Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Сангаре, А. В. Фаминский, Слабые решения смешанной задачи в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 1, 98–109

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4307>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:55:16

Слабые решения смешанной задачи в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары

К. Сангаре, А. В. Фаминский

В настоящей работе рассматривается в полуполосе смешанная задача для обобщенного уравнения Кавахары, описывающего длинные нелинейные волны в неоднородных средах со слабой дисперсией. Исследованы вопросы существования и единственности обобщенных решений в некоторых весовых пространствах Соболева.

Библиография: 19 названий.

В настоящей работе рассматривается в полуполосе $\Pi_T^+ = (0, T) \times \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, смешанная задача в нелокальной постановке (T – любое положительное число) для уравнения

$$u_t - \partial_x^5 u + b \partial_x^3 u + g(u)u_x + g_1(t, x)u_x + g_2(t, x)u = f(t, x) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \geq 0, \quad u(t, 0) = \mu(t), \quad u_x(t, 0) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Предполагается, что b – вещественная постоянная, а функция g имеет не более чем линейный рост по $u \rightarrow \pm\infty$.

Уравнение (1) является обобщением известного уравнения Кавахары

$$u_t - \partial_x^5 u + b \partial_x^3 u + au_x + uu_x = f(t, x), \quad (3)$$

описывающего длинные нелинейные волны в средах со слабой дисперсией (см., например, [1]–[3]). Уравнение (3) называют также уравнением Кортевега–де Фриза (КдФ) пятого порядка или сингулярно возмущенным уравнением КдФ ([4], [5]). При моделировании подобных волновых процессов в неоднородных средах возникают обобщения уравнения Кавахары типа (1).

Целью настоящей работы является изучение вопросов существования и единственности слабых решений задачи (1), (2), если начальная функция u_0 (возможно, с некоторым степенным весом на $+\infty$) принадлежит пространствам L_2 или H^2 . Аналогичные результаты в случае задачи Коши для уравнений типа (1) (и даже более общего вида) можно найти в [6] и [7]. Последние результаты о корректности задачи

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00253).

Коши для уравнения Кавахары установлены в [8] и [9]. Смешанные же задачи для этого уравнения практически не изучены. Здесь можно отметить только работу [10], где доказана глобальная корректность задачи (1), (2) в классах функций, бесконечно гладких и экспоненциально быстро убывающих при $x \rightarrow +\infty$, а также недавние статьи [11]–[13], где рассматривался случай нулевых краевых условий.

Отметим, что все результаты настоящей работы являются новыми и для самого уравнения Кавахары (3). Методика исследования частично аналогична работе [14], в которой смешанная задача в полуполосе Π_T^+ изучалась для обобщенного уравнения КдФ

$$u_t + \partial_x^3 u + g(u)u_x + g_1(t, x)u_x + g_2(t, x)u = f(t, x).$$

С современным состоянием теории смешанных задач для уравнения КдФ можно познакомиться, например, в [15] и [16].

В любой теории разрешимости смешанных задач важным является вопрос об оптимальности условий на граничные данные. Чтобы попытаться выработать соответствующий критерий, рассмотрим задачу Коши для линейризованного однородного уравнения Кавахары

$$v_t - \partial_x^5 v = 0, \quad v(0, x) = v_0(x).$$

Если $v_0 \in H^s(\mathbb{R})$ для некоторого $s \in \mathbb{R}$, то, как показано в [17], существует единственное решение этой задачи $v(t, x) \in C(\mathbb{R}^t; H^s(\mathbb{R}))$ и для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\|D_t^{2/5} v(\cdot, x)\|_{H^{s/5}(\mathbb{R}^t)} = \|D_t^{1/5} v_x(\cdot, x)\|_{H^{s/5}(\mathbb{R}^t)} = c(s)\|v_0\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Поэтому можно предположить, что условия типа $u_0 \in H^s$, $\mu \in H^{(s+2)/5}$, $\nu \in H^{(s+1)/5}$ являются естественными для рассматриваемой задачи (1), (2). В настоящей работе результаты о ее разрешимости получены именно при указанных естественных условиях для $s = 0$ и $s = 2$.

Глобальные априорные оценки решений в пространствах $L_2(\mathbb{R}_+)$ и $H^2(\mathbb{R}_+)$, установленные в работе, являются аналогами законов сохранения для уравнения Кавахары (3) (при $b = 0$, $f \equiv 0$):

$$\int_{\mathbb{R}} u^2 dx = \text{const}, \quad \int_{\mathbb{R}} \left(u_{xx}^2 - \frac{1}{3} u^3 \right) dx = \text{const}.$$

Для построенных решений также устанавливается эффект локального сглаживания, аналогичный уравнению КдФ.

Введем теперь некоторые обозначения. Далее, если не оговорено противное, будем считать, что I – некоторый интервал на $\mathbb{R}$ (ограниченный или неограниченный), k, m, j – целые неотрицательные числа, $p \in [1, +\infty]$, $s \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Символы $L_p(I)$, $W_p^k(I)$, $H^k(I) = W_2^k(I)$, $H^{-k}(I)$, $C_0^\infty(I)$, $H^s(I)$, $H_0^s(I)$ используются в общепринятом смысле. При этом положим $L_p = L_p(\mathbb{R})$, $W_p^k = W_p^k(\mathbb{R})$ и т.д., $L_{p,+} = L_p(\mathbb{R}_+)$, $W_{p,+}^k = W_p^k(\mathbb{R}_+)$ и т.д.

Через $C_b^k(\bar{I})$ обозначим пространство функций с производными до порядка k включительно, непрерывными и ограниченными в $\bar{I}$. Положим $C_b(\bar{I}) = C_b^0(\bar{I})$, $C_{b,+} = C_b(\mathbb{R}_+)$.

Введем следующие весовые пространства. Для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$ положим

$$L_{p,+}^\alpha = \{f(x) : (1+x)^\alpha f \in L_{p,+}\},$$

$$H_+^{k,\alpha} = \{f(x) : f^{(j)} \in L_{2,+}^\alpha, j = 0, \dots, k\},$$

$$H_+^{-k,\alpha} = \left\{ f(x) = \sum_{j=0}^k f_j^{(j)}(x) : f_j \in L_{2,+}^\alpha, j = 0, \dots, k \right\}.$$

Если B – некоторое банахово пространство, то символом $C_w(\bar{I}; B)$ будем обозначать пространство слабо непрерывных отображений отрезка $\bar{I}$ в B . Заметим, что если I ограничен, то $C_w(\bar{I}; B) \subset L_\infty(I; B)$ (см. [18; гл. 4, теорема 1.9]; символы $L_p(I; B)$ используются в общепринятом смысле). Через $C_b(\bar{I}; B)$ будем обозначать пространство непрерывных ограниченных отображений $\bar{I}$ в B .

Будем также использовать специальные пространства, введенные в [14], а именно, для $a > 0$ положим

$$S_{\text{exp},+}^a = \{f(x) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+) : e^{ax} f^{(j)} \in L_{2,+} \forall j\},$$

$$C^\infty([0, T]; S_{\text{exp},+}^a) = \{f(t, x) \in C^\infty(\overline{\Pi}_T^+) : e^{ax} \partial_t^m \partial_x^j f \in L_2(\Pi_T^+) \forall m, j\}.$$

Положим

$$\lambda^+(f; T) = \sup_{m \geq 0} \int_0^T \int_m^{m+1} f^2(t, x) dx dt.$$

Решение рассматриваемых задач будем строить в специальных пространствах $X_{T,\alpha}^k$ при $k = 0$ и $k = 2$, а именно, если $\alpha = 0$, то

$$X_{T,0}^k = \{u(t, x) \in C_w([0, T]; H_+^{k,0}) : \lambda^+(\partial_x^{k+2} u; T) < \infty\},$$

а если $\alpha > 0$, то

$$X_{T,\alpha}^k = \{u(t, x) \in C_w([0, T]; H_+^{k,\alpha}) : \lambda^+(\partial_x^{k+2} u; T) < \infty, \partial_x^{k+2} u \in L_2(0, T; H_+^{k,\alpha-1/2})\}.$$

Для произвольной функции $g(u)$ символом $g^*(u)$ обозначим ее первообразную такую, что $g^*(0) = 0$.

Символы $\hat{f} \equiv \mathcal{F}[f]$ и $\mathcal{F}^{-1}[f]$ используются, соответственно, для обозначения прямого и обратного преобразований Фурье, понимаемых как операции в L_2 . В частности, для $f \in \mathcal{S}$ (пространство Шварца быстро убывающих функций)

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx, \quad \mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(\xi) d\xi.$$

Введем также следующие специальные весовые функции $\rho_\alpha(x) \in C^5(\mathbb{R})$ для $\alpha \geq 0$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\rho_\alpha(x) = e^{\varepsilon x}$ при $x \leq -1$, а при $x \geq 0$

$$\rho_\alpha(x) = \begin{cases} 2 - (1+x)^{-\varepsilon}, & \text{если } \alpha = 0, \\ (1+x)^{2\alpha}, & \text{если } \alpha > 0, \end{cases}$$

и доопределим $\rho_\alpha(x)$ при $x \in (-1, 0)$ так, чтобы $\rho_\alpha(x) > 0$, $\rho'_\alpha(x) > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Через $\eta(x)$ обозначим некоторую неубывающую функцию из $C^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $\eta(x) = 0$ при $x \leq 0$, $\eta(x) = 1$ при $x \geq 1$. Символом χ_a будем обозначать характеристическую функцию интервала $(-a, a)$.

Будем использовать следующее интерполяционное неравенство, доказанное в [10]. Пусть $\psi_j(x)$, $j = 1$ и 2 , – суть две положительные функции из пространства $C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$ такие, что $\psi_1(x) \leq c_0\psi_2(x)$, $|\psi'_j(x)| \leq c_0\psi_j(x)$ для любого $x \geq 0$ и некоторой константы c_0 . Пусть также $k = 1$ или $k = 2$, $p \in [2, +\infty]$, $0 \leq m < k$. Тогда существует такая константа $c = c(k, m, p, c_0)$, что

$$\|f^{(m)}\psi_1^s\psi_2^{1/2-s}\|_{L_{p,+}} \leq c\|f^{(k)}\psi_1^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{2s}\|f\psi_2^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{1-2s} + c\|f\psi_2^{1/2}\|_{L_{2,+}}, \quad (4)$$

где

$$s = s(p, m, k) = \frac{2m+1}{4k} - \frac{1}{2kp}.$$

В частности, в силу вида функций ρ_α из неравенства (4) следует, что для $m = 0$ или 1 при $\alpha \geq 0$

$$|f^{(m)}(0)| \leq c(m, \alpha)\|f''(\rho'_\alpha)^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{(2m+1)/4}\|f\rho_\alpha^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{(3-2m)/4} + c(m, \alpha)\|f\rho_\alpha^{1/2}\|_{L_{2,+}}. \quad (5)$$

Прежде чем переходить к самой задаче (1), (2), построим при $x > 0$ специальное решение линейного уравнения

$$v_t - \partial_x^5 v + b\partial_x^3 v = 0, \quad (6)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$v(t, 0) = \mu(t), \quad v_x(t, 0) = \nu(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$r^5 - br^3 - i\lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (7)$$

Если $b = 0$, то корни этого уравнения тривиально находятся и среди них есть ровно два корня $r_0(\lambda)$ и $r_1(\lambda)$ с отрицательной действительной частью. Тогда для произвольного b существует такое $\lambda_0(b) > 0$, что при $|\lambda| \geq \lambda_0$ также существуют два корня $r_0(\lambda)$ и $r_1(\lambda)$ с аналогичными свойствами, а именно (нумерацию корней можно выбрать так, чтобы они были непрерывны по λ и $r_k(-\lambda) = r_k(\lambda)$, $k = 0$ и 1), для некоторых констант $\tilde{c} > 0$ и $\tilde{c}_1 > 0$ при $|\lambda| \geq \lambda_0$, $k = 0$ и 1

$$\operatorname{Re} r_k(\lambda) \leq -\tilde{c}|\lambda|^{1/5}, \quad |r_k(\lambda)| \leq \tilde{c}_1|\lambda|^{1/5}, \quad |r_0(\lambda) - r_1(\lambda)| \geq \tilde{c}|\lambda|^{1/5}. \quad (8)$$

В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что $\lambda_0(b) \geq 1$ для любого b .

ЛЕММА 1. Пусть $\mu \in H^{(s+2)/5}$, $\nu \in H^{(s+1)/5}$ для некоторого $s \geq 0$, причем $\hat{\mu}(\lambda) = \hat{\nu}(\lambda) = 0$ при $|\lambda| < \lambda_0(b)$. Положим

$$\begin{aligned} J(t, x; \mu, \nu) \equiv & \mathcal{F}_t^{-1} \left[\frac{r_1(\lambda)e^{r_0(\lambda)x} - r_0(\lambda)e^{r_1(\lambda)x}}{r_1(\lambda) - r_0(\lambda)} \hat{\mu}(\lambda) \right] (t) \\ & + \mathcal{F}_t^{-1} \left[\frac{e^{r_1(\lambda)x} - e^{r_0(\lambda)x}}{r_1(\lambda) - r_0(\lambda)} \hat{\nu}(\lambda) \right] (t). \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда функция J бесконечно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (6) при $x > 0$,

$$\begin{aligned} \|J\|_{C_b(\mathbb{R}^t; H^s_+)} + \sum_{j=0}^{[s+2]} \|\partial_x^j J\|_{C_b(\overline{\mathbb{R}_+^x}; H^{(s-j+2)/5})} + \sum_{j=0}^{[s+1]} \|\partial_x^j J\|_{L_2(\mathbb{R}^t; C_{b,+})} \\ \leq c(s, b)(\|\mu\|_{H^{(s+2)/5}} + \|\nu\|_{H^{(s+1)/5}}) \end{aligned} \quad (10)$$

(причем $J(\cdot, 0+0) \equiv \mu$, $J_x(\cdot, 0+0) \equiv \nu$); кроме того, для некоторой константы $a_0 > 0$ при любых $a \in [0, a_0)$, $x_0 > 0$ и целых $m, j \geq 0$

$$\sup_{x \geq x_0, t \in \mathbb{R}} e^{ax} |\partial_t^m \partial_x^j J(t, x)| \leq c(a, x_0, m, j, b) (\|\mu\|_{L_2} + \|\nu\|_{L_2}). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего воспользуемся следующим неравенством, установленным в [19]: если некоторая непрерывная функция $\gamma(\lambda)$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re} \gamma(\xi) \leq -\varepsilon |\xi|$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\xi \in \mathbb{R}$, то

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{\gamma(\xi)x} f(\xi) d\xi \right\|_{L_{2,+}^x} \leq c(\varepsilon) \|f\|_{L_2}.$$

Тогда для любого целого $j \geq 0$, сделав замену $\lambda = \xi^5$, выводим, используя (8) и (9), что равномерно по $t \in \mathbb{R}$

$$\|\partial_x^j J\|_{L_2} \leq c(\|\xi^{j+4} \hat{\mu}(\xi^5)\|_{L_2} + \|\xi^{j+3} \hat{\nu}(\xi^5)\|_{L_2}) \leq c_1(\|\mu\|_{H^{(j+2)/5}} + \|\nu\|_{H^{(j+1)/5}}),$$

откуда, применяя интерполяцию, получаем требуемую оценку для первого слагаемого из левой части (10).

Далее, если рассмотреть интеграл вида

$$\mathcal{J}(t, x) \equiv \mathcal{F}_t^{-1}[e^{r_k(\lambda)x} f(\lambda)](t), \quad k = 0 \text{ или } 1,$$

то в силу равенства Парсеваля очевидно, что

$$\|\mathcal{J}\|_{L_2(\mathbb{R}^t \times \mathbb{R}_+^x)} \leq c \|f(\lambda) r_k^{-1/2}(\lambda)\|_{L_2},$$

и тогда сначала для целых $s \geq 0$, а потом с помощью интерполяции для произвольных $s \geq 0$ находим, что

$$\|\mathcal{J}\|_{L_2(\mathbb{R}^t; H_+^s)} \leq c(\|\mu\|_{H^{(2s-1)/10}} + \|\nu\|_{H^{(2s-3)/10}}),$$

откуда, используя известное вложение $H^{j+1/2+\varepsilon}(I) \subset C_b^j(\bar{I})$, выводим, что при $j \leq s+1$, $\varepsilon > 0$

$$\|\partial_x^j J\|_{L_2(\mathbb{R}^t; C_{b,+})} \leq c(\varepsilon)(\|\mu\|_{H^{(s+1+\varepsilon)/5}} + \|\nu\|_{H^{(s+\varepsilon)/5}}).$$

Остальные утверждения леммы тривиально следуют из равенства (9) и свойств корней r_k (в неравенстве (11) можно взять $a_0 = \tilde{c}\lambda_0^{1/5}$).

Вернемся к исходной нелинейной задаче и дадим определение слабого (обобщенного) решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u(t, x) \in L_\infty(0, T; L_{2,+})$ называется *слабым решением задачи* (1), (2), если для любой функции $\phi(t, x)$ такой, что $\phi \in L_2(0, T; H_+^5)$, $\phi_t \in L_2(0, T; L_{2,+})$, $\phi|_{t=T} = 0$, $\phi|_{x=0} = \phi_x|_{x=0} = \phi_{xx}|_{x=0} = 0$, выполняется интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \iint_{\Pi_T^+} [u(\phi_t - \partial_x^5 \phi + b \partial_x^3 \phi + (g_1 \phi)_x - g_2 \phi) + g^*(u) \phi_x + f \phi] dx dt \\ & + \int_{\mathbb{R}_+} u_0(x) \phi(0, x) dx + \int_0^T (\nu(t) \partial_x^3 \phi(t, 0) - \mu(t) \partial_x^4 \phi(t, 0)) dt = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

(предполагается, что условия на данные задачи обеспечивают существование всех интегралов в левой части (12)).

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что для некоторых $T > 0$ и $\alpha \geq 0$*

$$g \in C^1(\mathbb{R}), \quad g(0) = 0, \quad \exists c_0 \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad |g'(u)| \leq c_0, \quad (13)$$

$$g_1 \in L_2(0, T; W_{\infty,+}^1), \quad g_2 \in L_1(0, T; L_{\infty,+}), \quad (14)$$

$$u_0 \in L_{2,+}^\alpha, \quad f \in L_1(0, T; L_{2,+}^\alpha), \quad (15)$$

$$\mu \in H^{2/5}(0, T), \quad \nu \in H^{1/5}(0, T). \quad (16)$$

Тогда существует слабое решение $u(t, x)$ задачи (1), (2) из пространства $X_{T,\alpha}^0$. Если $\alpha \geq 3/8$, то решение из этого пространства единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Слабое решение рассматриваемой задачи будем строить как предел решений “гладких” задач такого же типа. Предположим сначала, что имеется решение задачи (1), (2) $u(t, x) \in C^\infty([0, T]; S_{\text{exp},+}^a)$. Установим оценки подобного решения, зависящие только от T , α , b , c_0 и норм функций g_1 , g_2 , u_0 , f , μ , ν в пространствах из условия теоремы.

Пусть $\lambda_0 \geq 1$ таково, что при $|\lambda| \geq \lambda_0$ уравнение (7) имеет два корня, для которых выполнены условия (8). Положим

$$\begin{aligned} \mu_0(t) &\equiv \mathcal{F}_t^{-1}[\widehat{\mu}(\lambda)\chi_{\lambda_0}(\lambda)](t), & \nu_0(t) &\equiv \mathcal{F}_t^{-1}[\widehat{\nu}(\lambda)\chi_{\lambda_0}(\lambda)](t), \\ \mu_1(t) &\equiv \mu(t) - \mu_0(t), & \nu_1(t) &\equiv \nu(t) - \nu_0(t), \\ \varphi_0(t, x) &\equiv \mu_0(t)\eta(1-x) + \nu_0(t)x\eta(1-x), & \varphi_1(t, x) &\equiv J(t, x; \mu_1, \nu_1), \\ \varphi(t, x) &\equiv \varphi_0(t, x) + \varphi_1(t, x), & U_0(x) &\equiv u_0(x) - \varphi(0, x), \\ F(t, x) &\equiv (f - \varphi_{0t} + \partial_x^5 \varphi_0 - b\partial_x^3 \varphi_0 - g_1\varphi_x - g_2\varphi)(t, x). \end{aligned}$$

Тогда функция

$$U(t, x) \equiv u(t, x) - \varphi(t, x) \quad (17)$$

является в Π_T^+ решением задачи

$$U_t - \partial_x^5 U + b\partial_x^3 U + g(u)u_x + g_1(t, x)U_x + g_2(t, x)U = F, \quad (18)$$

$$U|_{t=0} = U_0, \quad U|_{x=0} = U_x|_{x=0} = 0. \quad (19)$$

В силу леммы 1

$$\varphi \in X_{T,\beta}^0 \quad \forall \beta \geq 0, \quad F \in L_1(0, T; L_{2,+}^\alpha), \quad U_0 \in L_{2,+}^\alpha \quad (20)$$

с соответствующими оценками норм в этих пространствах.

Пусть $\psi(x)$ – некоторая достаточно гладкая положительная неубывающая функция при $x \geq 0$. Умножив равенство (18) на $2U(t, x)\psi(x)$ и проинтегрировав по $\mathbb{R}_+$, получим, что

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} U^2 \psi \, dx + U_{xx}^2 \psi \Big|_{x=0} + 5 \int_{\mathbb{R}_+} U_{xx}^2 \psi' \, dx + \int_{\mathbb{R}_+} (3b\psi' - 5\psi''') U_x^2 \, dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+} (\psi^{(5)} - b\psi''') U^2 \, dx + 2 \int_{\mathbb{R}_+} g(u)u_x U \psi \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} ((g_1\psi)_x - 2g_2\psi) U^2 \, dx + 2 \int_{\mathbb{R}_+} F U \psi \, dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Положим сначала $\psi(x) \equiv 1$. Поскольку

$$g(u)u_x U = \left(\int_0^U g(\vartheta + \varphi) \vartheta d\vartheta \right)_x - \varphi_x \int_0^U g'(\vartheta + \varphi) \vartheta d\vartheta + \varphi_x g(u)U, \quad (22)$$

в силу (13) получаем, что

$$\left| \int_{\mathbb{R}_+} g(u)u_x U dx \right| \leq c \sup_{x \geq 0} |\varphi_x| \int_{\mathbb{R}_+} (U^2 + \varphi^2) dx,$$

и тогда, опять используя лемму 1, находим из (21), что

$$\|u\|_{C([0,T];L_{2,+})} \leq c. \quad (23)$$

Пусть теперь $\psi(x) \equiv \rho_\alpha(x - x_0)$ для любого $x_0 \geq 0$; тогда, опять применяя равенство (22), находим, что с учетом уже установленной оценки (23) и интерполяционного неравенства (4)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}_+} g(u)u_x U \psi dx \right| &\leq c \sup_{x \geq 0} |U(\psi')^{1/2}| \left(\int_{\mathbb{R}_+} U^2 \psi dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}_+} (U^2 + \varphi^2) dx \right)^{1/2} \\ &\quad + c \sup_{x \geq 0} |\varphi_x| \int_{\mathbb{R}_+} (U^2 + \varphi^2) \psi dx \\ &\leq \delta \int_{\mathbb{R}_+} U_{xx}^2 \psi' dx + c(\delta) \int_{\mathbb{R}_+} U^2 \psi dx + c_1 \sup_{x \geq 0} |\varphi_x| \left(\int_{\mathbb{R}_+} U^2 \psi dx + 1 \right), \end{aligned}$$

где $\delta > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым. Таким образом, из равенства (21) следует, что

$$\|u\|_{X_{T,\alpha}^0} \leq c. \quad (24)$$

Теперь для произвольного $h \in (0, 1)$ положим

$$u_{0h}(x) \equiv u_0^h(x) \eta\left(\frac{x}{h}\right) \eta(1 + |\ln h| - x), \quad (25)$$

$$\mu_h(t) \equiv \mu^h(t) \eta\left(\frac{t}{h}\right), \quad \nu_h(t) \equiv \nu^h(t) \eta\left(\frac{t}{h}\right), \quad (26)$$

$$f_h(t, x) \equiv f^h(t, x) \eta\left(\frac{t}{h}\right) \eta(1 + |\ln h| - x),$$

$$g_h(u) \equiv g^h(u) - g^h(0), \quad g_{kh}(t, x) \equiv g_k^h(t, x) \eta\left(\frac{t}{h}\right), \quad k = 1 \text{ и } 2,$$

(символ f^h означает среднюю функцию для функции f с параметром усреднения h) и рассмотрим соответствующую задачу типа (1), (2), где $u_0, \mu, \nu, f, g, g_1, g_2$ заменены на $u_{0h}, \mu_h, \nu_h, f_h, g_h, g_{1h}, g_{2h}$. Согласно [10] существует решение такой задачи $u_h(t, x)$ из пространства $C^\infty([0, T]; S_{\text{exp},+}^a)$ для любого $a > 0$. Используя оценку (24), находим, что функции u_h равномерно по h ограничены в пространстве $X_{T,\alpha}^0$. Отсюда, в частности, следует, что в силу самого уравнения (1) (для функций u_h) при $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$

$$\|u_h(t_2, \cdot) - u_h(t_1, \cdot)\|_{H_+^{-5}} \leq \omega(t_2 - t_1), \quad (27)$$

где $\omega(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$ и ω не зависит от h . Эти свойства функций u_h позволяют стандартным методом (см., например, [14]) перейти к пределу при $h \rightarrow +0$ и построить искомое решение задачи (1), (2).

Перейдем к вопросу единственности слабых решений. Прежде всего заметим, что из неравенства (4) следует, что для функции $u \in X_{T,\alpha}^0$ при $\alpha \geq 1/4$ справедливы свойства

$$u_x \in L_2(0, T; L_{2,+}^{\alpha-1/4}), \quad u \in L_2(0, T; L_{\infty,+}). \quad (28)$$

Пусть $u(t, x)$ и $\tilde{u}(t, x)$ суть два решения одной задачи (1), (2) из пространства $X_{T,\alpha}^0$ при $\alpha \geq 3/8$. Положим

$$v(t, x) \equiv u(t, x) - \tilde{u}(t, x);$$

тогда функция v является в Π_T^+ решением линейной задачи

$$v_t - \partial_x^5 v + b \partial_x^3 v = -(g(u)u_x - g(\tilde{u})\tilde{u}_x) - g_1 v_x - g_2 v \equiv G(t, x), \quad (29)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v|_{x=0} = v_x|_{x=0} = 0, \quad (30)$$

где в силу (13), (14) и (28) выполнено $G \in L_1(0, T; L_{2,+}^{\alpha-1/4})$. Умножив равенство (29) на $2v(t, x)\psi(x)$, где $\psi \equiv \rho_{\alpha-1/4}$, и проинтегрировав, получим аналогично (21), что

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} v^2(t, x) \psi dx + 5 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{xx}^2 \psi' dx d\tau \\ & \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (5\psi''' - 3b\psi') v_x^2 dx d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (b\psi''' - \psi^{(5)}) v^2 dx d\tau + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G v \psi dx d\tau \end{aligned} \quad (31)$$

(на самом деле, эту выкладку надо сначала провести в случае гладкой функции G , например, для $G_h(t, x) \equiv G^h(t, x)\eta(t/h)\eta(1 + |\ln h| - x)$ и соответствующего гладкого решения $v_h(t, x) \in C^\infty([0, T]; S_{\text{exp},+}^a)$, а потом перейти к пределу при $h \rightarrow +0$, что не вызывает затруднений в линейном случае). В силу неравенства (4) сумма первых двух интегралов в правой части (31) не превосходит

$$\delta \int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{xx}^2 \psi' dx d\tau + c(\delta, \alpha) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} v^2 \psi dx d\tau,$$

где $\delta > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым. Далее, опять применяя неравенство (4) (для $\psi_1 \equiv \psi'$, $\psi_2 \equiv \psi$), находим, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (g(u)u_x - g(\tilde{u})\tilde{u}_x) v \psi dx d\tau \right| \\ & = \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (g^*(u) - g^*(\tilde{u})) (v\psi)_x dx d\tau \right| \leq c \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (|u| + |\tilde{u}|) (|vv_x| + v^2) \psi dx d\tau \\ & \leq c_1 \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_{\mathbb{R}} (u^2 + \tilde{u}^2) \left(\frac{\psi}{\psi'} \right)^{3/4} dx \right)^{1/2} \\ & \quad \times \int_0^t \left[\sup_{x \geq 0} (|v_x| + |v|) (\psi')^{3/8} \psi^{1/8} \right] \left(\int_{\mathbb{R}} v^2 \psi dx \right)^{1/2} d\tau \\ & \leq c_2 \| |u| + |\tilde{u}| \|_{L_\infty(0, T; L_{2,+}^{3/8})} \int_0^t \left[\left(\int_{\mathbb{R}} v_{xx}^2 \psi' dx \right)^{3/8} \left(\int_{\mathbb{R}} v^2 \psi dx \right)^{5/8} + \int_{\mathbb{R}} v^2 \psi dx \right] d\tau \end{aligned}$$

$$\leq \delta \int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{xx}^2 \psi' dx d\tau + c(\delta) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} v^2 \psi dx d\tau, \quad (32)$$

где $\delta > 0$ может быть выбрано сколько угодно малым. Таким образом, из неравенства (31) вытекает, что

$$\int_{\mathbb{R}} v^2(t, x) \psi dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} v_{xx}^2 \psi' dx d\tau \leq \int_0^t \gamma(\tau) \int_{\mathbb{R}} v^2 \psi dx d\tau, \quad (33)$$

где $\gamma \in L_1(0, T)$ и, следовательно, $v \equiv 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Методом, аналогичным доказательству единственности, устанавливается непрерывная зависимость решений от граничных данных и правой части, а именно, при $\alpha \geq 3/8$

$$\|u - \tilde{u}\|_{X_{T,\alpha}^0} \leq c(\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L_{2,+}^\alpha} + \|\mu - \tilde{\mu}\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\nu - \tilde{\nu}\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|f - \tilde{f}\|_{L_1(0,T;L_{2,+}^\alpha)}) \quad (34)$$

(здесь $\tilde{u}$ – решение задачи (1), (2), в которой (u_0, μ, ν, f) заменены на $(\tilde{u}_0, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{f})$), где константа c зависит от T, b, α, c_0 , свойств функций g_1, g_2 и норм функций u и $\tilde{u}$ в пространстве $L_\infty(0, T; L_{2,+}^{3/8})$.

Действительно, от задачи для разности двух решений надо перейти к задаче с нулевыми краевыми условиями приемом, аналогичным (17), а далее провести выкладку, аналогичную (31), в которой выбрать

$$\psi(x) = \rho_{\alpha,r}(x) \equiv \begin{cases} (1+x)^{2\alpha} & \text{при } 0 \leq x \leq r - \frac{1}{2}, \\ (1+2r)^{2\alpha} \sigma_\alpha\left(\frac{1+x}{1+2r}\right) & \text{при } r - \frac{1}{2} < x < 2r, \\ (1+2r)^{1/2} (1+x)^{2\alpha-1/2} & \text{при } x \geq 2r, \end{cases}$$

для произвольного $r \geq 1$, где $\sigma_\alpha(x)$ некоторая возрастающая функция из пространства $C^5[1/2, 1]$ такая, что $\sigma_\alpha^{(j)}(1/2) = (x^{2\alpha})^{(j)}(1/2)$, $\sigma_\alpha^{(j)}(1) = (x^{2\alpha-1/2})^{(j)}(1)$ при $j = 0, \dots, 5$. В итоге получится неравенство, аналогичное (33), в котором константы не будут зависеть от r , а в правую часть будут добавлены слагаемые из правой части (34), возведенные в квадраты. Перейдя в этом неравенстве к пределу при $r \rightarrow +\infty$ получим оценку (34) для $\alpha \geq 1/2$. В случае $3/8 \leq \alpha < 1/2$ для того, чтобы дополнительно оценить $\lambda^+(u - \tilde{u}; T)$, следует еще раз провести такие же выкладки для $\psi(x) \equiv \rho_{\alpha,r}(x - x_0)$, $x_0 \geq 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что для некоторых $T > 0$ и $\alpha \geq 0$*

$$\begin{aligned} g_1 &\in L_2(0, T; W_{\infty,+}^2), & g_2 &\in L_2(0, T; W_{\infty,+}^2), \\ u_0 &\in H_+^{2,\alpha}, & f &\in L_2(0, T; H_+^{2,\alpha}), \\ \mu &\in H^{4/5}(0, T), & \nu &\in H^{3/5}(0, T), \\ \mu(0) &= u_0(0), & \nu(0) &= u_0'(0) \end{aligned}$$

и выполнено условие (13). Тогда существует единственное слабое решение $u(t, x)$ задачи (1), (2) из пространства $X_{T,\alpha}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 1 сначала установим априорные оценки гладких решений. Для этого тем же самым способом перейдем к задаче (18), (19) для функции U , заданной формулой (17). Аналогично (20)

$$\varphi \in X_{T,\beta}^2 \quad \forall \beta \geq 0, \quad U_0 \in H_+^{2,\alpha}, \quad (35)$$

и если положить

$$F_1(t, x) \equiv -g_1(t, x)\varphi_x(t, x), \quad F_0(t, x) \equiv F(t, x) - F_1(t, x),$$

то

$$F_0 \in L_2(0, T; H_+^{2,\alpha}), \quad F_1 \in L_2(0, T; H_+^{1,\beta}) \quad \forall \beta \geq 0. \quad (36)$$

Положим $\psi(x) \equiv \rho_\alpha(x - x_0)$ для $x_0 \geq 0$. Умножив равенство (18) на $2(U_{xx}(t, x)\psi(x))_{xx}$ и проинтегрировав по $\mathbb{R}_+$, получим после простых, но утомительных выкладок, что

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} U_{xx}^2 \psi dx + 5 \int_{\mathbb{R}_+} (\partial_x^4 U)^2 \psi' dx + (\partial_x^4 U)^2 \psi \Big|_{x=0} + 2 \int_{\mathbb{R}_+} g(u) u_x \partial_x^4 U \psi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} (5\psi''' - 3b\psi') U_{xxx}^2 dx + \int_{\mathbb{R}_+} (b\psi''' - \psi^{(5)}) U_{xx}^2 dx \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}_+} g(u) u_x (4U_{xxx}\psi' + 2U_{xx}\psi'') dx - \int_{\mathbb{R}_+} (3g_{1x}\psi - g_1\psi' + 2g_2\psi) U_{xx}^2 dx \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}_+} (2g_{1xx}\psi + 4g_{2x}\psi) U_x U_{xx} dx - 2 \int_{\mathbb{R}_+} g_{2xx} U U_{xx} \psi dx \\ & \quad + 2 \int_{\mathbb{R}_+} F_1(U_{xx}\psi)_{xx} dx + 2 \int_{\mathbb{R}_+} F_{0xx} U_{xx} \psi dx - (4U_{xxx}\psi' + 2U_{xx}\psi'') \partial_x^4 U|_{x=0} \\ & \quad + (3\psi'' + b\psi) U_{xxx}^2|_{x=0} + 2U_{xx} U_{xxx} \psi'''|_{x=0} + (b\psi'' - \psi^{(4)}) U_{xx}^2|_{x=0} \\ & \quad - g_1 U_{xx}^2 \psi|_{x=0} - 2F_0(U_{xxx}\psi + U_{xx}\psi')|_{x=0} + 2F_{0x} U_{xx} \psi|_{x=0}. \end{aligned} \quad (37)$$

Далее, умножив (18) на $-2g^*(u(t, x))\psi(t, x)$ и проинтегрировав по $\mathbb{R}_+$, получим (используя также равенство $U_t = u_t - \varphi_{0t} - \partial_x^3 \varphi_1 + b\partial_x^3 \varphi_1$), что

$$\begin{aligned} & -2 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} (g^*)^*(u) \psi dx - 2 \int_{\mathbb{R}_+} g(u) u_x \partial_x^4 U \psi dx \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}_+} g^*(u) \varphi_{0t} \psi dx + 2 \int_{\mathbb{R}_+} g(u) (U_x + \varphi_x) (\partial_x^4 \varphi_1 - b\varphi_{1xx}) \psi dx \\ & \quad + 2 \int_{\mathbb{R}_+} g^*(u) (\partial_x^4 \varphi_1 - b\varphi_{1xx}) \psi' dx + 2 \int_{\mathbb{R}_+} g^*(u) \partial_x^4 U \psi' dx \\ & \quad - 2b \int_{\mathbb{R}_+} g(u) (U_x + \varphi_x) U_{xx} \psi dx - 2b \int_{\mathbb{R}_+} g^*(u) U_{xx} \psi' dx \\ & \quad + 2 \int_{\mathbb{R}_+} g_1 g^*(u) U_x \psi dx + 2 \int_{\mathbb{R}_+} g_2 g^*(u) U \psi dx - 2 \int_{\mathbb{R}_+} (gg^*)^*(u) \psi' dx \\ & \quad - 2 \int_{\mathbb{R}_+} F g^*(u) \psi dx + 2g^*(\mu) (\partial_x^4 \varphi_1 - b\varphi_{1xx}) \psi|_{x=0} + 2g^*(\mu) \partial_x^4 U \psi|_{x=0} \\ & \quad - 2bg^*(\mu) U_{xx} \psi|_{x=0} - 2(gg^*)^*(\mu) \psi|_{x=0}. \end{aligned} \quad (38)$$

Складывая равенства (37) и (38) и применяя интерполяционные неравенства (4) и (5), установленную в теореме 1 оценку (23), а также свойства (10), (11), (35) и (36), находим, что

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} (U_{xx}^2 - 2(g^*)^*(u))\psi \, dx + 5 \int_{\mathbb{R}_+} (\partial_x^4 U)^2 \psi' \, dx \\ & \leq \delta \int_{\mathbb{R}_+} (\partial_x^4 U)^2 \psi' \, dx + c(\delta)\gamma(t) \left(\int_{\mathbb{R}_+} U_{xx}^2 \psi \, dx + 1 \right), \end{aligned} \quad (39)$$

где $\|\gamma\|_{L_1(0,T)} \leq c$, а $\delta > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым. Поскольку в силу (24)

$$\left| \int_{\mathbb{R}_+} (g^*)^*(u)\psi \, dx \right| \leq c \int_{\mathbb{R}_+} |u|^3 \psi \, dx \leq c \sup_{x \geq 0} |u| \int_{\mathbb{R}_+} u^2 \psi \, dx \leq \delta \int_{\mathbb{R}_+} U_{xx}^2 \psi \, dx + c(\delta),$$

из неравенства (39) следует, что

$$\|u\|_{X_T^{2,\alpha}} \leq c. \quad (40)$$

Теперь приблизим данные задачи более гладкими, а именно, введем функции f_h , g_h , g_{1h} , g_{2h} по тем же формулам, что и в доказательстве теоремы 1, а вместо (25), (26) положим

$$\begin{aligned} u_{0h}(x) & \equiv u_0^h(x) \eta\left(\frac{x}{h}\right) \eta(1 + |\ln h| - x) + u_0(0) \left(1 - \eta\left(\frac{x}{h}\right)\right) + x u_0'(0) \left(1 - \eta\left(\frac{x}{h}\right)\right), \\ \mu_h(t) & \equiv \mu^h(t) \eta\left(\frac{t}{h}\right) + \mu(0) \left(1 - \eta\left(\frac{t}{h}\right)\right), \quad \nu_h(t) \equiv \nu^h(t) \eta\left(\frac{t}{h}\right) + \nu(0) \left(1 - \eta\left(\frac{t}{h}\right)\right) \end{aligned}$$

и аналогично теореме 1 рассмотрим решения $u_h(t, x) \in C^\infty([0, T]; S_{\text{exp},+}^a)$, $a > 0$, соответствующих гладких задач типа (1), (2). В силу неравенства (40) эти функции равномерно по h ограничены в пространстве $X_T^{2,\alpha}$. Используя также неравенство (27), которое, очевидно, справедливо и в рассматриваемом случае, предельным переходом при $h \rightarrow +0$ получаем искомое решение задачи (1), (2).

Единственность доказывается по той же схеме, что и в теореме 1. При этом нетрудно видеть, что функция G из равенства (29) принадлежит пространству $L_2(0, T; L_{2,+}^3)$ и равенство (31) можно получить для $\psi(x) \equiv \rho_\alpha(x)$. Поскольку в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (g(u)u_x - g(\tilde{u})\tilde{u}_x)v\psi \, dx \, d\tau \right| \\ & \leq c(\alpha) \sup_{(t,x) \in \Pi_T^+} (|u_x| + |\tilde{u}_x| + |u| + |\tilde{u}|) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} v^2 \psi \, dx \, d\tau, \end{aligned} \quad (41)$$

из неравенства (31), очевидно, следует, что $v \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В классе решений $X_{T,\alpha}^2$ при $\alpha \geq 0$ нетрудно установить непрерывную зависимость от граничных данных и правой части в слабом смысле, а именно, неравенство (34), где константа c зависит от норм функций u и $\tilde{u}$ в пространстве $L_\infty(0, T; W_{\infty,+}^1) \supset X_{T,0}^2$. Для этого надо провести выкладки, аналогичные замечанию 1 (при этом функцию $\rho_{\alpha,r}$ можно не вводить, а сразу использовать саму функцию ρ_α) и применить неравенство (41) вместо (32).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Т. Kawahara, “Oscillatory solitary waves in dispersive media”, *J. Phys. Soc. Japan*, **33**:1 (1972), 260–264.
- [2] А. В. Марченко, “О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом”, *ПММ*, **52**:2 (1988), 230–234.
- [3] А. Т. Ильичев, “О свойствах одного нелинейного эволюционного уравнения пятого порядка, описывающего волновые процессы в средах со слабой дисперсией”, *Современные математические проблемы механики и их приложения*, Тр. МИАН, **186**, Наука, М., 1989, 222–226.
- [4] Y. Pomeau, A. Ramani, B. Grammaticos, “Structural stability of the Korteweg–de Vries solitons under a singular perturbation”, *Phys. D*, **31**:1 (1988), 127–134.
- [5] J. P. Boyd, “Weakly non-local solitons for capillary-gravity waves: fifth-degree Korteweg–de Vries equation”, *Phys. D*, **48**:1 (1991), 129–146.
- [6] J.-C. Saut, “Sur quelques generalisations de l’equation de Korteweg–de Vries”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **58**:1 (1979), 21–61.
- [7] А. В. Фаминский, “Задача Коши для квазилинейных уравнений нечетного порядка”, *Матем. сб.*, **180**:9 (1989), 1183–1210.
- [8] S. Cui, S. Tao, “Strichartz estimates for dispersive equations and solvability of Cauchy problems of the Kawahara equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, **304**:2 (2005), 683–702.
- [9] S. Cui, D. Deng, S. Tao, “Global existence of solutions for the Cauchy problem of the Kawahara equation with L^2 initial data”, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **22**:5 (2006), 1457–1466.
- [10] К. Сангаре, “Смешанная задача в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары в пространстве бесконечно дифференцируемых экспоненциально убывающих функций”, *Вестн. РУДН. Сер. матем.*, **10**:1 (2003), 91–107.
- [11] N. A. Larkin, G. G. Doronin, “Kawahara equation in a quarter-plane and in a finite domain”, *Bol. Soc. Parana. Mat.* (3), **25**:1–2 (2007), 9–16.
- [12] G. G. Doronin, N. A. Larkin, “Kawahara equation in a bounded domain”, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **10**:4 (2008), 783–799.
- [13] N. A. Larkin, “Correct initial boundary value problems for dispersive equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **344**:2 (2008), 1079–1092.
- [14] А. В. Фаминский, “Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений”, *Тр. ММО*, **51** (1988), 54–94.
- [15] A. V. Faminskii, “An initial boundary-value problem in a half-strip for the Korteweg–de Vries equation in fractional-order Sobolev spaces”, *Comm. Partial Differential Equations*, **29**:11–12 (2004), 1653–1695.
- [16] A. V. Faminskii, “Global well-posedness of two initial-boundary-value problems for the Korteweg–de Vries equation”, *Differential Integral Equations*, **20**:6 (2007), 601–642.
- [17] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, “Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg–de Vries equation”, *J. Amer. Math. Soc.*, **4**:2 (1991), 323–347.
- [18] Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.
- [19] J. L. Bona, S. Sun, B.-Y. Zhang, “A non-homogeneous boundary-value problem for the Korteweg–de Vries equation in a quarter plane”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354**:2 (2002), 427–490.

К. Сангаре

Российский университет дружбы народов
E-mail: karim_sangare@mail.ru

Поступило

02.11.2007

А. В. Фаминский

Российский университет дружбы народов
E-mail: andrei_faminskii@mail.ru