Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Матвеев, Базисы в пространствах Соболева на ограниченных областях с липшицевой границей, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 3, 408–417

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm432>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:46:14

УДК 517.518.34

БАЗИСЫ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА НА ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ С ЛИПШИЦЕВОЙ ГРАНИЦЕЙ

О. В. Матвеев

В пространстве Соболева $W_p^k(\Omega)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, для произвольно заданного $m \in \mathbb{N}$ построен базис такой, что погрешность приближения функции $f \in W_p^k(\Omega)$ N -й частичной суммой ее разложения по этому базису оценивается через модуль гладкости $\omega_m(D^k f, N^{-1/n})_{L_p(\Omega)}$ порядка m .

Библиография: 10 названий.

Базисы в пространствах Соболева $W_p^k(\Omega)$, где Ω – область в $\mathbb{R}^n$, изучались в работах З. Чесельского, Ж. Домсты, С. Шонфилда, Ю. Н. Субботина, С. Ропелы, Т. Фигеля, И. Мейера, О. В. Матвеева, И. Я. Новикова и др. Остается неизвестным, верно ли, что для любых заданных Ω , $k (= 0, 1, \dots)$, $p \in [1, +\infty)$ в $W_p^k(\Omega)$ существует базис. Чесельский и Фигель [1], [2] построили базисы в $W_p^k(\Omega)$ фактически в случае, когда Ω – ограниченная область с границей гладкости C^k (а также для некоторых областей Ω , граница которых состоит из конечного числа частей гладкости C^k). Базисы в $W_p^k(\Omega)$ при условии, что $W_p^k(\Omega)$ вложено в $C(\Omega)$ и Ω – ограниченная область с липшицевой границей, были найдены Матвеевым [3].

В ряде работ построены базисы, обладающие свойством

$$\sum_{j=0}^k \left\| D^j \left(f - \sum_{i=1}^N \lambda_i u_i \right) \right\|_{L_p(\Omega)} N^{(k-j)/n} = O(\omega_m(D^k f, N^{-1/n})_{L_p(\Omega)}), \quad N \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i u_i$ – разложение функции $f \in W_p^k(\Omega)$ по базису $\{u_i\}$, ω_m – модуль гладкости порядка m . Вопрос о существовании для любого m базиса в пространстве $C[0, 2\pi]$ непрерывных 2π -периодических функций со свойством (1), где $n = 1$, $k = 0$, $p = \infty$ (поставленный П. Л. Ульяновым), был решен Субботиным, указавшим такие базисы [4]. Базисы в $W_p^k(\Omega)$, обладающие свойством (1) для произвольно заданного m , построены Чесельским, Фигелем [1], [2] и Матвеевым [3], [5] при указанных выше ограничениях на Ω , k , p . (Условие $\partial\Omega \in C^k$ является принципиальным для конструкции работ [1], [2], в которых сначала, с помощью кусочно-полиномиальных функций, базисы строятся для $\Omega = (0, 1)^n$, а затем, с помощью разбиения Ω на подобласти Ω_i и диффеоморфизмов $\Omega_i \rightarrow (0, 1)^n$, для более общих областей Ω . В [3], [5] результаты по базисам

Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ, грант № Е00-1.0-184, а также при поддержке Фонда содействия отечественной науке.

получаются как следствия оценок погрешности приближения интерполяционными полигармоническими сплайнами, которые (сплайны) строятся сразу на областях Ω произвольной конфигурации.)

Отметим, что базисы $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ могут быть построены с помощью теории всплесков (см., например, [6]).

Упомянем также работу [7], в которой строится “многоразрешающий анализ” (multiresolution analysis) для некоторого достаточно широкого класса ограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

В настоящей статье для любого пространства Соболева $W_p^k(\Omega)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, и произвольного $m \in \mathbb{N}$ строится базис, обладающий свойством (1); можно также потребовать, чтобы элементы базиса имели непрерывные производные заданного порядка l . При этом конструкция, данная в предыдущих работах автора [3], [5], усовершенствована так, что удастся снять требование вложения $W_p^k(\Omega)$ в $C(\Omega)$.

В работе приняты следующие обозначения: $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ – множества натуральных и целых чисел соответственно, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$; $|\alpha|_1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$; $\mathcal{P}_s$ – множество полиномов от n переменных степени $\leq s$ по совокупности переменных, где $s \in \mathbb{Z}_+$; $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$, где $a \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$; $\text{diam } G = \sup\{|x - y| : x, y \in G\}$, где G – непустое подмножество $\mathbb{R}^n$; $W_p^k(G)$ – пространство (классов) функций $g: G \rightarrow \mathbb{R}$, у которых все обобщенные производные порядка $\leq k$ принадлежат $L_p(G)$, а при $p = \infty$, кроме того, равномерно непрерывны на G , с нормой

$$\|g\|_{W_p^k(G)} = \max_{|\alpha|_1 \leq k} \|D^\alpha g\|_{L_p(G)},$$

где G – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$, $D^\alpha g$ – частная производная функции g ;

$$\|D^k g\|_{L_p(G)} = \left(\sum_{|\alpha|_1=k} \|D^\alpha g\|_{L_p(G)}^2 \right)^{1/2}, \quad g \in W_p^k(G),$$

$$(g_1, g_2)_{k,G} = \int_G \sum_{|\alpha|_1=k} D^\alpha g_1 D^\alpha g_2 \, dx, \quad g_1, g_2 \in W_2^k(G),$$

$$\omega_m(g, \delta)_{L_p(G)} = \sup_{|a| \leq \delta} \left\| \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} g(x + ia) \right\|_{L_p(G_m(a))}, \quad g \in L_p(G),$$

$$\omega_m(D^k g, \delta)_{L_p(G)} = \max_{|\alpha|_1=k} \omega_m(D^\alpha g, \delta)_{L_p(G)}, \quad g \in W_p^k(G),$$

где $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $G_m(a)$ – множество таких $x \in \mathbb{R}^n$, что отрезок $[x, x + ma]$ содержится в G ; $J_m = \frac{1}{2m} \{a \in \mathbb{Z}_+^n : |a|_1 < m\}$; $P_m(g, y, \cdot)$ – полином из $\mathcal{P}_{m-1}$, интерполирующий функцию g на множестве $y + J_m$; K_{xy}^m – выпуклая оболочка множества $\{x\} \cup (y + J_m)$, $\Sigma_m(G, \delta)$ – множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ таких, что $K_{xy}^m \subset G \cap B(x, \delta)$,

$$\tilde{\omega}_m(g, \delta)_{p,G} = \|g(x) - P_m(g, y, x)\|_{L_p(\Sigma_m(G, \delta))}, \quad g \in L_p(G),$$

$$\tilde{\omega}_m(D^k g, \delta)_{p,G} = \max_{|\alpha|_1=k} \tilde{\omega}_m(D^\alpha g, \delta)_{p,G}, \quad g \in W_p^k(G),$$

где $m \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Обозначения $\|g\|_{W_p^k(G)}$ и $\|D^k g\|_{L_p(G)}$ мы будем использовать также в случае, когда G – измеримое подмножество некоторого открытого множества, на котором определена функция g .

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$, $l, m \in \mathbb{N}$, $l \geq k$ и $t = \max\{k + m, l + n\}$. Через Ω ниже обозначается ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей. Последнее означает (при $n > 1$), что для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ существуют движение пространства $\Gamma_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и функция $\varphi_x: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $|\varphi_x(y_1) - \varphi_x(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ для любых $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $B(x, \varepsilon) \cap \Omega = B(x, \varepsilon) \cap \Gamma_x(\Lambda_x)$, где $\Lambda_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^n : y \in \mathbb{R}^{n-1}, z \in \mathbb{R}, z > \varphi_x(y)\}$, а L и $\varepsilon > 0$ – некоторые числа, не зависящие от x . (Области с липшицевой границей рассматривались, например, в [8, гл. 6, § 3], где для них употребляется название “область с минимально гладкой границей” ввиду того, что условие липшицевости границы по существу нельзя ослабить в теореме продолжения для соболевских классов. Кроме того, липшицевость границы области равносильна “сильному условию конуса” в смысле [9, § 8].)

Обозначим через S_i , $i \in \mathbb{N}$, множество кубов вида $2^{-i}(x + [0, 1)^n)$, где $x \in \mathbb{Z}^n$, которые целиком содержатся в Ω , и положим $S_0 = \emptyset$. Пусть $\mathcal{Q}(F)$ – множество кубов из S_{i+1} , содержащихся в $F \in S_i$, $\mathcal{Q}'(F)$ – множество, получающееся из $\mathcal{Q}(F)$ удалением какого-либо одного элемента, D_i – множество кубов из S_{i+1} , не пересекающих $\bigcup_{F \in S_i} F$, $S'_0 = S_1$ и при $i \in \mathbb{N}$

$$S'_i = \left(\bigcup_{F \in S_i} \mathcal{Q}'(F) \right) \cup D_i.$$

Представим множество $(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_+} S'_i)$ в виде последовательности $\{G_1, G_2, \dots\}$ так, чтобы сначала шли элементы S'_0 , затем – элементы S'_1 и т.д. Далее, зафиксируем какое-либо $N \in \mathbb{N}$. Пусть $G_N \in S_c$, e – наименьшее $j \in \mathbb{N}$, для которого $G_j \in S_c$, $G = \bigcup_{j=e}^N G_j$, и $F_1, \dots, F_q$ – все кубы из S_{c-1} , пересекающиеся с G . Обозначим через V совокупность, состоящую из следующих множеств: кубы $G_e, \dots, G_N$; все кубы из S_{c-1} , не пересекающиеся с G ; те из множества $F_1 \setminus G, \dots, F_q \setminus G$, которые непусты. Пусть d – наибольший диаметр множеств из V .

ЛЕММА 1. 1) Функционалы $g \rightarrow \int_{G_i} g dx$, $i = 1, \dots, N$, определенные на $W_2^t(\Omega)$, линейно независимы.

2) Множества, входящие в V , попарно не пересекаются, и каждое из них содержит открытый шар радиуса $d/(4\sqrt{n})$.

3) Каждое G_i , $i = 1, \dots, N$, является объединением некоторых множеств из V .

4) Каждое множество из V можно представить в виде $G_{i_0} \setminus (\bigcup_{j=1}^s G_{i_j})$, где $s \geq 0$, $i_j \leq N$ при $j = 0, \dots, s$, причем множества $G_{i_1}, \dots, G_{i_s}$ попарно не пересекаются и содержатся в G_{i_0} .

5) Справедливо неравенство $d \leq C_1 N^{-1/n}$, где $C_1 = C_1(\Omega)$ – некоторая константа. (Запись $C_1 = C_1(\Omega)$ означает, что C_1 – константа, зависящая только от Ω .)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Обозначим через U_i объединение всех кубов из S'_i , $i \in \mathbb{N}$. Если $H_0 \in S_i$, то $H_0 \setminus U_i$ содержит некоторый куб $H_1 \in S_{i+1}$, $H_1 \setminus U_{i+1}$ содержит куб $H_2 \in S_{i+2}$ и т.д., поэтому $H_0 \setminus (\bigcup_{j=i}^\beta U_j) \neq \emptyset$ для любого β . Следовательно, внутренность множества $G_i \setminus (\bigcup_{j=i+1}^N G_j)$ непуста при $i = 1, \dots, N-1$, откуда вытекает требуемое утверждение.

2) Из построения V ясно, что множества из V попарно не пересекаются и каждое из них содержит открытый куб того же диаметра, что и G_N . Остается заметить, что $d \leq 2 \operatorname{diam} G_N$.

3) Поскольку каждое из множеств $G_1, \dots, G_{e-1}$ есть объединение некоторых кубов, входящих в S_{e-1} , достаточно показать, что каждый куб из S_{e-1} является объединением множеств из V . Но множества из S_{e-1} , не пересекающие G , входят в V , а F_i есть объединение $F_i \setminus G$ и тех кубов из $\{G_e, \dots, G_N\}$, которые содержатся в F_i , где $i = 1, \dots, q$.

4) Покажем индукцией по $i \in \mathbb{N}$, что любой куб $H \in S_i$ можно представить в виде $H_0 \setminus (\bigcup_{j=1}^{\nu} H_j)$, где $\nu \geq 0$, $H_j \in \bigcup_{\beta=0}^{i-1} S'_\beta$ при $j = 0, \dots, \nu$. Данное утверждение является тривиальным при $i = 1$, а также при $H \in S'_{i-1}$. Пусть это доказано для некоторого $i \in \mathbb{N}$ и $H \in S_{i+1} \setminus S'_i$. Очевидно, H есть $H_0 \setminus (\bigcup_{j=1}^{\nu} H_j)$ при некоторых $H_0 \in S_i$, $H_1, \dots, H_\nu \in S'_i$. Применяя к H_0 предположение индукции, получаем требуемое представление для H .

Из доказанного следует, что каждое множество из V можно представить в виде $G_{i_0} \setminus (\bigcup_{j=1}^s G_{i_j})$, где $s \geq 0$, $i_j \leq N$ при $j = 0, \dots, s$. Затем надо удалить из совокупности $\{G_{i_1}, \dots, G_{i_s}\}$ часть кубов так, чтобы оставшиеся кубы попарно не пересекались, а объединение всех множеств совокупности не изменилось, и удалить из этой совокупности кубы, не пересекающие G_{i_0} .

5) При $i \in \mathbb{Z}_+$ S_{i+1} , а значит, и S'_i содержат не более $A_1 2^{ni}$ кубов, где $A_j = A_j(\Omega)$ — некоторые положительные константы, причем диаметр кубов из S'_i равен $\sqrt{n} 2^{-i-1}$. Отсюда $N \leq A_2 (\operatorname{diam} G_N)^{-n}$ и, кроме того, $d \leq 2 \operatorname{diam} G_N$.

Далее, положим

$$\mathcal{L}_i = \left\{ g \in W_2^t(\Omega) : \int_{G_i} g \, dx = 1, \int_{G_j} g \, dx = 0 \quad \forall j < i \right\}, \quad i \in \mathbb{N},$$

и заметим, что задача

$$\min \{ \|D^t g\|_{L_2(\Omega)} : g \in \mathcal{L}_i \} \quad (2)$$

имеет решение. Действительно, множество $\mathcal{L}_i + \mathcal{P}_{t-1}$ замкнуто в $W_2^t(\Omega)$ и непусто по п. 1 леммы 1, поэтому, переходя к фактор-пространству $\mathcal{W} = W_2^t(\Omega) / \mathcal{P}_{t-1}$, топология которого порождается нормой $\| \cdot \| = \|D^t \cdot\|_{L_2(\Omega)}$ (это вытекает, например, из [3, лемма 3]), получаем задачу минимизации нормы $\| \cdot \|$ на замкнутом многообразии гильбертова пространства $\mathcal{W}$. Обозначим через u_i какое-либо решение задачи (2).

ТЕОРЕМА. *Функции $\{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ принадлежат $W_\infty^l(\Omega)$ и образуют базис в пространстве $W_p^k(\Omega)$, причем, если $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i u_i$ — разложение функции $f \in W_p^k(\Omega)$ по этому базису и $N \geq C_1$, то*

$$\sum_{j=0}^k \left\| D^j \left(f - \sum_{i=1}^N \lambda_i u_i \right) \right\|_{L_p(\Omega)} N^{(k-j)/n} \leq C_2 \omega_m(D^k f, N^{-1/n})_{L_p(\Omega)}, \quad (3)$$

где $C_i = C_i(\Omega, k, l, m)$ — некоторые константы.

То, что $u_i \in W_\infty^l(\Omega)$, следует из вложения $W_2^t(\Omega) \rightarrow W_\infty^l(\Omega)$, которое выполняется ввиду $t - n/2 > l$ [9, § 9], [10]. Если $f = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i u_i$, где ряд сходится в $L_1(\Omega)$, то, очевидно,

$$\lambda_1 = \int_{G_1} f \, dx, \quad \lambda_i = \int_{G_i} \left(f - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j u_j \right) dx, \quad i \geq 2, \quad (4)$$

поэтому функция f может иметь не более одного разложения по данной системе. В доказательстве нуждается, таким образом, только оценка (3), где λ_i определены равенствами (4). Обозначим через T линейный оператор $f \rightarrow \sum_{i=1}^N \lambda_i u_i$ (напомним, что мы зафиксировали $N \in \mathbb{N}$). Пусть для каждого $H \in V$ v_H – какое-либо решение задачи

$$\min \{ \|D^t g\|_{L_2(\Omega)} : g \in W_2^t(\Omega), \int_H g dx = 1, \int_F g dx = 0 \quad \forall F \in V, F \neq H \}$$

(см. п. 2 леммы 1) и

$$T'(f) = \sum_{H \in V} \left(\int_H f dx \right) v_H.$$

Доказательству теоремы предположим ряд вспомогательных утверждений. В следующей лемме 2 устанавливается, в частности, связь между операторами T и T' . Затем идет несколько общих лемм теоретико-функционального характера. Значительную роль в доказательстве теоремы играет свойство экспоненциального убывания функций v_H , которое устанавливается в лемме 7.

Когда это не вызывает недоразумений, различные константы мы обозначаем одними и теми же буквами C_i .

ЛЕММА 2. *Существует такое $C_1 = C_1(\Omega, t)$, что если $N \geq C_1$, то*

- 1) для любого $P \in \mathcal{P}_{t-1}$ $T(P) = P$;
- 2) для любого $f \in W_p^k(\Omega)$ $T(f) = T'(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z – множество таких $g \in L_1(\Omega)$, что $\int_{G_i} g dx = 0$ при любом $i \leq N$, и $\tilde{Z} = Z \cap W_2^t(\Omega)$.

1) По определению u_i ($u_i, g)_{t, \Omega} = 0$ для любых $g \in \tilde{Z}$, $i \leq N$, так что $(T(P), g)_{t, \Omega} = 0$ для любого $g \in \tilde{Z}$, откуда, поскольку $T(P) - P \in \tilde{Z}$, получаем $\|D^t T(P)\|_{L_2(\Omega)} = 0$, т.е. $T(P) \in \mathcal{P}_{t-1}$ и $T(P) - P \in \mathcal{P}_{t-1} \cap Z$. Но при достаточно больших N $\mathcal{P}_{t-1} \cap Z = \{0\}$.

2) Согласно пунктам 2–4 леммы 1 множество

$$Z' = \left\{ g \in L_1(\Omega) : \int_H g dx = 0 \quad \forall H \in V \right\}$$

совпадает с Z и, кроме того, по определению T, T'

$$\begin{aligned} f - T(f) &\in Z, & f - T'(f) &\in Z' = Z, \\ (T(f), g)_{t, \Omega} &= (T'(f), g)_{t, \Omega} = 0 & \forall g \in \tilde{Z}, \end{aligned}$$

откуда, полагая $g = T(f) - T'(f)$, находим $\|D^t g\|_{L_2(\Omega)} = 0$. Как и выше, при достаточно больших N $g \in \mathcal{P}_{t-1} \cap Z = \{0\}$.

В лемме 3 дано покрытие области с липшицевой границей звездными областями, обладающее специальными свойствами.

ЛЕММА 3 [3, лемма 1]. Для любого $\varepsilon \in (0, C_1]$ существуют области $U_i \subset \Omega$, $i \in I$, удовлетворяющие условиям:

- 1) $\text{diam } U_i \leq C_2 \varepsilon$;
- 2) область U_i звездна относительно некоторого открытого шара радиуса ε (т.е. звездна относительно каждой точки этого шара);
- 3) для любого $x \in \mathbb{R}^n$ найдется такое $i \in I$, что $\Omega \cap B(x, \varepsilon) \subset U_i$;
- 4) любой открытый шар радиуса ε пересекает не более чем C_3 множеств U_i .

Здесь $C_i = C_i(\Omega)$ – некоторые положительные константы.

Обозначим через $\Pi_{a,\gamma}(r)$ связную компоненту множества $(\gamma\Omega) \cap B(a, r)$, содержащую точку a , где $\gamma > 0$, $a \in \gamma\Omega$, $r > 0$; при $r \leq 0$ положим $\Pi_{a,\gamma}(r) = \emptyset$. Из леммы 3 ($\varepsilon = \rho/\gamma$) следует, что

$$(x \in \Pi_{a,\gamma}(r), y \in \gamma\Omega, |x - y| < \rho \leq \gamma C_1) \implies (y \in \Pi_{a,\gamma}(r + C_2 \rho)). \quad (5)$$

ЛЕММА 4 [3, предложение 3]. Пусть U – область в $\mathbb{R}^n$, звездная относительно шара $B(0, 1)$, $\text{diam } U \leq \rho$, и $g \in W_2^s(U)$, где $s > n/2$. Если для любого $x \in B(0, 1)$ существует такое $y \in B(0, 1)$, что $|x - y| \leq C_1$ и $g(y) = 0$, то

$$\|g\|_{W_2^s(U)} \leq C_2 \|D^s g\|_{L_2(U)}.$$

Здесь $C_i = C_i(\rho, s) > 0$.

Таким образом, здесь утверждается, что норма функции, имеющей достаточно густую сеть нулей, оценивается через норму лишь ее старших производных. Далее, как известно, если вычесть из функции $g \in W_p^k(\Omega)$ соответствующий полином степени меньше k , то норма этой разности в $W_p^k(\Omega)$ будет оцениваться через норму k -х производных g в $L_p(\Omega)$. Если повысить степень полинома, можно получить оценку через модуль гладкости k -х производных g произвольного порядка. Такая оценка на связных компонентах $\Pi_{a,\gamma}(r)$ дана в следующей лемме.

ЛЕММА 5 [5, лемма 4]. Пусть $\gamma \geq C_1$, $a \in \gamma\Omega$, $g \in W_p^k(\gamma\Omega)$, s целое, $s > k$. Тогда существует такой полином $P \in \mathcal{P}_{s-1}$, что для любого $r \geq 1$

$$\|g - P\|_{W_p^k(\Pi_{a,\gamma}(r))} \leq C_2 r^{C_3} \tilde{\omega}_{s-k}(D^k g, C_4)_{p, \Pi_{a,\gamma}(r+C_5)}.$$

Здесь $C_i = C_i(\Omega, s)$.

Заметим, что величины ω_s и $\tilde{\omega}_s$ по-разному характеризуют гладкость функции g ; обе они обращаются в нуль для полиномов степени меньше s . Связь между ними (оценка $\tilde{\omega}_s$ через ω_s) устанавливается в следующей лемме.

ЛЕММА 6 [5, лемма 5]. Если $s \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, U – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $g \in L_p(U)$, причем в случае $p = \infty$ $g \in W_\infty^0(U)$, то

$$\tilde{\omega}_s(g, \delta)_{p,U} \leq C_1 \omega_s(g, \delta)_{L_p(U)},$$

где $C_1 = C_1(n, s, \delta)$.

Перейдем к свойству экспоненциального убывания функций v_H . Введем следующие обозначения: ε_0 и M – это константы $C_1(\Omega)$ и $C_2(\Omega)$ соответственно из леммы 3, μ – константа $C_1(M, t)$ из леммы 4, τ – константа $C_1(\Omega, m + k)$ из леммы 5, $\gamma = \mu/(8d)$, $\tilde{v}_H(x) = \gamma^{-n} v_H(x/\gamma)$, $\Omega' = \gamma\Omega$, при $H \in V$ $H' = \gamma H$, a_H – некоторая точка H' , $\Pi_H(r) = \Pi_{a_H, \gamma}(r)$. Будем считать, что $\varepsilon_0, \mu < 1$.

ЛЕММА 7. Допустим, что

$$d \leq \frac{\mu}{8} \min \left\{ \frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{1}{\tau} \right\}. \quad (6)$$

Тогда для любых $H \in V$, $r \in \mathbb{R}$

$$\|\tilde{v}_H\|_{W_p^k(\Omega' \setminus \Pi_H(r))} \leq C_1 C_2^r,$$

где $C_i = C_i(\Omega, t)$, $0 < C_2 < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ниже $A_i = A_i(\Omega, t)$ – некоторые положительные константы. Поскольку каждое множество $F \in V$ содержит открытый шар радиуса $d/(4\sqrt{n})$ (п. 2 леммы 1), F' содержит некоторый шар $B(b_F, A_1)$, где $A_1 < 1$. Выберем некоторую бесконечно дифференцируемую функцию φ с носителем в шаре $B(0, A_1)$ такую, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx = 1 \quad \text{и} \quad \|\varphi\|_{W_2^t(\mathbb{R}^n)} \leq A_2.$$

Пусть $H \in V$ и $\Pi(j) = \Pi_H(Mj)$.

Возьмем некоторое $j \in \mathbb{N}$. Пусть χ – характеристическая функция множества точек $\mathbb{R}^n$, расстояние от которых до $\Pi(j+2)$ меньше 1, $\psi = \varphi * \chi$, X – множество точек Ω' , расстояние от которых до $\Pi(j+2)$ не меньше 2, Y – множество точек $\Omega' \setminus \Pi(j+2)$, расстояние от которых до $\Pi(j+2)$ меньше 2. Полагая

$$\begin{aligned} V_1 &= \{F \in V : F' \subset \Pi(j+2)\}, \quad V_2 = \{F \in V : F' \subset X\}, \\ V_3 &= \{F \in V : F' \cap Y \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

имеем: классы V_1, V_2, V_3 попарно не пересекаются, причем $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, так как случай, когда $F' \cap \Pi(j+2) \neq \emptyset$ и $F' \cap X \neq \emptyset$, исключен ввиду $\text{diam } F' \leq \gamma d < 1$. Из (5), где $\rho = 1 < \varepsilon_0 \gamma$ в силу (6), и из того, что $\text{diam } H' < 1$, следует, что $H \in V_1$. Поскольку $\psi(x) = 1$ при $x \in \Pi(j+2)$ и $\psi(x) = 0$ при $x \in X$, интеграл от $\psi \tilde{v}_H$ по множеству F' равен интегралу от $\tilde{v}_H$ по F' , если $F \in V_1 \cup V_2$. Введем функцию

$$\eta(x) = \psi(x) \tilde{v}_H(x) - \sum_{F \in V_3} \left(\int_{F'} \psi \tilde{v}_H dx \right) \varphi(x - b_F). \quad (7)$$

Множества F' , где $F \in V$, попарно не пересекаются (по п. 2 леммы 1), так что

$$\int_{F'} \eta dx = \int_{F'} \tilde{v}_H dx \quad \forall F \in V. \quad (8)$$

Положим $E = \Pi(j+5) \setminus \Pi(j+1)$. С помощью (5), где $\rho = 2$ ($\leq \varepsilon_0 \gamma$ согласно (6)), а затем $\rho = 1$, учитывая, что $\text{diam } F' < 1$, получаем

$$Y \subset \Pi(j+4), \quad X \supset \Omega' \setminus \Pi(j+4), \quad (9)$$

и

$$\bigcup_{F \in V_3} F' \subset E. \quad (10)$$

Принимая во внимание (7), (9), (10) и отмеченные свойства функции ψ , находим

$$\eta(x) = \begin{cases} \tilde{v}_H(x) & \forall x \in \Pi(j+1), \\ 0 & \forall x \in \Omega' \setminus \Pi(j+5), \end{cases} \quad (11)$$

$$\|\eta\|_{W_2^t(E)} \leq A_3 \|\tilde{v}_H\|_{W_2^t(E)}. \quad (12)$$

Теперь применим лемму 3 с $\varepsilon = 1/\gamma$ ($\varepsilon < \varepsilon_0$ в силу (6)), и пусть $U'_i = \gamma U_i$, $i \in I$ (где U_i взяты из леммы 3); область $U'_i \subset \Omega'$ звездна относительно некоторого открытого шара B_i радиуса 1. Напомним, что $G_N \in S_c$, причем ввиду $d < 1/2$ имеем $c > 1$. Как легко видеть, для всякой точки $x \in B_i$ найдутся точки $y_1, y_2 \in B_i$, расстояния от которых до границы B_i больше $\mu/4$, такие, что $|y_1 - y_2| > \mu/4$ и $|x - y_\beta| < \mu/2$ ($\beta = 1, 2$), так как $\mu < 1$. Далее, найдутся такие кубы $Q_1, Q_2 \in S_{c-1}$, что $y_\beta \in Q'_\beta \subset B_i$, где $Q'_\beta = \gamma Q_\beta$, $\beta = 1, 2$, ибо при $F \in S_{c-1}$ $\text{diam}(\gamma F) \leq 2\gamma d = \mu/4$. Куб Q_β , $\beta = 1, 2$, как и любой куб из S_{c-1} , является объединением некоторых множеств из V , причем либо в случае Q_1 , либо в случае Q_2 все эти множества из V отличны от H (ибо $Q_1 \neq Q_2$ в силу $|y_1 - y_2| > \mu/4 \geq \text{diam } Q'_\beta$). Таким образом, при $\beta = 1$ или $\beta = 2$ $\int_{Q'_\beta} \tilde{v}_H dx = 0$; значит, для некоторого $z \in Q'_\beta$ $\tilde{v}_H(z) = 0$, причем в силу $|x - y_\beta| < \mu/2$ и $y_\beta \in Q'_\beta$ имеем $|x - z| < \mu$. Итак, для любых $i \in I$, $x \in B_i$ существует такое $z \in B_i$, что $\tilde{v}_H(z) = 0$, $|x - z| < \mu$, откуда по лемме 4 ($s = t$, $\rho = M$)

$$\|\tilde{v}_H\|_{W_2^t(U'_i)} \leq A_4 \|D^t \tilde{v}_H\|_{L_2(U'_i)}. \quad (13)$$

Возведем обе части (13) в квадрат и просуммируем эти оценки по всем $i \in I$ таким, что $U'_i \cap E \neq \emptyset$. При этом $U'_i \subset \Pi(j+6) \setminus \Pi(j)$, так как $\text{diam } U'_i \leq M$. Учитывая, что области U'_i образуют покрытие Ω' , причем каждая точка покрывается не более чем A_5 областями U'_i , получим

$$\|\tilde{v}_H\|_{W_2^t(E)} \leq A_6 \|D^t \tilde{v}_H\|_{L_2(\Pi(j+6) \setminus \Pi(j))}. \quad (14)$$

Поскольку $\tilde{v}_H$ минимизирует функционал $\|D^t \cdot\|_{L_2(\Omega')}$ при определенных ограничениях, из (8) заключаем, что значение этого функционала от η не меньше, чем его значение от $\tilde{v}_H$. С помощью (11), (12), (14) находим

$$\begin{aligned} \|D^t \tilde{v}_H\|_{L_2(\Omega' \setminus \Pi(j+6))}^2 &\leq \|D^t \tilde{v}_H\|_{L_2(\Omega')}^2 - \|D^t \tilde{v}_H\|_{L_2(\Pi(j+1))}^2 \\ &\leq \|D^t \eta\|_{L_2(\Omega')}^2 - \|D^t \tilde{v}_H\|_{L_2(\Pi(j+1))}^2 = \|D^t \eta\|_{L_2(E)}^2 \\ &\leq A_7 \|D^t \tilde{v}_H\|_{L_2(\Pi(j+6) \setminus \Pi(j))}^2 \end{aligned}$$

(очевидно, граница $\Pi_{a\gamma}(r)$, как часть границы $(\gamma\Omega) \cap B(a, r)$, имеет меру нуль). Полагая $\zeta_j = \|D^t \tilde{v}_H\|_{L_2(\Omega' \setminus \Pi(6j))}^2$, имеем при $j \in \mathbb{N}$

$$\zeta_{j+1} \leq A_7(\zeta_j - \zeta_{j+1}), \quad \zeta_{j+1} \leq \frac{A_7}{A_7 + 1} \zeta_j, \quad \zeta_j \leq \left(\frac{A_7}{A_7 + 1} \right)^{j-1} \zeta_1. \quad (15)$$

Область U'_i , $i \in I$, звездна относительно шара радиуса 1, $\text{diam } U'_i \leq M$ и, кроме того, $t - n/2 > l \geq k$, поэтому справедлива оценка [10, § 8]

$$\|\tilde{v}_H\|_{W_p^k(U'_i)} \leq A_8 \|\tilde{v}_H\|_{W_2^t(U'_i)}. \quad (16)$$

Пусть $s \in \mathbb{Z}_+$ и $I_s = \{i \in I: U'_i \cap (\Pi(s+1) \setminus \Pi(s)) \neq \emptyset\}$. При $i \in I_s$, очевидно, $U'_i \subset \Omega' \setminus \Pi(s-1)$. Отсюда, из (13), (15), (16) и очевидного неравенства $\|D^t \tilde{v}_H\|_{L_2(\Omega')} \leq A_9$ следует, что

$$\|\tilde{v}_H\|_{W_p^k(U'_i)} \leq A_{10} A_{11}^s \quad \forall i \in I_s, \quad (17)$$

где $A_{11} < 1$. Множество I_s содержит не более $A_{12}(s+1)^n$ элементов (так как любой шар радиуса 1 пересекает не более чем A_{13} областей U'_i), так что из (17) получаем

$$\|\tilde{v}_H\|_{W_p^k(\Pi(s+1) \setminus \Pi(s))} \leq A_{14} A_{15}^s \quad \forall s \in \mathbb{Z}_+,$$

где $A_{15} < 1$, откуда непосредственно следует утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Здесь, как и выше, $A_i = A_i(\Omega, t) > 0$. Пусть N настолько велико, что выполнены условия лемм 2 и 7, $z \in \mathbb{R}^n$, $B_z = \Omega' \cap B(z, 1) \neq \emptyset$. Возьмем какую-либо точку $b \in B_z$ и при $j \in \mathbb{N}$ положим

$$V_j = \{H \in V: H' \subset \Pi_{b,\gamma}(j), H' \not\subset \Pi_{b,\gamma}(j-1)\}.$$

В силу (5), где $\rho = 2 \leq \gamma \varepsilon_0$ на основании (6), имеем

$$B_z \subset \Pi_{b,\gamma}(3M). \quad (18)$$

Если $H \in V_j$ и $\Pi_{b,\gamma}(3M) \cap \Pi_{a_H,\gamma}(\frac{1}{2}(j-4M-1)) \neq \emptyset$, то

$$a_H \in \Pi_{b,\gamma}\left(3M + 2 \cdot \frac{1}{2}(j-4M-1)\right) = \Pi_{b,\gamma}(j-1-M),$$

откуда ввиду (5) следует $H' \subset \Pi_{b,\gamma}(j-1)$ ($\rho = 1$, $\text{diam } H' \leq \gamma d < 1$), что неверно, т.е.

$$\Pi_{b,\gamma}(3M) \subset \Omega' \setminus \Pi_{a_H,\gamma}\left(\frac{1}{2}(j-4M-1)\right) \quad \forall H \in V_j. \quad (19)$$

Положим $\tilde{f}(x) = f(x/\gamma)$, $w(x) = T(f)(x/\gamma)$, $\Pi(z, j) = \Pi_{b,\gamma}(j)$, и пусть P — полином, соответствующий функции $g = \tilde{f}$ согласно лемме 5 при $s = m + k$, $a = b$ ($\gamma \geq \tau$ ввиду (6)); $P \in \mathcal{P}_{t-1}$. Принимая во внимание леммы 2, 7, (18), (19) и то, что множество V_j содержит не более $A_1 j^n$ элементов, имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{f} - w\|_{W_p^k(B_z)} &= \|(\tilde{f} - P) - \sum_{H \in V} \left(\int_{H'} (\tilde{f} - P) dx \right) \tilde{v}_H\|_{W_p^k(B_z)} \\ &\leq \|\tilde{f} - P\|_{W_p^k(\Pi_{b,\gamma}(A_2))} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{H \in V_j} \|\tilde{f} - P\|_{W_p^k(\Pi_{b,\gamma}(j))} \|\tilde{v}_H\|_{W_p^k(\Omega' \setminus \Pi_H(j/2 - A_3))} \\ &\leq A_4 \sum_{j=1}^{\infty} A_5^j \tilde{\omega}_m(D^k \tilde{f}, A_6)_{p, \Pi(z, j)}, \end{aligned}$$

где $A_5 < 1$. Возведем обе части полученного неравенства в степень p , применим неравенство Гёльдера для сумм и просуммируем по всем $z \in S$, где S – совокупность точек множества $\frac{1}{n}\mathbb{Z}^n$, расстояние от которых до Ω' меньше 1:

$$\begin{aligned} \|\tilde{f} - w\|_{W_p^k(\Omega')}^p &\leq A_7 \sum_{z \in S} \|\tilde{f} - w\|_{W_p^k(B_z)}^p \leq A_8^p \sum_{z \in S} \sum_{j=1}^{\infty} A_5^j \tilde{\omega}_m(D^k \tilde{f}, A_6)_{p, \Pi(z, j)}^p \\ &\leq A_8^p \iint_{(x, y) \in \Sigma_m(\Omega', A_6)} \left(\sum A_5^j \right) \sum_{|\alpha|_1=k} |D^\alpha \tilde{f}(x) - P_m(D^\alpha \tilde{f}, y, x)|^p dx dy, \end{aligned} \quad (20)$$

где сумма $\sum A_5^j$ распространяется на пары $(z, j) \in S \times \mathbb{N}$ такие, что $K_{xy}^m \subset \Pi(z, j)$. Так как при этом $z \in (\frac{1}{n}\mathbb{Z}^n) \cap B(x, j+1)$, имеем $\sum A_5^j \leq A_9$; отсюда, из (20) и леммы 6 получаем

$$\|\tilde{f} - w\|_{W_p^k(\Omega')}^p \leq A_{10} \tilde{\omega}_m(D^k \tilde{f}, A_6)_{p, \Omega'} \leq A_{11} \omega_m(D^k \tilde{f}, A_6)_{L_p(\Omega')}.$$

Мы здесь предполагали, что $p < \infty$, но это ограничение, очевидно, несущественно. Наконец, переходя к функциям на Ω , учитывая п. 5 леммы 1 и неравенство $\omega_m(g, 2\delta)_{L_p(\Omega)} \leq 2^m \omega_m(g, \delta)_{L_p(\Omega)}$ [9, § 16], получаем оценку (3), что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ciesielski Z., Figiel T. Spline bases in classical function spaces on compact C^∞ manifolds. I // *Studia Math.* 1983. V. 76. № 1. P. 1–58; II // *Studia Math.* 1983. V. 76. № 2. P. 95–136.
- [2] Чесельский З. Базисы и K -функционалы для пространств Соболева над компактными многообразиями класса C^∞ // *Тр. МИАН.* 1983. Т. 164. С. 197–203.
- [3] Матвеев О. В. Сплайн-интерполяция функций нескольких переменных и базисы в пространствах Соболева // *Тр. МИАН.* 1992. Т. 198. С. 125–152.
- [4] Субботин Ю. Н. Приближение сплайнами и гладкие базисы в $C[0, 2\pi]$ // *Матем. заметки.* 1972. Т. 12. № 1. С. 43–51.
- [5] Матвеев О. В. Интерполирование D^m -сплайнами и базисы в пространствах Соболева // *Матем. сб.* 1998. Т. 189. № 11. С. 75–102.
- [6] Новиков И. Я. Базисы всплесков в функциональных пространствах. Дисс. . . . д. ф.-м. н. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2000.
- [7] Cohen A., Dahmen W., DeVore R. Multiscale decompositions on bounded domains // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2000. V. 352. № 8. P. 3651–3685.
- [8] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [9] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
- [10] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург
E-mail: Oleg.Matveev@imm.uran.ru

Поступило
26.02.2001