Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кореновский, Оценки колебаний преобразования Харди, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 3, 383–395

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm430>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:34:43

УДК 517.5

ОЦЕНКИ КОЛЕБАНИЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАРДИ

А. А. Кореновский

Для преобразования Харди невозрастающей функции получена точная двухсторонняя оценка ВЛО-нормы, а также точные неравенства между ВМО- и ВЛО-нормами невозрастающей функции. На основании этих неравенств уточнена известная оценка снизу ВМО-нормы преобразования Харди.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Рассматриваются локально суммируемые на $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ функции f . Преобразование Харди определяется равенством

$$(Pf)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad x > 0.$$

Оператор P играет важную роль при изучении различных вопросов анализа. Ограниченность в пространстве L^p оператора P устанавливает следующее неравенство Харди [1, с. 289]:

$$\int_0^{+\infty} |(Pf)(x)|^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{+\infty} |f(x)|^p dx,$$

в котором постоянная $(p/(p-1))^p$ не может быть уменьшена. При $p = \infty$ аналогичное неравенство $\|Pf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ очевидно. Также легко видеть, что при $1 < p < \infty$ обратное неравенство Харди

$$\int_0^{+\infty} |(Pf)(x)|^p dx \geq c_p \int_0^{+\infty} |f(x)|^p dx, \quad (1.1)$$

вообще говоря, не имеет места, какова бы ни была постоянная $c_p > 0$. В то же время, если функция f неотрицательна и не возрастает на $\mathbb{R}_+$, то (1.1) имеет место при $c_p = p/(p-1)$ и это значение c_p не может быть увеличено (см. [2]–[4]). Очевидно также, что для неотрицательной, невозрастающей функции f справедливо равенство $\|Pf\|_\infty = \|f\|_\infty$. В данной работе изучается поведение оператора Харди P в пространстве ВМО, промежуточном между $\bigcap_{p < \infty} L^p$ и L^∞ .

Средним колебанием функции f на интервале $I \subset \mathbb{R}_+$ называется величина

$$\Omega(f; I) = \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I| dx,$$

где $f_I = |I|^{-1} \int_I f(x) dx$. Пространство ВМО функций с ограниченным средним колебанием состоит из всех таких f , для которых

$$\|f\|_{\text{ВМО}} \equiv \sup_I \Omega(f; I) < \infty,$$

где верхняя грань берется по всем интервалам $I \subset \mathbb{R}_+$ (см. [5]). Аналогично, класс ВЛО содержит все f такие, что

$$\|f\|_{\text{ВЛО}} \equiv \sup_I L(f; I) < \infty,$$

где нижнее колебание функции f на интервале I определяется так:

$$L(f; I) = \frac{1}{|I|} \int_I f(x) dx - \operatorname{ess\,inf}_{x \in I} f(x)$$

(см. [6]). ВЛО, в отличие от ВМО, не является линейным пространством.

Ограниченность в пространстве ВМО оператора Харди P была доказана многими авторами (см. [7]–[12]). В частности, в [12] получена следующая

ТЕОРЕМА А. *Оператор Харди ограничен в ВМО и*

$$\|Pf\|_{\text{ВМО}} \leq \|f\|_{\text{ВМО}}. \quad (1.2)$$

С другой стороны, обратное ВМО-Харди неравенство

$$\|Pf\|_{\text{ВМО}} \geq \frac{1}{17} \|f\|_{\text{ВМО}} \quad (1.3)$$

справедливо для каждой положительной, убывающей на $\mathbb{R}_+$ функции f .

Постоянную 1 справа в (1.2) нельзя уменьшить. Это легко проверяется на примере функции $f(x) = \ln(1/x)$, $x > 0$, для которой $(Pf)(x) = \ln(1/x) + 1$. В то же время, как отмечается в [12], постоянная $1/17$ в (1.3) может быть увеличена. Действительно, метод доказательства неравенства (1.3) в [12] позволяет вместо $1/17$ получить постоянную, приближенное значение которой равно $2/31$. Обозначим

$$A = \inf \left\{ \frac{\|Pf\|_{\text{ВМО}}}{\|f\|_{\text{ВМО}}} : f \in \text{ВМО}, f \downarrow, f \approx \text{Const} \right\}. \quad (1.4)$$

В [12] сформулирована гипотеза, которая состоит в том, что $A = 1$. Однако уже простой пример характеристической функции $\chi_{[0,1]}(x)$ показывает, что $A \leq \alpha_0 < 1$ (см. ниже лемму 2 и следствие 1). При этом число α_0 определяется равенством

$$\alpha_0 = \frac{4}{\gamma_1} \ln \gamma_0, \quad (1.5)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{1}{\beta_0}, \quad (1.6)$$

$$\beta_0 = \frac{1 + \ln \gamma_1}{\gamma_1}, \quad (1.7)$$

а $\gamma_1 > 1$ – корень уравнения

$$\ln \frac{\gamma}{1 + \ln \gamma} = \frac{\ln \gamma}{1 + \ln \gamma}. \quad (1.8)$$

Эти постоянные нам понадобятся в дальнейшем. Их приближенные значения равны

$$\alpha_0 \approx 0.52, \quad \beta_0 \approx 0.546, \quad \gamma_0 \approx 1.83, \quad \gamma_1 \approx 4.65.$$

Один из результатов данной работы состоит в нахождении точных оценок нормы в ВЛО преобразования Харди.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция f не возрастает на $\mathbb{R}_+$. Тогда

$$\frac{1}{e} \|f\|_{\text{BLO}} \leq \|Pf\|_{\text{BLO}} \leq \|f\|_{\text{BLO}}, \quad (1.9)$$

причем постоянную $1/e$ слева нельзя увеличить, а 1 справа нельзя уменьшить.

Доказательство теоремы 1 приводится в п. 3.

Основной результат этой статьи заключается в доказательстве следующего неравенства.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция f не возрастает на $\mathbb{R}_+$. Тогда

$$\|Pf\|_{\text{BMO}} \geq \frac{\alpha_0}{2} \|f\|_{\text{BLO}}, \quad (1.10)$$

причем постоянную $\alpha_0/2$ справа в (1.10) нельзя увеличить.

Доказательство этой теоремы также приводится в п. 3.

Далее, легко видеть, что для любого интервала $I \subset \mathbb{R}_+$ неравенство $\Omega(f; I) \leq 2L(f; I)$ справедливо даже без предположения монотонности f , причем постоянную 2 справа, вообще говоря, нельзя уменьшить. Это означает, что $\|f\|_{\text{BMO}} \leq 2\|f\|_{\text{BLO}}$. Обратное неравенство $\|f\|_{\text{BMO}} \geq c\|f\|_{\text{BLO}}$ без предположения монотонности f , вообще говоря, неверно при любом $c > 0$. В этом легко убедиться на примере функции $f(x) = \ln(1/|x-1|)$, $x > 0$. Если же рассматривать только множество невозрастающих функций, то $\text{BMO} = \text{BLO}$. Мы находим точные оценки для норм функции в этих классах.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция f не возрастает на $\mathbb{R}_+$. Тогда

$$\frac{1}{2} \|f\|_{\text{BLO}} \leq \|f\|_{\text{BMO}} \leq \frac{2}{e} \|f\|_{\text{BLO}}, \quad (1.11)$$

причем, вообще говоря, постоянную $1/2$ слева нельзя увеличить, а $2/e$ справа нельзя уменьшить.

Эта теорема доказана в п. 3.

Из теорем 2 и 3 мгновенно вытекает неравенство

$$\|Pf\|_{\text{BMO}} \geq \frac{e\alpha_0}{4} \|f\|_{\text{BMO}},$$

справедливое для любой невозрастающей функции f . Иначе говоря, получаем

СЛЕДСТВИЕ. Для постоянной A , определенной в (1.4), справедлива оценка

$$\frac{e\alpha_0}{4} \leq A \leq \alpha_0,$$

где число α_0 определено равенством (1.5).

Нами рассмотрен ряд примеров, дающих основание предполагать, что $A = \alpha_0$, однако вопрос о справедливости этого равенства остается открытым.

Автор глубоко признателен В. И. Коляде за внимание к работе. Ряд имеющихся в работе ссылок на литературу были подсказаны Б. И. Голубовым, за что выражаю ему искреннюю благодарность.

2. Вспомогательные утверждения. В этом пункте мы приводим вспомогательные утверждения. Смысл первого состоит в том, что для невозрастающей функции при вычислении нормы в ВМО и в ВЛО верхнюю грань достаточно брать лишь по таким интервалам, левый конец у которых равен нулю.

ЛЕММА 1. Пусть функция f не возрастает на $\mathbb{R}_+$. Тогда справедливы равенства

$$\|f\|_{\text{ВМО}} = \sup_{x>0} \Omega(f; (0, x)), \quad (2.1)$$

$$\|f\|_{\text{ВЛО}} = \sup_{x>0} L(f; (0, x)) = \sup_{x>0} [(Pf)(x) - f(x)]. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства (2.1) достаточно показать, что для любого интервала $I \subset \mathbb{R}_+$ найдется x такое, что

$$\Omega(f; (0, x)) \geq \Omega(f; I). \quad (2.3)$$

Доказательство (2.3) проведем по аналогии с [9]. Фиксируем $I \equiv (a, b)$. Если $f(b-0) = f_I$, то, очевидно, $\Omega(f; I) = 0$ и (2.3) выполнено. Если же $f(b-0) < f_I$, то, пользуясь непрерывностью функции

$$(Pf)(t) \equiv f_{(0,t)} = t^{-1} \int_0^t f(x) dx$$

и очевидными неравенствами

$$(Pf)(b) \geq f_I, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (Pf)(t) \leq f(b-0) < f_I,$$

которые следуют из монотонности f , найдем $x \geq b$ такое, что $(Pf)(x) = f_I$. Далее, найдем $\gamma \in I$ такое, что $f(t) \geq f_I$ при $t \leq \gamma$ и $f(t) \leq f_I$ при $t \geq \gamma$. Тогда из монотонности f следует

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^\gamma f(t) dt \geq \frac{1}{\gamma - a} \int_a^\gamma f(t) dt, \quad \frac{1}{x - \gamma} \int_\gamma^x f(t) dt \leq \frac{1}{b - \gamma} \int_\gamma^b f(t) dt.$$

Отсюда, обозначая $J = (0, x)$ и учитывая, что $f_I = f_J$, получим

$$\frac{\gamma}{\int_0^\gamma [f(t) - f_J] dt} \leq \frac{\gamma - a}{\int_a^\gamma [f(t) - f_I] dt}, \quad (2.4)$$

$$\frac{x - \gamma}{\int_\gamma^x [f_J - f(t)] dt} \leq \frac{b - \gamma}{\int_\gamma^b [f_I - f(t)] dt}. \quad (2.5)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^\gamma [f(t) - f_J] dt &= \int_\gamma^x [f_J - f(t)] dt = \frac{x}{2} \Omega(f; J), \\ \int_a^\gamma [f(t) - f_I] dt &= \int_\gamma^b [f_I - f(t)] dt = \frac{b-a}{2} \Omega(f; I), \end{aligned}$$

складывая неравенства (2.4) и (2.5), получаем (2.3).

Докажем (2.2). Первое равенство сразу следует из монотонности f , поскольку для $I \equiv (a, x) \subset \mathbb{R}_+$, очевидно,

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \geq \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt, \quad \operatorname{ess\,inf}_{t \in (0, x)} f(t) = \operatorname{ess\,inf}_{t \in I} f(t) = f(x-0).$$

Для доказательства второго равенства зафиксируем $x > 0$. Если $f(x-0) = f(x)$, то $L(f; (0, x)) = (Pf)(x) - f(x)$. В частности, это равенство справедливо в каждой точке непрерывности функции f . Если же $f(x-0) > f(x)$, то для $y > x$

$$L(f; (0, y)) = (Pf)(y) - f(y-0) \geq (Pf)(y) - f(x),$$

а из непрерывности $(Pf)(y)$ при $y \rightarrow x+0$ имеем

$$(Pf)(y) - f(x) \rightarrow (Pf)(x) - f(x) > (Pf)(x) - f(x-0) = L(f; (0, x)).$$

Значит, при y достаточно близких к x справа будет

$$L(f; (0, y)) > L(f; (0, x)).$$

Так как монотонная функция f непрерывна почти в каждой точке, то последнее неравенство означает, что для каждой точки разрыва функции f найдется точка непрерывности y такая, что $L(f; (0, y)) \geq L(f; (0, x))$. Поскольку, как показано выше, $L(f; (0, y)) = (Pf)(y) - f(y)$, отсюда следует правое равенство в (2.2).

Лемма доказана.

Следующая лемма поясняет происхождение уравнения (1.8) и смысл чисел, определенных равенствами (1.5)–(1.7). В ней вычисляется норма в ВМО характеристической функции полуинтервала $[0, 1)$.

ЛЕММА 2. Для функции $f(x) = \chi_{[0, 1)}(x)$, $x \geq 0$, справедливы следующие равенства:

$$\|f\|_{\text{ВМО}} = \Omega(f; (0, 2)) = \frac{1}{2}, \quad (2.6)$$

$$\|Pf\|_{\text{ВМО}} = \Omega(Pf; (0, \gamma_1)) = \frac{1}{2}\alpha_0, \quad (2.7)$$

где γ_1 – корень уравнения (1.8), а число α_0 определено равенством (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 достаточно рассматривать лишь такие интервалы, левый конец у которых равен нулю.

Для $x > 1$ обозначим $J = (0, x)$. Тогда

$$f_J = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x},$$

$$\Omega(f; J) = \frac{2}{x} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dt = \frac{2}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{2},$$

и, очевидно, $\Omega(f; (0, 2)) = 1/2$. Этим доказано (2.6).

Для доказательства (2.7) заметим, что $(Pf)(x) = 1$ при $0 < x \leq 1$, а при $x > 1$ будет $(Pf)(x) = 1/x$. Тогда для $x > 1$, $J \equiv (0, x)$ имеем

$$(Pf)_J = \frac{1}{x} \int_0^1 (Pf)(t) dt + \frac{1}{x} \int_1^x (Pf)(t) dt = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln x = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

Положим $x_0 = x/(1 + \ln x)$. Тогда $(Pf)(t) \geq (Pf)_J$ при $t \leq x_0$ и $(Pf)(t) \leq (Pf)_J$ при $t \geq x_0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Omega(Pf; J) &= \frac{2}{x} \int_{x_0}^x [(Pf)_J - (Pf)(t)] dt \\ &= \frac{2}{x} \left[\frac{1 + \ln x}{x} \left(x - \frac{x}{1 + \ln x} \right) - \ln(1 + \ln x) \right] = \frac{2}{x} [\ln x - \ln(1 + \ln x)]. \end{aligned}$$

Обозначим $\varphi(x) = (4/x)[\ln x - \ln(1 + \ln x)]$. Тогда

$$\varphi'(x) = -\frac{4}{x^2} \left[\ln \frac{x}{1 + \ln x} - \frac{\ln x}{1 + \ln x} \right].$$

Отсюда ясно, что если γ_1 — корень уравнения (1.8), то $\varphi'(\gamma_1) = 0$ и

$$\|Pf\|_{\text{ВМО}} = \sup_{x>1} \Omega(Pf; (0, x)) = \frac{1}{2} \max_{x>1} \varphi(x) = \frac{1}{2} \varphi(\gamma_1) = \frac{1}{2} \alpha_0$$

(см. ниже замечание 1). Заметим также, что $(Pf)_{(0, \gamma_1)} = (Pf)(\gamma_0) = \beta_0$, где числа α_0, β_0 и γ_0 определены равенствами (1.5)–(1.7).

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Определенная при доказательстве леммы 2 функция φ неотрицательна на $[1, +\infty)$, $\varphi(1) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$. Поэтому эта функция достигает наибольшего значения на $[1, +\infty)$ в некоторой точке $\gamma_1 > 1$ такой, что $\varphi'(\gamma_1) = 0$. Покажем, что уравнение $\varphi'(x) = 0$ имеет единственный корень $\gamma_1 > 1$. Для этого достаточно показать, что функция

$$\ln \frac{x}{1 + \ln x} - \frac{\ln x}{1 + \ln x} \equiv \frac{\ln^2 x}{1 + \ln x} - \ln(1 + \ln x)$$

имеет единственный корень $\gamma_1 > 1$. Это, в свою очередь, равносильно тому, что функция $\psi(t) = t^2/(1+t) - \ln(1+t)$ имеет единственный корень $t_1 > 0$.

Имеем $\psi(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = +\infty$, $\psi'(t) = (t^2 + t - 1)(1+t)^{-2}$, $\psi'(t) < 0$ при $0 \leq t < (\sqrt{5} - 1)/2$ и $\psi'(t) > 0$ при $t > (\sqrt{5} - 1)/2$. Из этих свойств функции ψ следует, что уравнение $\psi(t) = 0$ имеет единственный положительный корень.

СЛЕДСТВИЕ 1. Как уже отмечалось во введении, из леммы 2 вытекает, что $A \leq \alpha_0$, где число A определено равенством (1.4).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть числа $\beta_2 > \beta_1$ и $\gamma > 0$, а функция $f_1(x) = \beta_2 \chi_{[0, \gamma)}(x) + \beta_1 \chi_{[\gamma, +\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$. Тогда

$$\begin{aligned}\|f_1\|_{\text{ВМО}} &= \Omega(f_1; (0, 2\gamma)) = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}, \\ \|Pf_1\|_{\text{ВМО}} &= \Omega(Pf_1; (0, \gamma_1 \cdot \gamma)) = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \alpha_0, \\ (Pf_1)_{(0, \gamma_1 \cdot \gamma)} &= (Pf_1)(\gamma_0 \cdot \gamma) = \beta_1 + \beta_0(\beta_2 - \beta_1),\end{aligned}$$

где числа $\alpha_0, \gamma_0, \beta_0, \gamma_1$ определены равенствами (1.5)–(1.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться равенством

$$f_1(x) = (\beta_2 - \beta_1) \chi_{[0, 1]} \left(\frac{x}{\gamma} \right) + \beta_1, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

из которого следствие 2 мгновенно получается применением леммы 2.

ЛЕММА 3. Пусть локально суммируемая на $\mathbb{R}_+$ функция φ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}\varphi(u) &\geq \varphi(v), \quad 0 \leq u \leq v \leq 1, \\ \int_0^1 \varphi(t) dt &\geq \varphi(u) \geq \varphi(v), \quad 1 \leq u \leq v.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Тогда функция $(P\varphi)(x)$ не возрастает на $(0, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Монотонность $P\varphi$ на $[0, 1]$ сразу следует из монотонности на $[0, 1]$ функции φ . Если докажем, что

$$(P\varphi)(x_1) \geq (P\varphi)(x_2), \quad 1 < x_1 < x_2,$$

то в силу непрерывности $P\varphi$ отсюда сразу получим утверждение леммы.

Пусть $1 < x_1 < x_2$. Тогда из равенства

$$\begin{aligned}(P\varphi)(x_2) - (P\varphi)(x_1) &= \left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right) \left\{ \frac{1}{x_1} \left[\frac{1}{x_1 - 1} \int_1^{x_1} \varphi(t) dt - \int_0^1 \varphi(t) dt \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t) dt - \frac{1}{x_1 - 1} \int_1^{x_1} \varphi(t) dt \right] \right\},\end{aligned}$$

используя (2.8), получаем, что $(P\varphi)(x_2) \leq (P\varphi)(x_1)$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть невозрастающая функция f суммируема на интервале $I \equiv (a, b)$. Далее, пусть $s \in (a, b)$ таково, что $f(u) \geq f_I$ при $a < u \leq s$ и $f(u) \leq f_I$ при $s \leq u < b$. Тогда справедливы равенства

$$\sup_{t \in (a, b)} \int_a^t (f(u) - f_I) du = \int_a^s (f(u) - f_I) du = \frac{b-a}{2} \Omega(f; (a, b)), \tag{2.9}$$

$$\sup_{t \in (a, b)} \int_t^b (f_I - f(u)) du = \int_s^b (f_I - f(u)) du = \frac{b-a}{2} \Omega(f; (a, b)). \tag{2.10}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба равенства (2.9) и (2.10) доказываются аналогично. Поэтому докажем лишь (2.9). Второе равенство в (2.9) вытекает из следующего очевидного равенства:

$$\int_a^b |f(u) - f_I| du = \int_a^s (f(u) - f_I) du + \int_s^b (f_I - f(u)) du = 2 \int_a^s (f(u) - f_I) du.$$

Для доказательства первого равенства в (2.9) достаточно показать, что при любом $t \in (a, b)$

$$\int_a^t (f(u) - f_I) du \leq \int_a^s (f(u) - f_I) du. \quad (2.11)$$

Если $t < s$, то (2.11) следует из того, что $f(u) \geq f_I$ при $t \leq u \leq s$. Если же $t > s$, то (2.11) вытекает из неравенства $f(u) \leq f_I$, $s \leq u \leq t$.

Лемма доказана.

Отметим, что точка s , о которой идет речь в лемме 4, существует, но, вообще говоря, не единственна.

3. Доказательства теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для доказательства правого неравенства в (1.9) воспользуемся равенством

$$(Pf)(t) - (Pf)(u) = \int_t^u [(Pf)(s) - f(s)] \frac{ds}{s}, \quad 0 < t < u,$$

которое легко может быть получено заменой порядка интегрирования в правой части (см. также [14, с. 379]). Отсюда для $x > 0$ из леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_0^x (Pf)(t) dt - (Pf)(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x \int_t^x [(Pf)(s) - f(s)] \frac{ds}{s} \\ &\leq \|f\|_{\text{BLO}} \frac{1}{x} \int_0^x \ln \frac{x}{t} dt = \|f\|_{\text{BLO}}. \end{aligned}$$

Переходя к верхней грани по всем $x > 0$ и используя лемму 1, получаем правое неравенство в (1.9).

Поскольку для функции $f(x) = \ln(1/x)$ имеем $(Pf)(x) = \ln(1/x) + 1$, то справа в (1.9) нельзя поставить множитель меньший, чем 1.

Покажем теперь, что слева в (1.9) множитель $1/e$ нельзя увеличить. Для этого рассмотрим функцию $f_0(x) = \chi_{[0,1)}(x)$. Имеем

$$(Pf_0)(x) = \min\left(1, \frac{1}{x}\right), \quad \|f_0\|_{\text{BLO}} = \sup_{x>0} [(Pf_0)(x) - f_0(x)] = 1,$$

а при $x > 1$

$$L(Pf_0; (0, x)) = \frac{1}{x} \int_0^x (Pf_0)(t) dt - (Pf_0)(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \ln x.$$

Отсюда

$$\frac{\|Pf_0\|_{\text{BLO}}}{\|f_0\|_{\text{BLO}}} = \sup_{x>1} \frac{1}{x} \ln x = \frac{1}{e} = L(Pf_0; (0, e)). \quad (3.1)$$

Осталось доказать левое неравенство в (1.9) для произвольной f . Для его доказательства с учетом леммы 1 достаточно показать, что для любого $x > 0$ найдется $y > 0$ такое, что

$$L(Pf; (0, y)) \geq \frac{1}{e} L(f; (0, x)). \quad (3.2)$$

Не ограничивая общности, можем предполагать, что

$$x = 1, \quad f(1) = 0, \quad \int_0^1 f(t) dt = 1. \quad (3.3)$$

Это означает, что $L(f; (0, 1)) = 1$.

Положим, как и выше, $f_0(x) = \chi_{[0,1)}(x)$ и покажем, что справедливо неравенство

$$P(f - f_0)(t) \geq (f - f_0)(t), \quad t > 0. \quad (3.4)$$

Действительно, если $0 < t \leq 1$, то (3.4) следует из монотонности $f - f_0$. Если же $t > 1$, то $f(t) \leq 0$ и поэтому, учитывая предположения (3.3), в силу монотонности f имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t [f(u) - f_0(u)] du &= \frac{1}{t} \int_0^1 [f(u) - 1] du + \frac{1}{t} \int_1^t f(u) du = \frac{1}{t} \int_1^t f(u) du \\ &= \left(1 - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t-1} \int_1^t f(u) du \geq \left(1 - \frac{1}{t}\right) f(t) \geq f(t) = (f - f_0)(t). \end{aligned}$$

Используя теперь (3.4) и (3.1), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{e} \int_0^e (Pf)(t) dt - (Pf)(e) - \frac{1}{e} \\ &= \frac{1}{e} \left[\int_0^e (Pf)(t) dt - \int_0^e (Pf_0)(t) dt \right] - (Pf)(e) + (Pf_0)(e) \\ &= \frac{1}{e} \int_0^e [(Pf)(t) - f(t) - (Pf_0)(t) + f_0(t)] dt \\ &= \frac{1}{e} \int_0^e [P(f - f_0)(t) - (f - f_0)(t)] dt \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$L(Pf; (0, e)) \geq \frac{1}{e}$$

и, тем самым, доказано (3.2).

Теорема полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В силу леммы 1 достаточно показать, что для любого $\gamma > 0$ найдется $\gamma' > 0$ такое, что

$$\Omega(Pf; (0, \gamma')) \geq \frac{\alpha_0}{2} [(Pf)(\gamma) - f(\gamma)]. \quad (3.5)$$

Можем считать, что $\gamma = 1$, $f(1) = 0$, $(Pf)(1) = 1$. Положим $g(x) = \chi_{[0,1)}(x)$. Тогда для функции $\varphi = f - g$, очевидно, выполнены условия леммы 3. В силу этой леммы функция $P\varphi$ не возрастает на $(0, +\infty)$. Обозначим $\psi(x) = \varphi(x) - (P\varphi)(\gamma_0)$. Тогда $P\psi$ также не возрастает на $(0, +\infty)$ и $(P\psi)(\gamma_0) = 0$. Отсюда следует, что

$$0 \leq \int_0^{\gamma_0} (P\psi)(t) dt = \int_0^{\gamma_0} [(Pf)(t) - (Pg)(t)] dt - (Pf)(\gamma_0) + (Pg)(\gamma_0),$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{\gamma_0} \int_0^{\gamma_0} [(Pg)(t) - (Pg)(\gamma_0)] dt \leq \frac{1}{\gamma_0} \int_0^{\gamma_0} [(Pf)(t) - (Pf)(\gamma_0)] dt. \quad (3.6)$$

Найдем теперь γ' такое, что

$$\frac{1}{\gamma'} \int_0^{\gamma'} (Pf)(t) dt = (Pf)(\gamma_0).$$

Ясно, что $\gamma' > \gamma_0$. Сравнивая γ' с γ_1 , определенным как корень уравнения (1.8), будем различать следующие две ситуации.

1. $\gamma' \leq \gamma_1$. В этом случае из (3.6) имеем

$$\begin{aligned} \Omega(Pf; (0, \gamma')) &= \frac{2}{\gamma'} \int_0^{\gamma_0} [(Pf)(t) - (Pf)(\gamma_0)] dt \\ &\geq \frac{2}{\gamma_1} \int_0^{\gamma_0} [(Pg)(t) - (Pg)(\gamma_0)] dt = \Omega(Pg; (0, \gamma_1)) = \frac{\alpha_0}{2}, \end{aligned}$$

так что (3.5) выполнено.

2. Если $\gamma' > \gamma_1$, то из отмеченных выше свойств функции $P\psi$ имеем

$$0 \geq \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} (P\psi)(t) dt = \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} [(Pf)(t) - (Pg)(t)] dt - (Pf)(\gamma_0) + (Pg)(\gamma_0),$$

т.е.

$$\frac{1}{\gamma_1 - \gamma_0} \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} [(Pf)(\gamma_0) - (Pf)(t)] dt \geq \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_0} \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} [(Pg)(\gamma_0) - (Pg)(t)] dt.$$

Но поскольку функция $(Pf)(\gamma_0) - (Pf)(t)$, $t > \gamma_0$, не убывает и $\gamma' > \gamma_1$, отсюда получаем

$$\frac{1}{\gamma' - \gamma_0} \int_{\gamma_0}^{\gamma'} [(Pf)(\gamma_0) - (Pf)(t)] dt \geq \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_0} \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} [(Pg)(\gamma_0) - (Pg)(t)] dt. \quad (3.7)$$

Перепишем неравенства (3.6) и (3.7) в следующем виде:

$$\frac{\gamma_0}{\int_0^{\gamma_0} [(Pg)(t) - (Pg)(\gamma_0)] dt} \geq \frac{\gamma_0}{\int_0^{\gamma_0} [(Pf)(t) - (Pf)(\gamma_0)] dt},$$

$$\frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\int_{\gamma_0}^{\gamma_1} [(Pg)(\gamma_0) - (Pg)(t)] dt} \geq \frac{\gamma' - \gamma_0}{\int_{\gamma_0}^{\gamma'} [(Pf)(\gamma_0) - (Pf)(t)] dt}.$$

Складывая и учитывая, что знаменатели дробей в левых частях одинаковые и знаменатели в правых частях также одинаковые, получаем

$$\frac{1}{\gamma_1} \int_0^{\gamma_0} [(Pg)(t) - (Pg)(\gamma_0)] dt \leq \frac{1}{\gamma'} \int_0^{\gamma_0} [(Pf)(t) - (Pf)(\gamma_0)] dt.$$

Отсюда вытекает, что

$$\Omega(Pf; (0, \gamma')) \geq \Omega(Pg; (0, \gamma_1)) = \frac{\alpha_0}{2},$$

т.е. и в этом случае (3.5) справедливо.

Осталось показать, что постоянную $\alpha_0/2$ справа в (1.10) нельзя увеличить. Но это действительно так, поскольку для функции $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$, как было показано в лемме 2, $\|Pf\|_{\text{ВМО}} = \alpha_0/2$, а $\|f\|_{\text{ВЛО}}$, очевидно, равна 1.

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Докажем сначала левое неравенство в (1.11). Для $t > 0$ в силу монотонности f , применяя лемму 4, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t f(u) du - f(t) &\leq \frac{1}{t} \int_0^t f(u) du - \frac{1}{t} \int_t^{2t} f(u) du \\ &= 2 \left[\frac{1}{2t} \int_0^t (f(u) - f_{(0,2t)}) du + \frac{1}{2t} \int_t^{2t} (f_{(0,2t)} - f(u)) du \right] \\ &\leq 2\Omega(f; (0, 2t)). \end{aligned}$$

Отсюда левое неравенство в (1.11) следует в силу леммы 1.

Для функции $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$, $x \geq 0$, имеем $\|f\|_{\text{ВМО}} = 1/2$, $\|f\|_{\text{ВЛО}} = 1$, так что постоянную $1/2$ слева в (1.11) нельзя увеличить.

Теперь докажем правое неравенство в (1.11). В силу леммы 1

$$a \equiv \|f\|_{\text{ВЛО}} = \sup_{t>0} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(u) du - f(t) \right).$$

Тогда

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(u) du \leq a + f(t), \quad t > 0.$$

Поделим это неравенство на t и проинтегрируем от ε до s , где $0 < \varepsilon < s$. Получим

$$\int_{\varepsilon}^s \int_0^t f(u) du \frac{dt}{t^2} \leq a \int_{\varepsilon}^s \frac{dt}{t} + \int_{\varepsilon}^s f(t) \frac{dt}{t} = a \ln \frac{s}{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^s f(t) \frac{dt}{t}. \quad (3.8)$$

Меняя слева в (3.8) порядок интегрирования, получим, что левая часть (3.8) равна

$$\int_0^\varepsilon f(u) \int_\varepsilon^s \frac{dt}{t^2} du + \int_\varepsilon^s f(u) \int_u^s \frac{dt}{t^2} du = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(u) du - \frac{1}{s} \int_0^s f(u) du + \int_\varepsilon^s f(u) \frac{du}{u}.$$

Отсюда и из (3.8) следует, что

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(u) du - \frac{1}{s} \int_0^s f(u) du \leq a \ln \frac{s}{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < s.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} \int_0^s f(u) du - \frac{1}{s-\varepsilon} \int_\varepsilon^s f(u) du \\ &= \frac{1}{s} \int_0^s f(u) du - \frac{1}{s-\varepsilon} \left(\int_0^s f(u) du - \int_0^\varepsilon f(u) du \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{s-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(u) du - \frac{\varepsilon}{s-\varepsilon} \cdot \frac{1}{s} \int_0^s f(u) du \leq \frac{\varepsilon}{s-\varepsilon} \cdot \ln \frac{s}{\varepsilon} \cdot a, \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{s-\varepsilon} \int_\varepsilon^s (f_{(0,s)} - f(u)) du \leq \frac{\varepsilon}{s-\varepsilon} \cdot \ln \frac{s}{\varepsilon} \cdot a,$$

т.е.

$$\frac{1}{s} \int_\varepsilon^s (f_{(0,s)} - f(u)) f u \leq \frac{\varepsilon}{s} \cdot \ln \frac{s}{\varepsilon} \cdot a. \quad (3.9)$$

Поскольку $(\ln x)/x \leq 1/e$, $x > 1$, то для $0 < \varepsilon < s$ из (3.9) имеем

$$\frac{1}{s} \int_\varepsilon^s (f_{(0,s)} - f(u)) du \leq \frac{a}{e}. \quad (3.10)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sup_{\{\varepsilon: 0 < \varepsilon < s\}} \frac{1}{s} \int_\varepsilon^s (f_{(0,s)} - f(u)) du &= \frac{1}{s} \int_{\{u \in (0,s): f(u) < f_{(0,s)}\}} (f_{(0,s)} - f(u)) du \\ &= \frac{1}{2} \Omega(f; (0, s)). \end{aligned}$$

Поэтому, переходя слева в (3.10) к верхней грани по всем ε , $0 < \varepsilon < s$, получаем

$$\Omega(f; (0, s)) \leq \frac{2}{e} \cdot a.$$

Переходя в этом неравенстве к верхней грани по всем $s > 0$ и пользуясь леммой 1, получаем правое неравенство в (1.11).

Для функции $f(x) = \ln(1/x)$, $x > 0$, имеем $\|f\|_{\text{ВМО}} = 2/e$, $\|f\|_{\text{ВЛО}} = 1$. Это означает, что постоянную $2/e$ справа в (1.11) нельзя уменьшить.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.–Л.: ИЛ, 1948.
- [2] Lyons R. A lower bound on the Cesàro operator // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. V. 86. P. 694–699.
- [3] Renaud P. R. A reversed Hardy inequality // Bull. Austral. Math. Soc. 1986. V. 34. P. 225–232.
- [4] Milman M. A note on reversed Hardy inequalities and Gehring's lemma // Comm. Pure Appl. Math. 1997. V. 50. P. 311–315.
- [5] John F., Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 415–426.
- [6] Coifman R. R., Rochberg R. Another characterization of BMO // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 79. P. 249–254.
- [7] Siskakis A. G. Composition semigroups and the Cesàro operator on H^p // J. London Math. Soc. 1987. V. 36. № 2. P. 153–164.
- [8] Siskakis A. G. The Cesàro operator is bounded on H^p // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 110. P. 461–462.
- [9] Stempak K. Cesàro averaging operators // Proc. Royal Soc. Edinburgh. 1994. V. 124. P. 121–126.
- [10] Dang Vu Giang, Moricz F. The Cesàro operator is bounded on the Hardy space H^1 // Acta Sci. Math. (Szeged). 1995. V. 61. P. 535–544.
- [11] Голубов Б. И. Ограниченность операторов Харди и Харди–Литтлвуда в пространствах $Re H^1$ и BMO // Матем. сб. 1997. Т. 188. С. 93–106.
- [12] Jie Xiao A reverse BMO-Hardy inequality // Real Analysis Exchange. 1999/2000. V. 25. № 2. P. 673–678.
- [13] Klemes I. A mean oscillation inequality // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. V. 93. № 3. P. 497–500.
- [14] Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators: Acad. Press, 1988.

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
Киевский национальный университет им. Т. Г. Шевченко, Украина
E-mail: anakor@paco.net

Поступило
29.03.2001
Исправленный вариант
10.01.2002