Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, М. М. Китяев, Об одной серии задач, связанных с проблемами Борсука и Нелсона–Эрдеша–Хадвигера, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 2, 254–272

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4304>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:44:02

Об одной серии задач, связанных с проблемами Борсука и Нелсона–Эрдеша–Хадвигера

А. М. Райгородский, М. М. Китяев

В настоящей работе рассматривается серия задач, связывающих классические проблемы Борсука и Нелсона–Эрдеша–Хадвигера в комбинаторной геометрии. Речь идет об отыскании числа $\chi(n, a, d)$, равного минимальному количеству цветов, в которые можно так раскрасить произвольное множество диаметра d в n -мерном евклидовом пространстве, чтобы между одноцветными точками не было расстояния a . Получен ряд новых нижних оценок величины $\chi(n, a, d)$.

Библиография: 18 названий.

1. Введение и постановка задачи

В комбинаторной геометрии есть две известные проблемы: проблема Борсука о разбиении ограниченного множества в $\mathbb{R}^n$ и проблема Нелсона–Эрдеша–Хадвигера о нахождении хроматического числа того же пространства.

Проблема Борсука была сформулирована в 1933 г. (см. [1]), и суть ее сводилась к гипотезе о том, что всякое ограниченное n -мерное точечное множество Ω может быть разбито на $n + 1$ частей меньшего диаметра:

$$\Omega = \Omega_1 \sqcup \dots \sqcup \Omega_{n+1}, \quad \text{diam } \Omega_i < \text{diam } \Omega, \quad i = 1, \dots, n + 1.$$

В 1993 г. Кан и Калаи показали, что эта гипотеза неверна (см. [2]). Тем не менее, вопрос об отыскании величины $f(n)$, равной минимальному количеству частей меньшего диаметра, на которые разбивается произвольное ограниченное множество в n -мерном пространстве, остается открытым.

В свою очередь, в 50-е годы XX века Нелсон, Эрдеш и Хадвигер поставили задачу о нахождении хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ (см. [3], [4]). Здесь $\chi(\mathbb{R}^n)$ есть минимальное число цветов, в которые можно так раскрасить все евклидово пространство, чтобы точки, расстояние между которыми в точности равно 1,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 06-01-00383 и 06-01-00512), гранта Президента РФ МД-4235.2006.1, программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1312.2006.1), фонда ИНТАС (грант № 03-51-5070) и гранта фонда “Династия”.

оказались раскрашенными в разные цвета. Иными словами, в терминах теории графов, речь идет о хроматическом числе бесконечного графа, множество вершин которого совпадает с $\mathbb{R}^n$, а множество ребер задается любыми парами точек $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ такими, что $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1$.

За полвека, прошедших с момента постановки задач, было получено множество различных результатов. Разумеется, мы не станем давать их подробный обзор здесь, отсылая читателя к работам [5]–[9]. Для нас будут актуальны только следующие оценки:

$$\begin{aligned} (1.225 \cdots + o(1))^{\sqrt{n}} &\leq f(n) \leq (1.224 \cdots + o(1))^n, \\ (1.239 \cdots + o(1))^n &\leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n. \end{aligned}$$

С одной стороны, тесная связь между проблемами Борсука и Нелсона–Эрдеша–Хадвигера видна непосредственно из их постановок. С другой стороны, еще более глубокие связи между задачами были обнаружены в работах [10]–[12]. Тем более удивительно то обстоятельство, что приведенные нами оценки столь сильно разнятся. Возникает вопрос о том, чтобы более аккуратно проследить связь между интересующими нас проблемами.

С упомянутой целью мы рассмотрим серию промежуточных задач, на одном конце которой будет в некотором смысле находиться аналог задачи Нелсона–Эрдеша–Хадвигера, а на другом – аналог задачи Борсука.

Нами вводится величина $\chi(\Omega, a, d)$, представляющая собой минимальное число цветов в такой раскраске множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ диаметра d , что точки Ω , расстояние между которыми равно $a \leq d$, разноцветны. Далее, мы рассматриваем все множества Ω диаметра d и из соответствующих величин $\chi(\Omega, a, d)$ выбираем максимальную. В результате получаем величину $\chi(n, a, d)$.

Зависимость функции $\chi(n, a, d)$ от последнего аргумента d несущественна. Без ограничения общности мы можем считать, например, что $d = 1$. При этом, естественно, $a \in (0, 1]$.

Заметим, что, в самом деле, при $a \rightarrow 0$ наша задача переходит в аналог задачи Нелсона–Эрдеша–Хадвигера, ведь в этом случае отношение диаметра каждого из раскрашиваемых множеств к величине расстояния, которого не может быть между одноцветными точками в раскраске, стремится к бесконечности; в случае же хроматического числа пространства это отношение было бы просто бесконечным. В то же время, при $a = 1$ возникает, очевидно, аналог проблемы Борсука.

Нашей дальнейшей целью будет получение нижних оценок величины $\chi(n, a, 1)$ при различных a .

2. Идеи получения оценок

Мы знаем, что

$$\chi(n, a, 1) = \max_{\Omega} \chi(\Omega, a, 1), \quad \text{где } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \text{ diam } \Omega = 1.$$

Таким образом, если мы желаем найти хорошие нижние оценки величины $\chi(n, a, 1)$, то нам следует так выбрать надлежащее множество Ω , чтобы $\chi(\Omega, a, 1)$ было как можно больше. Оказывается (см. [9], [13]), что для этого достаточно рассматривать

конечные множества Ω , элементы которых являются точками решетки. При этом наиболее изученными остаются ситуации, когда $\Omega \subset \{0, t\}^n$ или $\Omega \subset \{-t, 0, t\}^n$ (здесь t – произвольное вещественное число). Естественно, мы продолжаем считать, что диаметр Ω равен 1. В дальнейшем, мы будем работать именно с упомянутыми ситуациями. Заметим, что в статьях [11], [14] были изучены более общие решетчатые конструкции, но соответствующая техника исключительно громоздка, и здесь мы на ней останавливаться не будем.

По существу, ситуация $\Omega \subset \{0, t\}^n$ повторяет ситуацию $\Omega \subset \{0, 1\}^n$. Просто нам еще важно следить за условием $\text{diam } \Omega = 1$. То же самое можно сказать и о случае $\Omega \subset \{-t, 0, t\}^n$. Тем самым, мотивировано рассмотрение следующих величин:

$$\chi_{\{0,1\}}(n, a, 1) = \max_{t \in \mathbb{R}} \max_{\Omega \subset \{0,t\}^n, \text{diam } \Omega = 1} \chi(\Omega, a, 1),$$

$$\chi_{\{-1,0,1\}}(n, a, 1) = \max_{t \in \mathbb{R}} \max_{\Omega \subset \{-t,0,t\}^n, \text{diam } \Omega = 1} \chi(\Omega, a, 1).$$

Ясно, что

$$\chi(n, a, 1) \geq \chi_{\{0,1\}}(n, a, 1), \quad \chi(n, a, 1) \geq \chi_{\{-1,0,1\}}(n, a, 1).$$

В следующих разделах мы сформулируем и докажем новые нижние оценки для величин $\chi_{\{0,1\}}(n, a, 1)$, $\chi_{\{-1,0,1\}}(n, a, 1)$. К сожалению, значительные технические трудности не позволят нам это сделать при всех $a \in (0, 1]$, или же при некоторых a оценки получатся слишком слабыми. Это будет вызвано тем обстоятельством, что далеко не всегда удастся в полной мере провести оптимизацию, заложенную в определении величин $\chi_{\{0,1\}}(n, a, 1)$, $\chi_{\{-1,0,1\}}(n, a, 1)$. Поэтому мы рассмотрим также величины $\chi_{\{0,1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1)$, $\chi_{\{-1,0,1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1)$, $\chi(n, a \pm \varepsilon, 1)$. Эти величины отличаются от исходных тем, что теперь одноцветным точкам запрещается отстоять друг от друга на расстояние, лежащее в пределах от $a - \varepsilon$ до $a + \varepsilon$. Здесь, как правило, $\varepsilon = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. В результате во всех подобных ситуациях мы слегка отклонимся от исходного определения; однако, с точностью до бесконечно малого ε мы получим интересующие нас оценки.

3. Формулировки результатов

3.1. Случай величины $\chi_{\{0,1\}}(n, a, 1)$. Следующая теорема при многих значениях a дает новые нетривиальные оценки величины $\chi_{\{0,1\}}(n, a, 1)$.

ТЕОРЕМА 3.1.1. 1. Положим $b = [n/2]$. Рассмотрим любое простое $p = p(n)$, для которого $b - 2p < 0$ и $p \leq b$. Пусть

$$l = l(n) = b - p, \quad a = a(n) = \sqrt{\frac{b-l}{b}}.$$

Тогда верны неравенства

$$\chi(n, a, 1) \geq \chi_{\{0,1\}}(n, a, 1) \geq \frac{C_n^b}{\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i}.$$

2. Пусть $d \in \mathbb{N}$ и $n = d^2$. Положим $b = [d/2]$. Рассмотрим любое простое $p = p(d) = p(n)$, лежащее в интервале $(d/4, d/4 + \varphi(d))$, где $\varphi(d)$ – произвольная функция вида $\varphi(d) = o(d)$. Пусть $\xi = \min |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$, где минимум скалярных произведений

берется по всем парам d -мерных $(-1, 1)$ -векторов, у каждого из которых первая координата равна 1, а число положительных координат равно b . Возьмем

$$a = a(d) = \sqrt{\frac{d^2 - (d - 4p)^2}{d^2 - \xi^2}}.$$

Тогда верны неравенства

$$\chi(n, a, 1) \geq \chi_{\{0,1\}}(n, a, 1) \geq (\gamma + o(1))\sqrt{n},$$

где $\gamma > 1$ — абсолютная постоянная.

Прокомментируем полученный результат и поясним его смысл. Прежде всего, нетрудно видеть, что величина a во второй части теоремы определена корректно. При этом, однако, соответствующее утверждение выполнено не во всех размерностях. На самом деле (и это будет ясно из доказательства), утверждение без особого труда распространяется на любые n ; просто надлежащая формулировка еще более громоздка, нежели данная нами (нужно долго вводить величину $a = a(n)$), а суть дела никак не меняется.

Теперь предположим, что в теореме $l \gg \sqrt{n}$. Тогда оценка из первой части формулировки сильнее оценки из второй части. Правда, не стоит забывать, что величины $a = a(n)$ в разных частях теоремы, вообще говоря, различны (хотя, в принципе, ничто не мешает им иной раз и совпасть), так что формальное пересечение частей невелико, даже если по порядку (или асимптотически) отвечающие им числа a близки друг к другу. Далее, если $l \asymp n$, то оценка принимает вид $(c + o(1))^n$, $c > 1$. Однако ясно, что чем больше l , тем ближе a к нулю, а стало быть, тем ближе наша задача к задаче Нелсона–Эрдеша–Хадвигера (см. раздел 1). Таким образом, оценка, полученная в первой части теоремы 3.1.1, полностью соответствует нашим ожиданиям, ведь, как мы помним, $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.239 \dots + o(1))^n$. С другой стороны, если $l \ll \sqrt{n}$, то вторая часть теоремы содержит более точный результат (по крайней мере, для тех a , к которым эта часть применима). В то же время, при малых l величина a асимптотически равна единице, и всякое a из второй части формулировки этим свойством обладает. Значит, мы имеем дело с аналогом проблемы Борсука. А для нее как раз верна оценка $f(n) \geq (1.225 \dots + o(1))^{\sqrt{n}}$. Итак, в теореме 3.1.1 мы фактически имеем плавный переход от результатов, касающихся проблемы Нелсона–Эрдеша–Хадвигера, к результатам, связанным с задачей Борсука, причем величина $\chi(n, a, 1)$ становится практически неотличимой от числа Борсука $f(n)$ уже при $a = 1 - O(1/\sqrt{n})$ и практически неотличимой от хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n)$ при $a = \text{const} < 1$. Подчеркнем, что в наших рассуждениях величина a вполне может зависеть от n и самые интересные эффекты, наиболее точно отражающие переход от проблемы Борсука к проблеме Нелсона–Эрдеша–Хадвигера, наблюдаются именно при $a = \text{const} + o(1)$. Более подробное исследование зависимости оценки из теоремы 3.1.1 от величины a мы приведем в разделе 5.

Еще раз отметим, что при $l \ll \sqrt{n}$ (т.е. при $a = 1 - o(1/\sqrt{n})$) применимы обе части теоремы. Конечно, оценка из второй части “стационарна”, в то время как оценка из первой части продолжает ухудшаться, коль скоро $a \rightarrow 1$; однако в разных частях a разные, и потому некоторый нетривиальный смысл первая часть формулировки приобретает даже при тех a , которые практически от единицы не отличаются. Впрочем, теорема носит во многом иллюстративный характер: мы показываем,

что очень часто оценки для $\chi(n, a, 1)$ весьма хороши. И в этом ключе строгое разграничение областей применимости двух частей теоремы все же осмысленно: есть множество значений $a < 1 - \psi(n)$ с $\psi(n) \asymp 1/\sqrt{n}$, для которых первая часть теоремы сильна, и есть множество значений $a = 1 - o(1/\sqrt{n})$, для которых заведомо лучше иметь дело со второй частью. Да, собственно, именно так прослеживается связь между проблемами Борсука и Нелсона–Эрдеша–Хадвигера.

Еще вопрос: а насколько велико то самое множество значений a , для которых работает теорема 3.1.1? Оценка мощности этого множества упирается в вопрос о том, как часто встречаются простые числа в натуральном ряде. В данном случае нас интересует, сколько есть простых чисел, принадлежащих множеству $(0, n/2]$ или множеству $(d/4, d/4 + \varphi(d))$. Но количество таких p достаточно велико, так как для достаточно большого x между числами x и $x + O(x^{38/61})$ обязательно есть хотя бы одно простое число (см. [15]).

Оценки из теоремы 3.1.1 при многих конкретных a не оптимальны. В каждом частном случае их, конечно, можно улучшать. Однако весьма трудно доказать столь же общий результат с еще более точными оценками. Как мы уже говорили в предыдущем разделе, бороться с этим можно путем введения величин $\chi_{\{0,1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1)$, $\chi(n, a \pm \varepsilon, 1)$. Заметим, что для них также верна теорема 3.1.1. Тем не менее, такой результат может быть существенно улучшен.

ТЕОРЕМА 3.1.2. Пусть $a = a(n)$ – произвольная функция вида $a = \text{const} \pm \delta(n)$, где $\delta(n) = 0(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Предположим, что значения этой функции при достаточно большом n лежат в интервале $(\sqrt{1/2} + \varphi(n), 1 - \psi(n))$, где $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ – некоторые функции, ведущие себя как $Cn^{-23/61}$, $C > 0$. Для каждого $b_0 \in (0, 1/2)$ рассмотрим величину $b = [b_0 n]$. Пусть p – это простое число, ближайшее к величине ba^2 “справа” (т.е. большее нее). Тогда существует такая константа $C' > 0$, что для $\varepsilon = \varepsilon(n) = C'n^{-23/61}$ и для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$

$$\chi(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq \chi_{\{0,1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq \frac{C_n^b}{\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i}.$$

Иными словами,

$$\chi(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq \chi_{\{0,1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq \max_{b_0 \in (0, 1/2)} \frac{C_n^b}{\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i}.$$

С одной стороны, мы видим, что теорема 3.1.2 дает значительно более общий результат, чем теорема 3.1.1: в ней a пробегает целый интервал, тогда как в теореме 3.1.1 a принимало лишь дискретное множество значений. Более того, оценка также стала сильнее, ведь теперь мы берем максимум по континуальному множеству величин b_0 . В разделе 5 мы покажем, что это приводит к существенно лучшему результату. При этом мы, однако, не забываем, что в теореме 3.1.2 появляется ε и мы жертвуем точностью теоремы 3.1.1. С другой стороны, в новой теореме возникли ограничения на область изменения функции a , заданные функциями $\varphi(n)$ и $\psi(n)$. Последние ограничения обусловлены тем фактом, что нам необходимо искать ближайшее простое число к величине $ba^2 \asymp n$, а это возможно сделать лишь с точностью до $\varepsilon' = \varepsilon'(n) = O(n^{38/61})$ (см. [15]). Заметим, что оценку $\varepsilon' = \varepsilon'(n) = O(n^{38/61})$ наверняка можно улучшить с помощью современных методов аналитической теории чисел, но это для нас не так принципиально.

Теорема 3.1.2 имеет важное следствие в случае, когда $a = \text{const}$.

ТЕОРЕМА 3.1.3. Пусть $a = \text{const} \in (1/\sqrt{2}, 1)$. Определим число $b_0 \in (0, 1/2)$ как корень уравнения

$$(1 - b_0) - \left(\frac{1}{1 - 2l_0} - b_0 \right)^{1-2l_0} b_0^{2l_0} = 0. \quad (3.1.1)$$

Здесь $2l_0 = 1 - a^2$. Тогда существует такая константа $C' > 0$, что для $\varepsilon = \varepsilon(n) = C'n^{-23/61}$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} \chi(n, a \pm \varepsilon, 1) &\geq \chi_{\{0,1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1) \\ &\geq \left(\frac{(b_0(1 - 2l_0))^{b_0(1-2l_0)} (1 - b_0(1 - 2l_0))^{1-b_0(1-2l_0)}}{b_0^{b_0} (1 - b_0)^{1-b_0}} + o(1) \right)^n. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что все величины в теореме 3.1.3 определены корректно.

3.2. Случай величины $\chi_{\{-1,0,1\}}(n, a, 1)$.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Положим $b = [n/4]$. Рассмотрим любое простое $p = p(n)$, для которого $l = l(n) = 2b - p < 0$. Пусть

$$a = a(n) = \sqrt{\frac{2b - l}{4b}}.$$

Тогда верны неравенства

$$\chi(n, a, 1) \geq \chi_{\{-1,0,1\}}(n, a, 1) \geq \frac{C_n^{2b} C_{2b}^b}{\sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{[q/2]} C_n^i C_{n-i}^{q-2i}}.$$

Теорема 3.2.1 очень похожа на теорему 3.1.1. Однако в теореме 3.1.1 рассматриваются два случая, тогда как в теореме 3.2.1 никаких отдельных случаев нет. Дело в том, что при $a \geq 0.849 \dots$ оценка из теоремы 3.2.1 становится бессмысленной (меньшей 1). Это связано с погрешностью линейно-алгебраического метода, с помощью которого мы получаем наши оценки. Разумеется, существуют способы преодолеть указанную трудность (см. [16]); тем не менее, для нас это не будет столь принципиально. Хотя теорема 3.2.1 во многих случаях окажется сильнее теоремы 3.1.1, мы не станем распространять ее на область $a \geq 0.849 \dots$. Все равно ниже мы приведем более точную формулировку, подобную формулировке теоремы 3.1.2. Если же $a \geq 0.849 \dots$, то мы вполне можем применить теорему 3.1.1. Заметим также, что теорема 3.2.1 не только окажется во многих случаях точнее теоремы 3.1.1. Она еще и применима будет, вообще-то, не совсем к тем же значениям a . Поэтому правильнее даже говорить о том, что теорема 3.2.1 на области $a \leq 0.849 \dots$ дополняет теорему 3.1.1. А количество случаев, в которых работает новая теорема, измеряется опять-таки плотностью распределения простых в натуральном ряде. На самом деле, сравнивать результаты двух теорем гораздо удобнее в терминах величины $\chi(n, a \pm \varepsilon, 1)$, к которой обе они, безусловно, применимы. Ниже мы приведем аналог теоремы 3.1.2, который как раз касается упомянутой величины и в значительном числе ситуаций дает более сильный результат, нежели теорема 3.2.1.

ТЕОРЕМА 3.2.2. Пусть $a = a(n)$ – произвольная функция вида $a = \text{const} + \delta(n)$, где $\delta(n) = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Предположим, что значения этой функции при достаточно большом n лежат в интервале $(\sqrt{1/2} + \varphi(n), 1 - \psi(n))$, где $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ – некоторые функции, ведущие себя как $Cn^{-23/61}$, $C > 0$. Для каждой пары положительных вещественных чисел b_{01}, b_{02} , удовлетворяющих условиям $b_{01} + b_{02} \in (0, 1/2)$, рассмотрим величины $b_1 = [b_{01}n]$, $b_2 = [b_{02}n]$. Пусть p – это простое число, ближайшее к величине $(b_{01} + 3b_{02})a^2$ “справа” (т.е. большее нее). Тогда существует такая константа $C' > 0$, что для $\varepsilon = \varepsilon(n) = C'n^{-23/61}$ и для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнена оценка

$$\chi(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq \chi_{\{-1, 0, 1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq \frac{C_n^{b_1+b_2} C_{b_1+b_2}^{b_1}}{\sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{[q/2]} C_n^i C_{n-i}^{q-2i}}.$$

Иными словами,

$$\chi(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq \chi_{\{-1, 0, 1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq \max_{b_{01}, b_{02}} \frac{C_n^{b_1+b_2} C_{b_1+b_2}^{b_1}}{\sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{[q/2]} C_n^i C_{n-i}^{q-2i}},$$

где максимум берется по всем допустимым значениям величин b_{01}, b_{02} .

Понятно, что теорема 3.2.2 может быть откомментирована в точности так же, как теорема 3.1.2. Вместе с тем, она тоже имеет следствие, аналогичное теореме 3.1.3.

ТЕОРЕМА 3.2.3. Пусть $a = \text{const} \in (1/\sqrt{2}, 1)$. Пусть, далее, b_{01}, b_{02} – вещественные переменные, определенные в области $b_{01} + b_{02} \leq 1/2$, $b_{01} \geq b_{02}$. Положим

$$b_1 = b_{01}n, \quad b_2 = b_{02}n, \quad p = \frac{b_1 + 3b_2}{2} = p_0n, \quad l_0 = b_{01} + b_{02} - a^2(b_{01} + 3b_{02}),$$

$$S = \sqrt{n^2 + 6pn - 3p^2} = S_0n, \quad i = \frac{n + 3p - S}{6} = i_0n.$$

Возьмем теперь в качестве b_{01}, b_{02} корни системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial b_{01}} ((p - 2i) \ln(p - 2i) + i \ln i + (n + i - p) \ln(n + i - p) \\ \quad - b_1 \ln b_1 - b_2 \ln b_2 - (n - b_1 - b_2) \ln(n - b_1 - b_2)) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial b_{02}} ((p - 2i) \ln(p - 2i) + i \ln i + (n + i - p) \ln(n + i - p) \\ \quad - b_1 \ln b_1 - b_2 \ln b_2 - (n - b_1 - b_2) \ln(n - b_1 - b_2)) = 0. \end{cases}$$

Тогда для величины $\chi(n, a \pm \varepsilon, 1)$ верна оценка

$$\begin{aligned} \chi(n, a \pm \varepsilon, 1) &\geq \chi_{\{-1, 0, 1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1) \\ &\geq \left(\frac{(p_0 - 2i_0)^{p_0 - 2i_0} i_0^{i_0} (1 + i_0 - p_0)^{1 + i_0 - p_0}}{b_{01}^{b_{01}} b_{02}^{b_{02}} (1 - b_{01} - b_{02})^{1 - b_{01} - b_{02}}} + o(1) \right)^n, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = C'n^{-23/61}$ с некоторым $C' > 0$.

Нетрудно видеть, что все величины в теореме определены корректно. Результаты теорем 3.2.3 и 3.1.3 мы сопоставим в разделе 5.

4. Доказательства теорем

4.1. Вспомогательные леммы.

ЛЕММА 4.1.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $b \in (0, n/2)$, p – произвольное простое число, для которого $b - 2p < 0$. Положим

$$\Sigma = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, |\{i : x_i = 1\}| = b\}.$$

Тогда, каково бы ни было множество $Q \subset \Sigma$, удовлетворяющее условию $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq l = b - p$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$, верна оценка

$$|Q| \leq \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i.$$

ЛЕММА 4.1.2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, a, b_1, b_2 таковы, что $b_1 + b_2 \leq n/2$ и $b_2 \leq b_1$. Пусть, далее, p – произвольное простое число, для которого $b_1 + b_2 - 2p < -2b_2$. Положим

$$\Sigma = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, |\{i : x_i = 1\}| = b_1, |\{i : x_i = -1\}| = b_2\}.$$

Тогда, каково бы ни было множество $Q \subset \Sigma$, удовлетворяющее условию $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq l = b_1 + b_2 - p$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$, верна оценка

$$|Q| \leq \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{[q/2]} C_n^i C_{n-i}^{q-2i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1.1. Для каждого вектора $\mathbf{x} \in \Sigma$ определим многочлен $F_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]$ с помощью формулы

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{i \in B} (i - (\mathbf{x}, \mathbf{y})). \quad (4.1.1)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$; при этом множество B имеет вид

$$B = \{1, \dots, p\} \setminus \{i\},$$

где i – наименьший положительный вычет числа b по модулю p .

Если в определении многочлена $F_{\mathbf{x}}$ “раскрыть скобки”, то получится линейная комбинация некоторых мономов:

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \sum c_{i_1, \dots, i_q} y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots y_{i_q}^{\alpha_{i_q}} + c.$$

Здесь каждый из коэффициентов $c_{i_1, \dots, i_q}$ есть элемент поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; аналогично $c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. В то же время суммирование распространяется на все натуральные $q \leq p-1$, причем

$$1 \leq \alpha_{i_1} \leq p-1, \quad \dots, \quad 1 \leq \alpha_{i_q} \leq p-1$$

и, даже более того,

$$\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_q} \leq p-1;$$

наконец, можно считать без ограничения общности, что

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{q-1} < i_q \leq n.$$

Каждый многочлен вида $F_{\mathbf{x}}$ заменим многочленом

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \sum c_{i_1, \dots, i_q} y_{i_1}^{\beta_{i_1}} \dots y_{i_q}^{\beta_{i_q}} + c,$$

у которого $\beta_{i_1} = 1$, коль скоро α_{i_1} нечетно, и $\beta_{i_1} = 0$, коль скоро α_{i_1} четно, $i_1 \in \{i_1, \dots, i_q\}$. Таким образом, любой многочлен $P_{\mathbf{x}}$ является элементом пространства $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]$ и значения всякого такого многочлена на векторах из Σ совпадают со значениями полинома $F_{\mathbf{x}}$, по которому данный многочлен $P_{\mathbf{x}}$ был построен. Справедливость последнего утверждения обусловлена тем фактом, что $y_i \in \{0, 1\}$ для любого $i = 1, \dots, n$ и для всех $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \Sigma$. Отметим также, что описанные многочлены порождаются базисом, состоящим из мономов вида

$$C, \quad y_1, \quad \dots, \quad y_n, \quad y_1 y_2, \quad \dots, \quad y_1 y_n, \quad \dots, \quad y_1 y_2 \dots y_{p-1}, \quad \dots, \quad y_{n-p+1} \dots y_n.$$

Таким образом, размерность пространства, порожденного всеми полиномами $P_{\mathbf{x}}$, где $\mathbf{x}$ пробегает Σ , не превосходит $\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i$.

Далее, поскольку p таково, что $b - 2p < 0$, то для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$ выполнено

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv b \pmod{p} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{y} \vee (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b - p. \quad (4.1.2)$$

Кроме того, понятно, что

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv b \pmod{p}, \quad \mathbf{y} \in \Sigma$$

(здесь важна простота числа p), а стало быть,

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv b \pmod{p}, \quad \mathbf{y} \in \Sigma. \quad (4.1.3)$$

Пусть $Q = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\}$. Покажем, что многочлены

$$P_{\mathbf{x}_1}, \quad \dots, \quad P_{\mathbf{x}_s}$$

линейно независимы над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Если нам удастся это сделать, то мы автоматически получим нужное нам неравенство

$$|Q| = s \leq \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i.$$

Итак, предположим,

$$c_1 P_{\mathbf{x}_1} + \dots + c_s P_{\mathbf{x}_s} = 0, \quad c_1, \dots, c_s \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Как следствие,

$$c_1 P_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}) + \dots + c_s P_{\mathbf{x}_s}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p} \quad \forall \mathbf{y} \in \Sigma.$$

Зафиксируем $\mathbf{y} = \mathbf{x}_i$ при произвольном $i = 1, \dots, n$. Тогда $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = b \equiv b \pmod{p}$, так что ввиду (4.1.3) выполнено $P_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{y}) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Напротив, при $j \neq i$ условие леммы и свойство (4.1.2) говорят о том, что $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) \not\equiv b \pmod{p}$, т.е. опять-таки за счет (4.1.3) получаем $P_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p}$. Поскольку p – простое число, имеем $c_i \equiv 0 \pmod{p}$ для любого i . Многочлены и впрямь линейно независимы, и лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1.2. Лемма 4.1.2 доказывается аналогично. При этом изменится, по существу, лишь переход от многочленов вида $F_{\mathbf{x}}$ к многочленам вида $P_{\mathbf{x}}$. А именно, мы не сможем больше апеллировать к тому факту, что для каждого $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \Sigma$ и для любого $i = 1, \dots, n$ выполнено $y_i^2 = y_i$; теперь имеют место только соотношения $y_i^3 = y_i$. Соответственно, и числа α_ν (ср. доказательство леммы 4.1.1) трансформируются в числа β_ν по слегка измененному правилу: если α_ν четно, то $\beta_\nu = 2$; если же α_ν нечетно, то $\beta_\nu = 1$. Размерность пространства, порожденного полиномами $P_{\mathbf{x}}$, не превосходит величины

$$\sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{[q/2]} C_n^i C_{n-i}^{q-2i}$$

(здесь i – это количество переменных, которые входят в тот или иной моном во второй степени), и доказательство леммы 4.1.2 получено.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.1. Можно показать, что если мы в формулировке леммы 4.1.1 полагаем $b = 2p - 1$, то окончательная оценка в той же лемме допускает уточнение: а именно, выполнено неравенство $|Q| \leq C_n^{p-1}$. Однако для наших дальнейших целей подобное уточнение несущественно, и здесь мы на его обосновании останавливаться не будем.

4.2. Доказательство теорем 3.1.1–3.1.3. Докажем сперва теорему 3.1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1.1. Пусть b, p, l и a такие же, как в первой части формулировки теоремы 3.1.1. Положим

$$V = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \left\{ 0, \frac{1}{\sqrt{2b}} \right\}, \left| \left\{ i : x_i = \frac{1}{\sqrt{2b}} \right\} \right| = b \right\}, \quad (4.2.1)$$

$$E = \{ \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a \} \quad (4.2.2)$$

и рассмотрим граф $G = (V, E)$. Поскольку $\text{diam } V = 1$, величина $\chi(V, a, 1)$, которая, фактически, фигурирует в определении числа $\chi_{\{0,1\}}(n, a, 1)$, совпадает с величиной $\chi(G)$ хроматического числа графа G . Здесь $t = 1/\sqrt{2b}$. В свою очередь, $\chi(G)$ оценивается снизу дробью $|V|/\alpha(G)$, где $\alpha(G)$ – это число независимости графа G , равное максимуму мощности множества попарно несмежных вершин графа (см. [17]).

Два вектора из множества V образуют ребро, принадлежащее E тогда и только тогда, когда множества их ненулевых координат пересекаются по l элементам. Соответственно, желая получить верхнюю оценку величины $\alpha(G)$, мы должны понять, насколько большой может быть мощность произвольной совокупности векторов $Q \subset V$, у любых двух представителей которой множества ненулевых координат не пересекаются по l элементам. Понятно, что с этой целью можно применить лемму 4.1.1, ведь и в нашем случае $b - 2p < 0$, $l = b - p$ и p – простое. Таким образом, $\alpha(G) \leq \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i$, ввиду чего

$$\chi(n, a, 1) \geq \chi_{\{0,1\}}(n, a, 1) \geq \chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)} \geq \frac{C_n^b}{\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i}.$$

Первая часть теоремы 3.1.1 доказана.

Докажем вторую часть теоремы 3.1.1. Рассмотрим семейство Σ , состоящее из всех d -мерных $(-1, 1)$ -векторов, у каждого из которых b положительных координат и первая координата равна 1. Понятно, что $|\Sigma| = C_{d-1}^{b-1}$. Каждому вектору $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \Sigma$ сопоставим n -мерный вектор

$$\mathbf{x} * \mathbf{x} = (x_1^2, x_1x_2, \dots, x_1x_d, x_2x_1, x_2^2, \dots, x_2x_d, \dots, x_dx_1, \dots, x_d^2).$$

Возникнет новое семейство V (теперь уже n -мерных) векторов, элементы которого находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с элементами семейства Σ .

Как известно,

$$|\mathbf{x} * \mathbf{x} - \mathbf{y} * \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{x} * \mathbf{x}) + (\mathbf{y} * \mathbf{y}, \mathbf{y} * \mathbf{y}) - 2(\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{y} * \mathbf{y}).$$

В то же время

$$(\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{y} * \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d x_i x_j y_i y_j = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2.$$

Значит,

$$|\mathbf{x} * \mathbf{x} - \mathbf{y} * \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^2 + (\mathbf{y}, \mathbf{y})^2 - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = 2d^2 - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2,$$

т.е. диаметр V достигается на тех и только тех парах векторов $\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{y} * \mathbf{y}$, которые отвечают векторам $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$ с минимальным модулем скалярного произведения. Последняя величина в формулировке теоремы обозначена ξ , и, стало быть, диаметр V равен $\sqrt{2d^2 - 2\xi^2}$.

Положим $a' = \sqrt{2d^2 - 2(d-4p)^2}$. Ввиду сказанного выше ясно, что расстояние a' достигается между векторами $\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{y} * \mathbf{y} \in V$, если скалярное произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ равно $d-4p$.

Допустим, мы раскрасили V в $\chi < C_{d-1}^{b-1} / \sum_{i=0}^{p-1} C_d^i$ цветов. Тогда в один из цветов покрашено больше, чем $\sum_{i=0}^{p-1} C_d^i$ векторов. Обозначим их множество через W , а множество их прообразов в Σ через A ; $|W| = |A| > \sum_{i=0}^{p-1} C_d^i$. Каждый $(-1, 1)$ -вектор $\mathbf{x} \in A$ заменим $(0, 1)$ -вектором $\mathbf{x}'$ так, чтобы $2\mathbf{x}' - \mathbf{e} = \mathbf{x}$ при $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)$. Получится совокупность $(0, 1)$ -векторов A' , $|A'| = |A| > \sum_{i=0}^{p-1} C_d^i$. Числа b и p вместе с совокупностью векторов A' удовлетворяют условиям леммы 4.1.1 (речь идет о размерности d). Следовательно, в A' найдется два вектора $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ со скалярным произведением $b-p$. Им отвечают такие векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, что

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (2\mathbf{x}' - \mathbf{e}, 2\mathbf{y}' - \mathbf{e}) = 4(b-p) - 2b - 2b + d = d - 4p.$$

Окончательно получаем, что в W есть два вектора $\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{y} * \mathbf{y}$ со скалярным произведением $(d-4p)^2$. Иными словами, $|\mathbf{x} * \mathbf{x} - \mathbf{y} * \mathbf{y}| = a'$. Итак, если V покрашено в $\chi < C_{d-1}^{b-1} / \sum_{i=0}^{p-1} C_d^i$ цветов, то в V существуют одноцветные векторы, расстояние между которыми равно a' .

Рассмотрим множество $(0, 1)$ -векторов V' , которое получается из V так же, как множество A' получалось из A . Диаметр D множества V' вдвое меньше величины $\sqrt{2d^2 - 2\xi^2}$, а расстояние $R = a'/2$ реализуется векторами из V' тогда и только тогда, когда расстояние a' достигается между соответствующими векторами из V . Пусть, наконец, граф $G = (U, F)$ имеет множество вершин $U = (1/D)V'$ (диаметр U равен 1) и множество F ребер, которые мы проводим, коль скоро расстояние между

данными двумя вершинами равно R/D . Множества U и V находятся во взаимно однозначном соответствии, причем пары элементов V , отстоящие друг от друга на расстояние a' , отвечают парам элементов U , расстояние между которыми равно (см. формулировку теоремы)

$$\frac{R}{D} = a = a(d) = a(n) = \sqrt{\frac{d^2 - (d - 4p)^2}{d^2 - \xi^2}},$$

т.е. парам элементов, являющихся концами одного и того же ребра. Сделанные выше наблюдения показывают, что при любой раскраске множества U в $\chi < C_{d-1}^{b-1} / \sum_{i=0}^{p-1} C_d^i$ цветов обязательно есть цвет, в который покрашены две точки из U , отстоящие друг от друга на расстояние a (соединенные ребром). Значит, $\chi(G) \geq C_{d-1}^{b-1} / \sum_{i=0}^{p-1} C_d^i$, а стало быть,

$$\chi(n, a, 1) \geq \chi_{\{0,1\}}(n, a, 1) \geq \chi(G) \geq \frac{C_{d-1}^{b-1}}{\sum_{i=0}^{p-1} C_d^i}.$$

Вспоминаем, что $b \sim d/2$, $p \sim d/4$, и, оценивая факториалы в биномиальных коэффициентах C_{d-1}^{b-1} , C_d^{p-1} с помощью формулы Стирлинга, получаем

$$C_{d-1}^{b-1} = (2 + o(1))^d, \quad \sum_{i=0}^{p-1} C_d^i = (\zeta + o(1))^d, \quad \zeta = 1.754 \dots,$$

т.е.

$$\chi(n, a, 1) \geq \frac{C_{d-1}^{b-1}}{\sum_{i=0}^{p-1} C_d^i} = (\lambda + o(1))^d = (\gamma + o(1))^{\sqrt{n}}, \quad \gamma > 0.$$

Последнее равенство справедливо, поскольку $n = d^2$, и теорема 3.1.1, тем самым, доказана полностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1.2. Теорема 3.1.2 доказывается аналогично тому, как доказывается первая часть теоремы 3.1.1. В самом деле, сохраняя обозначения из формулировки теоремы 3.1.2, положим $a' = \sqrt{p/b}$,

$$V_b = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \left\{ 0, \frac{1}{\sqrt{2b}} \right\}, \left| \left\{ i : x_i = \frac{1}{\sqrt{2b}} \right\} \right| = b \right\},$$

$$E_b = \{ \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a' \}.$$

С одной стороны, ввиду известных результатов о распределении простых чисел в натуральном ряде (см. [15] и раздел 3)

$$a' \in (a(n) - \varepsilon(n), a(n) + \varepsilon(n))$$

при всех достаточно больших значениях n . С другой стороны, расстояние a' достигается на тех и только тех векторах $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_b$, для которых выполнено $(\sqrt{2b}\mathbf{x}, \sqrt{2b}\mathbf{y}) = b - p$. Векторы $\mathbf{x}' = \sqrt{2b}\mathbf{x}$, $\mathbf{y}' = \sqrt{2b}\mathbf{y}$ имеют координаты 0, 1. При этом по условию $b < n/2$ (b – это количество единичных координат как в $\mathbf{x}'$, так и в $\mathbf{y}'$) и $b - 2p < 0$. Справедливость последнего неравенства вытекает из соотношений

$$\frac{b - 2p}{2} = \frac{b}{2} - p < ba^2 - p < 0.$$

Значит, применима лемма 4.1.1, которая говорит в данном случае, что для $G_b = (V_b, E_b)$ верно $\alpha(G_b) \leq \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i$, т.е. что

$$\chi(G_b) \geq \frac{|V_b|}{\alpha(G_b)} \geq \frac{C_n^b}{\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i}.$$

Таким образом, для каждого $b = [b_0 n]$ из формулировки теоремы 3.1.2

$$\chi(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq \chi_{\{0,1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq \chi(G_b) \geq \frac{C_n^b}{\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i},$$

вследствие чего

$$\chi(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq \chi_{\{0,1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq \max_b \chi(G_b) \geq \max_{b_0} \frac{C_n^b}{\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i},$$

и теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1.3. Докажем, наконец, теорему 3.1.3. Если $a = \text{const}$, то (в обозначениях теоремы 3.1.2) при достаточно большом n выполнено $a \pm \varepsilon(n) \in (\sqrt{1/2} + \varphi(n), 1 - \psi(n))$. Значит, данное a удовлетворяет условиям теоремы 3.1.2. Пусть, более того, величины b и p выбраны так же, как это сделано в теореме 3.1.2. Иными словами, $b \sim b_0 n$ и, как следствие, $p \sim p_0 n$, где $p_0 = b_0 a^2$. Мы знаем, что при любом выборе константы $b_0 \in (0, 1/2)$

$$\chi(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq \frac{C_n^b}{\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i}.$$

Применение формулы Стирлинга показывает, что

$$C_n^b = \left(\frac{1}{b_0^{b_0} (1 - b_0)^{1-b_0}} + o(1) \right)^n, \quad \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i = \left(\frac{1}{p_0^{p_0} (1 - p_0)^{1-p_0}} + o(1) \right)^n.$$

Последняя формула в обозначениях теоремы 3.1.3 равносильна соотношению

$$\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i = \left(\frac{1}{(b_0(1 - 2l_0))^{b_0(1-2l_0)} (1 - b_0(1 - 2l_0))^{1-b_0(1-2l_0)}} + o(1) \right)^n,$$

а стало быть, действительно,

$$\begin{aligned} \chi(n, a \pm \varepsilon, 1) &\geq \chi_{\{0,1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1) \\ &\geq \left(\max_{b_0 \in (0, \frac{1}{2})} \frac{(b_0(1 - 2l_0))^{b_0(1-2l_0)} (1 - b_0(1 - 2l_0))^{1-b_0(1-2l_0)}}{b_0^{b_0} (1 - b_0)^{1-b_0}} + o(1) \right)^n. \end{aligned}$$

Величина b_0 , на которой достигается указанный выше максимум, ищется (за счет стандартных аналитических соображений) из уравнения (3.1.1).

4.3. Доказательство теорем 3.2.1–3.2.3. Доказательства теорем 3.2.1–3.2.3 полностью аналогичны доказательствам, которые мы привели в предыдущем пункте. Тем не менее, ниже мы коротко изложим все необходимые соображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2.1. Итак, начнем с теоремы 3.2.1. Пусть величины b, p, l и a такие же, как в ее формулировке. Положим

$$V = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \right. \\ \left. : x_i \in \left\{ -\frac{1}{\sqrt{8b}}, 0, \frac{1}{\sqrt{8b}} \right\}, \left| \left\{ i : x_i = -\frac{1}{\sqrt{8b}} \right\} \right| = \left| \left\{ i : x_i = \frac{1}{\sqrt{8b}} \right\} \right| = b \right\}, \\ E = \{ \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a \}$$

и рассмотрим граф $G = (V, E)$. Как и при доказательстве теоремы 3.1.1, замечаем, что

$$\chi(n, a, 1) \geq \chi_{\{-1, 0, 1\}}(n, a, 1) \geq \chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}.$$

Применим лемму 4.1.2 для получения верхней оценки величины $\alpha(G)$. В самом деле, если каждый вектор из множества V домножить на $\sqrt{8b}$, то возникнет совокупность $(-1, 0, 1)$ -векторов, совпадающая с совокупностью Σ из леммы 4.1.2 при $b_1 = b_2 = b$. При этом ввиду условий теоремы 3.2.1 выполнено $2b \leq n/2$ и $2b - 2p < -2b$. Таким образом, все условия леммы 4.1.2, в свою очередь, выполнены. Вместе с тем, расстояние a достигается между векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ тогда и только тогда, когда скалярное произведение векторов $\sqrt{8b}\mathbf{x}, \sqrt{8b}\mathbf{y} \in \Sigma$ равно $2b - p$ (см. лемму 4.1.2). В результате из леммы 4.1.2 вытекает оценка

$$\alpha(G) \leq \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} C_n^i C_{n-i}^{q-2i}.$$

Но $|V| = C_n^{2b} C_{2b}^b$, и, стало быть,

$$\chi(n, a, 1) \geq \chi_{\{-1, 0, 1\}}(n, a, 1) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)} \geq \frac{C_n^{2b} C_{2b}^b}{\sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} C_n^i C_{n-i}^{q-2i}}.$$

Теорема 3.2.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2.2. Теорема 3.2.2 доказывается практически так же, как и теорема 3.2.1. Здесь для каждого b_1, b_2

$$V_{b_1, b_2} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2b_1 + 6b_2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2b_1 + 6b_2}} \right\}, \right. \\ \left| \left\{ i : x_i = \frac{1}{\sqrt{2b_1 + 6b_2}} \right\} \right| = b_1, \left| \left\{ i : x_i = -\frac{1}{\sqrt{2b_1 + 6b_2}} \right\} \right| = b_2 \right\}, \\ E_{b_1, b_2} = \{ \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a' \}, \quad a' = \sqrt{\frac{p}{b_1 + 3b_2}}, \quad G_{b_1, b_2} = (V_{b_1, b_2}, E_{b_1, b_2}).$$

Очевидно, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a'$ тогда и только тогда, когда

$$(\sqrt{2b_1 + 6b_2}\mathbf{x}, \sqrt{2b_1 + 6b_2}\mathbf{y}) = b_1 + b_2 - p, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_{b_1, b_2}.$$

Кроме того, свойства параметров b_1 , b_2 , p в условии теоремы 3.2.2 согласованы со свойствами одноименных параметров в условии леммы 4.1.2. Следовательно, применима лемма 4.1.2, которая говорит, что

$$\alpha(G_{b_1, b_2}) \leq \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{[q/2]} C_n^i C_{n-i}^{q-2i}.$$

Наконец, $a' \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (ср. формулировку теоремы 3.2.2). Значит, действительно,

$$\begin{aligned} \chi(n, a \pm \varepsilon, 1) &\geq \chi_{\{-1, 0, 1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq \max_{b_{01}, b_{02}} \chi(G_{b_1, b_2}) \\ &\geq \max_{b_{01}, b_{02}} \frac{|V_{b_1, b_2}|}{\alpha(G_{b_1, b_2})} \geq \max_{b_{01}, b_{02}} \frac{C_n^{b_1+b_2} C_{b_1+b_2}^{b_1}}{\sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{[q/2]} C_n^i C_{n-i}^{q-2i}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2.3. Докажем, наконец, теорему 3.2.3 (ср. доказательство теоремы 3.1.3). Все дальнейшие обозначения соответствуют обозначениям из теоремы 3.2.3. Из формулы Стирлинга сразу получается асимптотика

$$C_n^{b_1+b_2} C_{b_1+b_2}^{b_1} = \left(\frac{1}{b_{01}^{b_{01}} b_{02}^{b_{02}} (1 - b_{01} - b_{02})^{1-b_{01}-b_{02}}} + o(1) \right)^n.$$

В то же время за счет стандартных аналитических преобразований (ср. [7], [18]) имеем

$$\sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{[q/2]} C_n^i C_{n-i}^{q-2i} = \left(\frac{1}{(p_0 - 2i_0)^{p_0-2i_0} i_0^{i_0} (1 + i_0 - p_0)^{1+i_0-p_0}} + o(1) \right)^n.$$

Из теоремы 3.2.2 и указанных выкладок вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \chi(n, a \pm \varepsilon, 1) &\geq \chi_{\{-1, 0, 1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq \max_{b_{01}, b_{02}} \frac{C_n^{b_1+b_2} C_{b_1+b_2}^{b_1}}{\sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{[q/2]} C_n^i C_{n-i}^{q-2i}} \\ &= \left(\max_{b_{01}, b_{02}} \frac{(p_0 - 2i_0)^{p_0-2i_0} i_0^{i_0} (1 + i_0 - p_0)^{1+i_0-p_0}}{b_{01}^{b_{01}} b_{02}^{b_{02}} (1 - b_{01} - b_{02})^{1-b_{01}-b_{02}}} + o(1) \right)^n. \end{aligned}$$

Последний максимум реализуется в точности теми b_{01} , b_{02} , что приведены в формулировке теоремы 3.2.3 (система, фигурирующая в формулировке, представляет собой обычное условие максимума функции двух переменных, и нетрудно показать, что в данном случае это условие является достаточным). Теорема 3.2.3 доказана.

5. Соотношения между результатами

Прежде всего разумно сопоставить результаты теорем 3.1.1 и 3.1.3. Поскольку формально говорят они о разных величинах, мы унифицируем их, замечая, что оценка из первой теоремы вполне применима к величине $\chi_{\{0,1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1)$, фигурирующей в теореме 3.1.3. При этом сравнивать мы будем лишь неравенства

$$\begin{aligned} \chi_{\{0,1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1) &\geq \frac{C_n^b}{\sum_{i=0}^{p-1} C_n^i} = (\gamma(a) + o(1))^n, \quad a = \text{const} < 1, \\ \chi_{\{0,1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1) &\geq \left(\frac{(b_0(1 - 2l_0))^{b_0(1-2l_0)} (1 - b_0(1 - 2l_0))^{1-b_0(1-2l_0)}}{b_0^{b_0} (1 - b_0)^{1-b_0}} + o(1) \right)^n, \end{aligned}$$

Рис. 1

так как в любом случае к другим ситуациям теорема 3.1.3 не применима. Естественно, сравнение оценок мы будем осуществлять в терминах констант, стоящих в основаниях соответствующих экспонент. На рис. 1 изображены графики зависимостей этих констант от величины $a \in (1/\sqrt{2}, 1)$ (ср. теорему 3.1.3). Очевидно, что обе константы стремятся к единице (“близость к проблеме Борсука”, которую как раз улавливает вторая часть теоремы 3.1.1); однако первая константа всегда лежит значительно ниже второй, и это свидетельствует о качестве оптимизации, проведенной нами в теореме 3.1.3.

Еще более интересно положение, складывающееся при аналогичном сопоставлении результатов теорем 3.2.1, 3.2.3. Здесь речь идет о константах, одна из которых задается соотношением

$$\frac{C_n^{2b} C_{2b}^b}{\sum_{q=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} C_n^i C_{n-i}^{q-2i}} = (\gamma(a) + o(1))^n, \quad a = \text{const} < 1,$$

а другая имеет вид

$$\frac{(p_0 - 2i_0)^{p_0 - 2i_0} i_0^{i_0} (1 + i_0 - p_0)^{1 + i_0 - p_0}}{b_{01}^{b_{01}} b_{02}^{b_{02}} (1 - b_{01} - b_{02})^{1 - b_{01} - b_{02}}}$$

(см. теоремы 3.2.1, 3.2.3). Разумеется, “оптимальный” результат всегда существенно больше неоптимального (см. рис. 2); тем не менее, начиная с некоторого момента нижний график и вовсе уходит под единицу. Это, как мы уже говорили в п. 3.2, обусловлено некоторой слабостью наших методов, которая, впрочем, устраняется разными способами: тому свидетельством и [16], и, собственно, теорема 3.2.3.

Остается, по-видимому, суммировать полученные результаты и сравнить “оптимальные” теоремы 3.1.3 и 3.2.3. Оказывается, что в ряде ситуаций первая теорема

Рис. 2

Рис. 3

Таблица 1

a	$\chi_{\{0,1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq$	$\chi_{\{-1,0,1\}}(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq$	$\chi(n, a \pm \varepsilon, 1) \geq$
0.707	$(1.207 + o(1))^n$	$(1.239 + o(1))^n$	$(1.239 + o(1))^n$
0.736	$(1.181 + o(1))^n$	$(1.202 + o(1))^n$	$(1.202 + o(1))^n$
0.765	$(1.157 + o(1))^n$	$(1.167 + o(1))^n$	$(1.167 + o(1))^n$
0.795	$(1.134 + o(1))^n$	$(1.136 + o(1))^n$	$(1.136 + o(1))^n$
0.824	$(1.112 + o(1))^n$	$(1.107 + o(1))^n$	$(1.112 + o(1))^n$
0.853	$(1.091 + o(1))^n$	$(1.080 + o(1))^n$	$(1.091 + o(1))^n$
0.882	$(1.071 + o(1))^n$	$(1.057 + o(1))^n$	$(1.071 + o(1))^n$
0.912	$(1.052 + o(1))^n$	$(1.036 + o(1))^n$	$(1.052 + o(1))^n$
0.941	$(1.034 + o(1))^n$	$(1.019 + o(1))^n$	$(1.034 + o(1))^n$
0.970	$(1.016 + o(1))^n$	$(1.006 + o(1))^n$	$(1.016 + o(1))^n$

дает более сильные оценки, а в ряде ситуаций более точные оценки получаются за счет второй теоремы (см. рис. 3). В следующей таблице мы приведем серию результатов, вытекающих из теорем 3.1.3 и 3.2.3. Видно, что графики с рис. 3 пересекаются где-то в районе $a = 0.796$. Это означает, что при $a \leq 0.796$ теорема 3.2.3 сильнее теоремы 3.1.3, а при $a \geq 0.796$, наоборот, теорема 3.1.3 дает более точный результат.

Теоремы 3.1.1 и 3.2.1 сравнивать особого смысла уже нет.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Borsuk, “Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre”, *Fundam. Math.*, **20** (1933), 177–190.
- [2] J. Kahn, G. Kalai, “A counterexample to Borsuk’s conjecture”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **29**:1 (1993), 60–62.
- [3] H. Hadwiger, “Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum”, *Portugaliae Math.*, **4** (1944), 140–144.
- [4] A. Soifer, *Mathematical Coloring Book*, Center for Excellence in Math. Education, Colorado Springs, 1997.
- [5] В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, Наука, М., 1965.
- [6] V. G. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan, *Excursions into Combinatorial Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [7] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146.
- [8] A. Soifer, “Chromatic number of the plane: a historical essay”, *Geombinatorics*, **1**:3 (1991), 13–15.
- [9] A. M. Raigorodskii, “The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary”, *Math. Intelligencer*, **26**:3 (2004), 4–12.
- [10] А. М. Райгородский, “О нижних оценках для чисел Борсука и Хадwigера”, *УМН*, **59**:3 (2004), 177–178.
- [11] А. М. Райгородский, “О связи между проблемами Борсука и Эрдеша–Хадwigера”, *УМН*, **60**:4 (2005), 219–220.
- [12] А. М. Райгородский, “О числах Борсука и Эрдеша–Хадwigера”, *Матем. заметки*, **79**:6 (2006), 913–924.

- [13] P. Frankl, R. Wilson, “Intersection theorems with geometric consequences”, *Combinatorica*, **1**:4 (1981), 357–368.
- [14] И. М. Шитова, “О хроматических числах метрических пространств с двумя запрещенными расстояниями”, *Докл. РАН*, **413**:2 (2007), 178–180.
- [15] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967.
- [16] А. М. Райгородский, “Хроматические числа дистанционных графов”, *Чебышевский сб.*, **6**:3 (2005), 159–170.
- [17] Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973.
- [18] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007.

А. М. Райгородский

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

10.04.2007

Исправленный вариант

14.12.2007

М. М. Китяев

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова