Delta_0$ и пустой набор τ_{m_k} . Пусть нами построен интервал Δ_n и набор (возможно, пустой) $\tau_{m_1}, \dots, \tau_{m_{k_0}}$. Построим интервал Δ_{n+1} . Для этого разобьем Δ_n на два неперекрывающихся двоичных интервала Δ_{n+1}^1 и Δ_{n+1}^2 . Так как по предположению $\Psi_1(\Delta_n) > 0$, то либо ровно для одного номера i_0 имеем $\Psi_1(\Delta_{n+1}^{i_0}) > 0$. В этом случае положим $\Delta_{n+1} = \Delta_{n+1}^{i_0}$ и заметим, что $\Psi_1(\Delta_{n+1}) = \Psi_1(\Delta_n) - \Psi_1(\Delta_{n+1}^{\bar{i}_0}) \geq \Psi_1(\Delta_n)$ (здесь $\bar{i}_0$ — номер (1 или 2), не совпадающий с i_0). К набору $\tau_{m_1}, \dots, \tau_{m_{k_0}}$ в этом случае ничего не добавляем. Либо для обоих номеров 1 и 2 $\Psi_1(\Delta_{n+1}^1) > 0$ и $\Psi_1(\Delta_{n+1}^2) > 0$; тогда, используя аддитивность функции Ψ_1 , найдем номер i_0 (i_0 равно 1 или 2) и число $\tau_{m_{k_0+1}} \geq 0$ такие, что

$$\Psi_1(\Delta_{n+1}^{i_0}) = \frac{\Psi_1(\Delta_n)}{2}(1 + \tau_{m_{k_0+1}}), \quad \Psi_1(\Delta_{n+1}^{\bar{i}_0}) = \frac{\Psi_1(\Delta_n)}{2}(1 - \tau_{m_{k_0+1}}),$$

и положим $\Delta_{n+1} = \Delta_{n+1}^{i_0}$. К набору $\tau_{m_1}, \dots, \tau_{m_{k_0}}$ в этом случае добавим число $\tau_{m_{k_0+1}}$, положив при этом $m_{k_0+1} = n + 1$.

Заметим, что для выбранной последовательности $\{\Delta_n\}$ имеем неравенство

$$\Psi_1(\Delta_n) \geq \Psi_1(\Delta_{n_0}) \cdot \prod_{m_k \leq n} \left(\frac{1 + \tau_{m_k}}{2} \right). \quad (12)$$

Возможны три варианта развития событий.

1. Последовательность $\{\Delta_n\}$ стягивается к точке $x \in \mathbb{I}$. Используя формулу (12), получим, что

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(\Delta_n)}{|\Delta_n|} &= \frac{\Psi_1(\Delta_n)}{|\Delta_n|} + \varepsilon \geq \frac{\Psi_1(\Delta_{n_0}) \cdot \prod_{m_k \leq n} (\frac{1+\tau_{m_k}}{2})}{\frac{1}{2^n}} \\ &\geq \frac{\Psi_1(\Delta_{n_0}) \cdot \frac{1}{2^{n-n_0}}}{\frac{1}{2^n}} = 2^{n_0} \Psi_1(\Delta_{n_0}) > 0. \end{aligned}$$

Значит, в точке x наш ряд не сходится к нулю и $x \in A$. Заметим, что последовательность τ_{m_k} будет бесконечной (фактически это доказано в начале теоремы). Возьмем интервалы Δ_{m_k} , далее возьмем двоичные интервалы $\overline{\Delta_{m_{k-1}} \setminus \Delta_{m_k}}$ при $k = 1, 2, \dots$, и процедурой, описанной в лемме, построим совершенные множества $L(\overline{\Delta_{m_{k-1}} \setminus \Delta_{m_k}}) \subset A$. Это можно сделать, так как по построению не только $\Psi_1(\Delta_{m_k}) > 0$, но и

$$\Psi_1(\overline{\Delta_{m_{k-1}} \setminus \Delta_{m_k}}) > 0.$$

Возьмем множество $B = \{x\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} L(\overline{\Delta_{m_{k-1}} \setminus \Delta_{m_k}})$. Покажем, что множество B совершенно. Во-первых, x не является изолированной точкой множества B , так как любая окрестность точки x содержит все Δ_{m_k} для достаточно больших k , а значит, и бесконечное число точек из B . Любая другая точка множества B не является изолированной из-за того, что она принадлежит некоторому совершенному множеству Δ_{m_k} , полностью лежащему в B . Покажем, что множество B замкнутое. Пусть $x_1 \in \overline{B}$. Тогда существует последовательность x_N , $x_N \in B$ и $x_N \rightarrow x_1$. Если x_N содержит точки из бесконечного числа подмножеств Δ_{m_k} , то $x_N \rightarrow x$, а значит, $x_1 = x \in B$. Если же x_N содержит точки лишь из конечного числа подмножеств Δ_{m_k} , то существует номер k_0 и последовательность n_l такие, что $x_{n_l} \in \Delta_{m_{k_0}}$ и $x_{n_l} \rightarrow x_1$. В силу замкнутости множества $\Delta_{m_{k_0}}$ получим, что $x_1 \in \Delta_{m_{k_0}} \subset B$. Итак, всегда $x_1 \in B$. Замкнутость множества B доказана. Таким образом, множество B совершенно.

Покажем, что $\text{ind}_B x \geq \alpha$, откуда сразу получим, что $\text{ind } B \geq \alpha$; а так как $B \subset A$, теорема в этом случае будет доказана. Заметим, что

$$\beta_B(\Delta_n) = \beta_B(\Delta_{n_0}) \cdot \prod_{m_k \leq n} \frac{1}{2} = \prod_{m_k \leq n} \frac{1}{2} \leq \frac{\Psi_1(\Delta_n)}{\Psi_1(\Delta_{n_0})}$$

(мы использовали условие (12)). Так как $S_n(x) = o(n^{1-\alpha})$, в силу утверждения 3 $\Psi(\Delta_n) = o(\Delta_n^\alpha)$, и при $\alpha < 1$

$$\Psi_1(\Delta_n) = \Psi(\Delta_n) - \varepsilon |\Delta_n| = o(|\Delta_n|^\alpha).$$

Отсюда следует, что $\beta_B(\Delta_n) = o(|\Delta_n|^\alpha)$, т.е. по определению индекса точки $\text{ind}_B x \geq \alpha$, что и требовалось доказать.

2. Последовательность $\{\Delta_n\}$ стягивается к точке $x \in \mathbb{R}$ и существует положительное число ε_0 такое, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{m_k} \geq \varepsilon_0$. Тогда при больших k

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(\Delta_{m_k}) - \Psi(\Delta_{m_k-1})/2}{|\Delta_{m_k}|} &= \frac{\Psi_1(\Delta_{m_k}) - \Psi_1(\Delta_{m_k-1})/2}{|\Delta_{m_k}|} = \frac{2\tau_{m_k} \cdot \Psi_1(\Delta_{m_k-1})}{|\Delta_{m_k}|} \\ &\geq \varepsilon_0 \cdot \Psi_1(\Delta_{n_0}) \cdot \prod_{l \leq k-1} \left(\frac{1 + \tau_{m_l}}{2} \right) \frac{1}{2^{m_k}} \\ &\geq \varepsilon_0 \cdot \frac{\Psi_1(\Delta_{n_0}) \cdot \frac{1}{2^{m_k - n_0}}}{\frac{1}{2^{m_k}}} = \varepsilon_0 \cdot 2^{n_0} \Psi_1(\Delta_{n_0}) > 0 \end{aligned}$$

(в выкладке использовалась формула (12)). Значит, в точке x ряд Хаара не сходится к нулю и $x \in A$. Так же, как и в варианте 1, построим совершенное множество $B = \{x\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} L(\overline{\Delta_{m_k-1} \setminus \Delta_{m_k}}) \subset A$. Покажем, что $\text{ind}_B x \geq \alpha$, завершив так же, как и выше, доказательство теоремы.

В силу утверждения 4 $(\Psi(\Delta_n) - \Psi(\Delta_{n-1})/2)/|\Delta_n|^\alpha = o(1)$. Преобразуем выражение в числителе: $\Psi(\Delta_n) - \Psi(\Delta_{n-1})/2 = \Psi_1(\Delta_n) - \Psi_1(\Delta_{n-1})/2$. Это больше или равно $\Psi_1(\Delta_{n-1})/2$, если $n \neq m_k$ ни для какого k , и равно $\tau_{m_k} \Psi_1(\Delta_{n-1})/2$, если $n = m_k$. Значит, либо $\Psi_1(\Delta_{n-1})/2 = o(|\Delta_n|^\alpha)$ в первом случае, либо $\tau_{m_k} \Psi_1(\Delta_{n-1})/2 = o(|\Delta_n|^\alpha)$ во втором случае. Но так как $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{m_k} \geq \varepsilon_0$, при любом варианте

$$\Psi_1(\Delta_{n-1}) = o(|\Delta_n|^\alpha).$$

Но раз $\beta_B(\Delta_n) \leq \Psi_1(\Delta_n)/\Psi_1(\Delta_{n_0})$ (см. выкладку в первом варианте), то

$$\beta_B(\Delta_n) = o(|\Delta_n|^\alpha).$$

Значит, $\text{ind}_B x \geq \alpha$, что и завершает доказательство теоремы в этом случае.

3. Последовательность $\{\Delta_n\}$ стягивается к точке $x \in \mathbb{R}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{m_k} = 0$. Выберем последовательность A_s такую, что

$$A_s < 1, \quad A_s \rightarrow 1 \quad \text{и} \quad \prod_{s=0}^{\infty} A_s = D > 0.$$

Так как $x \in \mathbb{R}$, то найдется такое натуральное N_1 , что все двоичные интервалы Δ_n при $n \geq N_1$ имеют один и тот же тип. Найдем $\tau_{m_{k_0}}$ такое, что $m_{k_0} > N_1$ и $1 - \tau_{m_{k_0}} > A_0$. Построим новую вложенную последовательность двоичных интервалов Δ_n^1 и новую числовую последовательность $\tau_{m_k}^1$.

Пусть $\Delta_n^1 = \Delta_n$, если $n_0 \leq n < m_{k_0}$, $\tau_{m_i}^1 = \tau_{m_i}$ при $i < k_0$ и, кроме того, $\Delta_{m_{k_0}}^1 = \overline{\Delta_{m_{k_0}-1} \setminus \Delta_{m_{k_0}}}$ и $\tau_{m_{k_0}}^1 = 0$. Заметим, что в силу условия (12) и в силу выбора k_0 имеем неравенство

$$\Psi_1(\Delta_{m_{k_0}}^1) \geq \Psi_1(\Delta_{n_0}) \cdot A_0 \cdot \prod_{i < k_0} \left(\frac{1 + \tau_{m_i}}{2} \right).$$

Кроме того, тип $\Delta_{m_{k_0}}^1$ не совпадает с типом $\Delta_{m_{k_0}-1}$ (заменяя двоичный интервал $\Delta_{m_{k_0}}$ на интервал $\Delta_{m_{k_0}}^1$, мы поменяли тип). Далее, имея набор Δ_n^1 при $n_0 \leq n \leq m_{k_0}$ и набор $\tau_{m_1}^1, \dots, \tau_{m_{k_0}}^1$, будем строить последовательности Δ_n^1 при $n > m_{k_0}$ и τ_{m_k} при $k > k_0$

процедурой, описанной после леммы. При этом мы опять попадем либо в один из вариантов 1 или 2, доказав тем самым теорему, либо снова попадем в вариант 3 и тогда снова совершим процедуру, описанную в этом варианте. В итоге мы либо за конечное число шагов попадем в один из вариантов 1 или 2, тем самым доказав теорему, либо все время будем попадать в вариант 3. В последнем случае мы построим новые последовательности Δ_n^∞ и $\tau_{m_k}^\infty$ со следующими свойствами.

$$1) \Delta_{n_0}^\infty = \Delta_{n_0}.$$

2) Существуют такие номера $m_{k_0} < m_{k_1} < \dots < m_{k_n} < \dots$, что $\Psi_1(\Delta_{m_{k_i}}^\infty) \geq A_i \cdot \Psi_1(\Delta_{m_{k_{i-1}}}^\infty)/2$; если $n \neq m_k$ ни для какого k , то $\Psi_1(\Delta_n^\infty) \geq \Psi_1(\Delta_{n-1}^\infty)$; если же $n = m_k$ для некоторого k , причем $k \neq k_i$ ни для какого i , то

$$\Psi_1(\Delta_n^\infty) = \frac{\Psi_1(\Delta_{n-1}^\infty)}{2}(1 + \tau_{n_k}^\infty), \quad \text{а} \quad \Psi_1(\overline{\Delta_{n-1}^\infty \setminus \Delta_n^\infty}) = \frac{\Psi_1(\Delta_{n-1}^\infty)}{2}(1 - \tau_{n_k}^\infty).$$

Последовательность же $\tau_{m_k}^\infty$ обладает тем свойством, что $\tau_{m_{k_i}}^\infty = 0$, а $\tau_{m_k}^\infty \geq 0$ для любого k .

3) Тип двоичного интервала $\tau_{m_{k_i}}^\infty$ не совпадает с типом $\tau_{m_{k_{i-1}}}^\infty$.

Другими словами, каждый кусок $\Delta_{m_{k_i}}^\infty, \dots, \Delta_{m_{k_{i+1}-1}}^\infty$ построен, исходя из двоичного интервала $\Delta_{m_{k_i}}^\infty$ с помощью процедуры, описанной после леммы, а вся последовательность Δ_n^∞ состоит из таких кусков. При этом

$$\Psi_1(\Delta_n^\infty) \geq \Psi_1(\Delta_n^\infty) \cdot \prod_{m_k \leq n} \frac{1 + \tau_{m_k}^\infty}{2} \cdot \prod_{m_{k_i} \leq n} A_i \geq \Psi_1(\Delta_n^\infty) \cdot \prod_{m_k \leq n} \frac{1 + \tau_{m_k}^\infty}{2} \cdot D. \quad (13)$$

А так как из-за выполнения свойства 3) последовательность Δ_n^∞ стягивается к точке $x \in \mathbb{I}$, в силу последних неравенств

$$\frac{\Psi_1(\Delta_n^\infty)}{|\Delta_n^\infty|} \geq \frac{D \cdot \Psi_1(\Delta_{n_0}) \cdot \frac{1}{2^{n-n_0}}}{2^n} = D \cdot \Psi_1(\Delta_{n_0}) \cdot 2^{n_0} > 0.$$

Тем самым ряд Хаара в точке x расходится. Уже применявшимся способом строим совершенные множества $L(\overline{\Delta_{m_k-1}^\infty \setminus \Delta_{m_k}^\infty}) \subset A$ и строим множество

$$B = \{x\} \cup \bigcup_{k=1}^{+\infty} L(\overline{\Delta_{m_k-1}^\infty \setminus \Delta_{m_k}^\infty}),$$

которое также будет совершенным и принадлежащим A . Заметим, что в силу неравенства (13)

$$\beta_B(\Delta_n^\infty) = \beta_B(\Delta_{n_0}^\infty) \prod_{m_k \leq n} \frac{1}{2} \leq \frac{1}{D} \frac{\Psi_1(\Delta_n^\infty)}{\Psi_1(\Delta_{n_0}^\infty)}.$$

Кроме того, в силу условия $S_n(x) = o(n^{1-\alpha})$ и утверждения 3 имеют место равенства

$$\Psi_1(\Delta_n^\infty) = \Psi(\Delta_n^\infty) - \varepsilon |\Delta_n^\infty| = o(|\Delta_n^\infty|^\alpha).$$

Таким образом, получаем, что $\beta_B(\Delta_n^\infty) = o(|\Delta_n^\infty|^\alpha)$, т.е. $\text{ind}_B x \geq \alpha$, а значит $\overline{\text{ind}} B \geq \alpha$. Замечая тот факт, что $B \subset A$; этим мы завершаем доказательство теоремы.

Теорема 1 представляет собой необходимое условие того, что данное множество является М-множеством для класса рядов (1) с условием (3). Прямым следствием теоремы 1 является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha \in [0, 1]$ и пусть множество A обладает следующим свойством: любое содержащееся в A совершенное подмножество имеет верхний индекс, меньший α . Тогда A является U -множеством для рядов Хаара с условием (3). В частности, теорема верна, если A – совершенное множество с $\overline{\text{ind}} A < \alpha$.

При доказательстве второй части теоремы 2 нужно заметить, что если $C \subset A$, то $\text{ind}_C x \leq \text{ind}_A x$ для всех точек $x \in C$, а значит,

$$\overline{\text{ind}} C = \sup_{x \in C} \text{ind}_C x \leq \sup_{x \in C} \text{ind}_A x \leq \sup_{x \in A} \text{ind}_A x = \overline{\text{ind}} A.$$

Следующая теорема указывает на существование совершенных множеств с заданными верхним и нижним индексами.

ТЕОРЕМА 3. Для любых чисел α и β таких, что $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ существует совершенное множество B с $\overline{\text{ind}} B = \beta$, $\underline{\text{ind}} B = \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала докажем несколько более слабое утверждение.

ЛЕММА. Для любого числа γ , $\gamma \in [0, 1]$, существует совершенное множество A с $\text{ind} A = \gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть сначала $0 \leq \gamma < 1$. Построим множество A с $\text{ind} A = \gamma$. Пусть p_n – последовательность целых неотрицательных чисел, причем: $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $p_n > \gamma n + \sqrt{n}$, начиная с некоторого $n(\gamma)$, $p_n/n \rightarrow \gamma$, p_n не убывает и $(p_{n+1} - p_n)$ есть либо нуль, либо единица. Построим аддитивную функцию двоичного интервала $\Psi(\Delta)$. Положим $\Psi([0, 1]) = 1$. Далее строим функцию Ψ по индукции. Пусть Ψ задана на двоичных интервалах ранга n . Тогда построим Ψ на двоичных интервалах ранга $n + 1$. Пусть Δ_n имеет ранг n , и $\Delta_n = \bigcup_{i=1}^2 \Delta_{n+1}^i$, где $\{\Delta_{n+1}^i\}$ – пара неперекрывающихся двоичных интервала ранга $n + 1$. Функция $\Psi(\Delta)$ задана на Δ_n ; определим ее на Δ_{n+1}^i . Если $\Psi(\Delta_n) = 0$, то положим $\Psi(\Delta_{n+1}^i) = 0$ для $i = 1, 2$. Если $\Psi(\Delta_n) > 0$ и $p_{n+1} - p_n = 1$, то $\Psi(\Delta_{n+1}^i) = \Psi(\Delta_n)/2$ для любого $i = 1, 2$. Если же $\Psi(\Delta_n) > 0$ и $p_{n+1} - p_n = 0$, то положим $\Psi(\Delta_{n+1}^i) = \Psi(\Delta_n)$ для того двоичного интервала Δ_{n+1}^i , тип которого k таков, что интервал Δ_n имеет тип $\bar{k}$; для другого двоичного интервала Δ_{n+1}^i положим $\Psi(\Delta_{n+1}^i) = 0$. Заметим, что для любого двоичного интервала Δ_N ранга N $\Psi(\Delta_N)$ равняется либо $1/2^{p_N}$, либо 0.

Положим $A = \bigcap_n \bigcup_{\substack{\Psi(\Delta_n) > 0 \\ |\Delta_n| = 1/2^n}} \Delta_n$. Заметим, что кроме всего прочего A состоит только из двоично-иррациональных точек. Учитывая это, легко заметить, что $\beta_A(\Delta) \equiv \Psi(\Delta)$ (все интервалы, содержащие точки из A , содержат на самом деле бесконечное число точек из A). Пусть $x \in A$, а $\{\Delta_n\}$ – основная последовательность двоичных интервалов для x . Тогда

$$\beta_A(\Delta_n) = \Psi(\Delta_n) = \frac{1}{2^{p_n}} \leq \frac{1}{2^{n\gamma + \sqrt{n}}} = \frac{1}{2^{n\gamma}} \cdot \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} |\Delta_n|^\gamma = o(|\Delta_n|^\gamma).$$

С другой стороны, в силу того, что $p_n/n \rightarrow \gamma$, начиная с некоторого n имеет место неравенство $p_n/n < \gamma + \varepsilon$. Следовательно,

$$\beta_A(\Delta_n) = \frac{1}{2^{p_n}} \geq \frac{1}{2^{n(\gamma + \varepsilon)}} = |\Delta_n|^{\gamma + \varepsilon},$$

поэтому $\beta_A(\Delta_n) \neq o(|\Delta_n|^{\gamma+\varepsilon})$, а так как $\varepsilon > 0$ можно выбрать любым, то $\text{ind}_A x = \gamma$. В силу произвольности точки $x \in A$ мы имеем равенство $\text{ind } A = \gamma$.

Пусть теперь $\gamma = 1$. Слегка видоизменим предыдущее доказательство, а именно, возьмем последовательность p_n целых неотрицательных чисел такую, что $p_0 = 0, p_1 = 1, p_n/n \rightarrow 1$ и $0 \leq p_{n+1} - p_n \leq 1$; кроме того, последовательность выберем такой, что $p_n - n \rightarrow -\infty$.

Выбрав последовательность p_n указанным выше способом, построим аддитивную функцию двоичного интервала $\Psi(\Delta)$, затем множество A , причем $\beta_A(\Delta) = \Psi(\Delta)$. Покажем, что множество A удовлетворяет нужным нам условиям. В силу равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n} = 1$$

имеем соотношение $p_n > n(1 - \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и $n > n(\varepsilon)$. Тогда

$$\beta_A(\Delta_n) = \frac{1}{2^{p_n}} < \frac{1}{2^{n(1-\varepsilon)}} = |\Delta_n|^{1-\varepsilon} = o(|\Delta_n|^{1-2\varepsilon}).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем: $\text{ind}_A x \geq 1$, а значит, $\text{ind}_A x = 1$ для любой точки $x \in A$. Условие $p_n - n \rightarrow -\infty$ нужно только для того, чтобы множество A состояло бы только из двоично-иррациональных точек, что мы использовали выше. Лемма полностью доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Построим согласно лемме множество A_1 с $\text{ind } A_1 = \alpha$ и множество A_2 с $\text{ind } A_2 = \beta$. Тогда множество

$$B = \left(A_1 \cap \left[0, \frac{1}{2} \right] \right) \cup \left(A_2 \cap \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right)$$

– непустое, имеет нижний индекс, равный α , и верхний индекс, равный β . Теорема полностью доказана.

Сформулируем теперь достаточное условие того, что данное множество будет являться М-множеством для рядов (1) с условием (3).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $0 \leq \alpha < 1$ и множество $A \subset [0, 1]$ содержит совершенное подмножество C с $\underline{\text{ind}} C > \alpha$. Тогда A является М-множеством для рядов Хаара с условием (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим для множества C аддитивную функцию двоичного интервала $\beta(\Delta) = \beta_c(\Delta)$ и возьмем однозначно соответствующий этой функции ряд Хаара, для которого $\beta(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta} a_n \chi_n(x) dx$.

В точках множества C $\beta(\Delta_n)/|\Delta_n|^\alpha = o(1)$ из-за того, что $\underline{\text{ind}} C > \alpha$, а значит, и $\text{ind}_C x > \alpha$ для любой точки $x \in C$. Если $x \in \mathbb{I}$, то последнее равенство означает в силу утверждения 3, что $S_N(x) = o(N^{1-\alpha})$, а если $x \in \mathbb{R}$, то

$$\frac{\beta(\Delta_n^1) + \beta(\Delta_n^2)}{|\Delta_n^1|^\alpha} = o(1), \quad \frac{\beta(\Delta_n^i) - \frac{1}{2}\beta(\Delta_n^i)}{|\Delta_n^i|^\alpha} = o(1),$$

что тоже означает, что $S_N(x) = o(N^{1-\alpha})$. Таким образом, соответствующий ряд Хаара удовлетворяет условию (3).

Остается проверить, что $S_N(x) \rightarrow 0$ вне множества C , а значит, и вне множества A . Тем самым, будет доказано, что A – M -множество для рядов (1) с условием (3). Но если $x \notin C$, то для любой последовательности $\{\Delta_n\}$, основной для точки x , выполняется равенство $\beta_C(\Delta_n) = 0$ при $n \geq n_0(x)$. Тогда если $x \in \mathbb{I}$, то $S_{2^n}(x) = \beta_C(\Delta_n)/|\Delta_n| = 0$ для любого $n \geq n_0(x)$, т.е. $S_N(x) \rightarrow 0$. Если же $x \in \mathbb{R}$, то обозначим за $\Delta_n^i, i = 1, 2$, i -ю основную для точки x последовательность двоичных интервалов, а за $n_0^i(x)$ – тот номер, начиная с которого $\beta(\Delta_n^i) = 0$. Тогда при $n \geq \max\{n_0^1(x), n_0^2(x)\}$ имеют место равенства

$$\frac{\beta(\Delta_n^1) + \beta(\Delta_n^2)}{2|\Delta_n^1|} = 0, \quad \frac{\beta(\Delta_n^i) - \frac{1}{2}\beta(\Delta_n^i)}{|\Delta_n^i|} = 0.$$

Отсюда получаем в силу утверждения 2, что если $x \notin C$ и $x \in \mathbb{R}$, то $S_N(x) \rightarrow 0$. Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что если в теореме 3 $\alpha = 0$, то знак “ $>$ ” можно заменить на “ $\geq$ ”. Действительно, если $\alpha = 0$, то $\beta_C = o(1) = o(|\Delta_n|^0)$ и применимы все остальные рассуждения.

Теоремы 2–4 обобщают результаты Г. М. Мушегяна, полученные им в работе [5]. В теореме 2 этой работы доказывается наличие совершенных U -множеств при условии, что общий член рядов (1) ограничен. В этом случае $S_N(x) \leq 2nC$, если $2^{n-2} < N \leq 2^{n-1}$, т.е. $S_N(x) = o(\log N)$, а теоремы 2 и 3 нашей работы указывают на наличие совершенных U -множеств при более слабых условиях. Более того, теорема 3 дает способ построения таких множеств. Уже упоминавшаяся же теорема 1 из работы [5] содержится в теореме 2 и в замечании к теореме 4 нашей работы.

Кроме того, теорема 2 говорит о существовании при $0 < p < 2$ $G(p)$ U -множеств, введенных У. Уэйдом в работе [7]. Так в этой работе называются U -множества для рядов Хаара с условием $a_n = o(n^{(p-1)/2})$. Несложно показать, что это условие при $p > 0$ эквивалентно условию $S_n(x) = o(n^{1-\alpha})$, где o – равномерное по $x \in [0, 1]$, а $\alpha = 1 - p/2$, т.е. это условие несколько сильнее соответствующего условия (3).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Петровская М. Б. Некоторые теоремы единственности для рядов по системе Хаара // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. 1964. № 5. С. 15–28.
- [2] Арутюнян Ф. Г., Талалаян А. А. О единственности рядов по системам Хаара и Уолша // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. С. 1391–1408.
- [3] Скворцов В. А. Теорема типа Кантора для системы Хаара // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. 1964. № 5. С. 3–6.
- [4] McLaughlin J., Price J. J. Comparison of Haar series with gaps with trigonometric series // Pacific J. Math. 1969. V. 28. № 3. P. 623–627.
- [5] Мушегян Г. М. О множествах единственности для системы Хаара // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1967. Т. 2. № 6. С. 350–361.
- [6] Скворцов В. А. Дифференцирование относительно сетей и ряды Хаара // Матем. сб. 1968. Т. 4. № 1. С. 33–40.
- [7] Wade W. R. Sets of uniqueness for Haar series // Acta Math. Academiae Scientiarum Hungaricae. 1977. V. 30. № 3–4. P. 265–281.