Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, Базисы из экспонент в пространствах $L^p(-\pi, \pi)$, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 3, 418–432

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm433>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:05:01

УДК 517.5

БАЗИСЫ ИЗ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ $L^p(-\pi, \pi)$

А. М. Седлецкий

Доказано, что системы экспонент, ортогональные мерам специального вида, образуют базисы в $L^p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, для которых верен аналог теоремы М. Рисса о проектировании из L^p на H^p .

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Речь идет о системе экспонент

$$(e^{i\lambda_n t}, ite^{i\lambda_n t}, \dots, (it)^{m_n-1} e^{i\lambda_n t})_{n=0}^{\infty}, \quad (1)$$

где $\lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ – последовательность нулей целой функции

$$L(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} d\sigma(t), \quad \text{var } \sigma < \infty \quad (2)$$

(m_n – кратность корня λ_n , $|\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_n|$), причем порождающая мера $d\sigma(t)$ имеет вид

$$d\sigma(t) = \frac{k(t) dt}{(\pi^2 - t^2)^{\alpha}}, \quad 0 < \text{Re } \alpha < 1, \quad \text{var } k < \infty, \quad k(\pm\pi \mp 0) \neq 0. \quad (3)$$

Условия (3) задают широкий класс систем (1), в который входят, например, системы

$$\exp(i(n + \beta \operatorname{sign} n)t), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \exp(i(n + \beta \operatorname{sign} n)t), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (4)$$

соответственно при $\beta = (1 - \alpha)/2$, $\beta = -\alpha/2$ (см. [1]–[3]). Системы (4) интересны как сами по себе в связи с особой регулярностью последовательностей показателей, так и тем, что от них легко перейти к системам синусов и косинусов

$$\sin(n + \beta)t, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \cup (\cos(n + \beta)t), \quad n \in \mathbb{N},$$

встречающихся при решении некоторых уравнений смешанного типа [4].

Пусть $L^p = L^p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$. По теореме М. Рисса [5] тригонометрический ряд Фурье функции $f \in L^p$ сходится в L^p вместе со своим сопряженным рядом, откуда следует, что оператор

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int} \rightarrow \sum_{n \geq 0} c_n e^{int}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00396.

ограничен в L^p . Отталкиваясь от этого факта, будем говорить, что *базис* (1) пространства L^p (или некоторого его подпространства B) *обладает свойством Рисса*, если проектор

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{m_n-1}(t)e^{i\lambda_n t} \rightarrow \sum_{\operatorname{Re} \lambda_n \geq 0} P_{m_n-1}(t)e^{i\lambda_n t} \quad (5)$$

ограничен в $L^p(B)$ (здесь $P_m(t)$ – многочлен степени $\leq m$).

В [2] показано, что если $\alpha \in \mathbb{R}$ и $k(t) \in C^2(\pi - \delta \leq |t| \leq \pi)$ при некотором $\delta > 0$, то

- 1) при $1 < p < 1/(1 - \alpha)$ система (1) образует в L^p базис, обладающий свойством Рисса;
- 2) при $1/(1 - \alpha) < p < \infty$ система (1) образует в L_0^p базис, обладающий свойством Рисса (здесь и в дальнейшем L_0^p – подпространство в L^p , аннулируемое мерой (3));
- 3) при $p = 1/(1 - \alpha)$ система (1), вообще говоря, не образует базиса в L^p (будучи в L^p полной и равномерно минимальной).

Доказательства утверждений 1), 2) основаны на *методе распространения сходимости квазиполиномов*. Явление распространения сходимости квазиполиномов является трудным по существу. Поэтому было бы очень желательно иметь доказательства, не опирающиеся на это явление. Кроме того, хотелось бы избавиться от присутствующих ограничений на гладкость функции $k(t)$ и на вещественность α .

Развивая подход работы [3] и действуя только в рамках метода контурного интегрирования, в настоящей статье мы добиваемся обеих этих целей. Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть λ – последовательность нулей функции (2) с условиями (3). Тогда

- 1) при $1 < p < 1/(1 - \operatorname{Re} \alpha)$ система (1) образует в L^p базис, обладающий свойством Рисса;
- 2) при $1/(1 - \operatorname{Re} \alpha) < p < \infty$ система (1) образует в L_0^p базис, обладающий свойством Рисса.

Если $1/(1 - \operatorname{Re} \alpha) < p < \infty$, то дефект системы (1) в L^p равен единице (см., например, [3]). Поэтому утверждение 2) теоремы 1 может быть переформулировано так: если $\mu \neq \lambda_n$, то система (1), пополненная функцией $e^{i\mu t}$, образует базис в L^p , $1/(1 - \operatorname{Re} \alpha) < p < \infty$, обладающий свойством Рисса.

2. Липшицевы классы функций на прямой и свертки. Через $\|g(x)\|_p$ обозначаем норму функции $g(x)$ в $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$. Пусть $0 < \beta < 1$; определим $\Lambda_\beta^p(\mathbb{R})$ как класс функций $g \in L^p(\mathbb{R})$, для которых

$$C_\beta^p(g) := \sup(|t|^{-\beta} \cdot \|g(x+t) - g(x)\|_p : t \neq 0) < \infty.$$

Пишем $\Lambda_\beta(\mathbb{R})$ вместо $\Lambda_\beta^\infty(\mathbb{R})$ и $C_\beta(g)$ вместо $C_\beta^\infty(g)$. Функции класса $\Lambda_\beta(\mathbb{R})$ можно считать непрерывными [6, гл. 5].

Через $P_y(t)$ обозначаем *ядро Пуассона* для полуплоскости, т.е. $P_y(t) = (y/\pi) \times (t^2 + y^2)^{-1}$. Для функций $u(t), f(t), g(t)$ через $U(x, y), F(x, y), G(x, y)$ обозначаем их интегралы Пуассона в верхней полуплоскости, т.е.

$$U(x, y) = P_y * u = \int_{\mathbb{R}} P_y(t)u(x-t) dt, \quad F = P_y * f, \quad G = P_y * g, \quad y > 0.$$

ЛЕММА 1. Пусть $u \in L^\infty(\mathbb{R})$, $0 < \beta < 1$. Тогда если

$$\left\| \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} \right\|_\infty \leq A \cdot y^{-2+\beta}, \quad y > 0,$$

то $u \in \Lambda_\beta(\mathbb{R})$ и $C_\beta(u) \leq MA$, где M от u не зависит.

Лемма 1 доказана в [6, гл. 5, секция 4.2], хотя в окончательную формулировку в [6] оценка липшицевой константы $C_\beta(u)$ не вошла.

ЛЕММА 2. Если $g \in \Lambda_\beta^1(\mathbb{R})$, $0 < \beta < 1$, то

$$\left\| \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \right\|_1 \leq A \cdot y^{-1+\beta}, \quad y > 0. \quad (6)$$

Эта лемма взята из [3]; ее формулировка в [6, гл. 5, секция 5.1, предложение 7] содержит опечатку.

ЛЕММА 3. Если $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq \infty$, то

$$\left\| \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right\|_\infty \leq A \|f\|_p y^{-1-1/p}, \quad y > 0, \quad (7)$$

где A не зависит от f .

Лемма 3 доказана в [3], где снова в формулировку не была включена зависимость правой части от нормы $\|f\|_p$.

ЛЕММА 4 [3]. Пусть $\text{var } k(t) < \infty$, $0 < \text{Re } \alpha < 1$,

$$g(t) = \begin{cases} \frac{k(t)}{(\pi^2 - t^2)^\alpha} & \text{при } |t| < \pi, \\ 0 & \text{при } |t| \geq \pi. \end{cases}$$

Тогда $g \in \Lambda_{1-\text{Re } \alpha}^1$.

ЛЕММА 5. Если $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1/(1 - \text{Re } \alpha) < p < \infty$, а $g_1(t) = g(-t)$, где $g(t)$ — функция из леммы 4, то

$$f * g_1 \in \Lambda_{1-\text{Re } \alpha - 1/p}(\mathbb{R}) \quad \text{и} \quad C_{1-\text{Re } \alpha - 1/p}(f * g_1) \leq A \|f\|_p,$$

где A от f не зависит.

Без оценки липшицевой константы эта лемма доказана в [3]. Если повторить доказательство, используя леммы 2, 4 и уточненные леммы 1, 3, получим лемму 5 в полном объеме. Сделаем это.

Так как g_1 имеет тот же вид, что g , то достаточно доказать лемму 5 для свертки $u := f * g$. По лемме 4 $g \in \Lambda_{1-\text{Re } \alpha}^1(\mathbb{R})$. Значит, по лемме 2 верна оценка (6) с $\beta = 1 - \text{Re } \alpha$. Так как $f \in L^p(\mathbb{R})$, по лемме 3 имеет место оценка (7). Далее,

$$P_{y_1+y_2} = P_{y_1} * P_{y_2}, \quad y_1, y_2 > 0,$$

поэтому

$$U(x, y_1 + y_2) = P_{y_1 + y_2} * f * g = P_{y_1} * f * P_{y_2} * g = F(x, y_1) * G(x, y_2).$$

Дифференцируя это равенство сначала по y_1 , а затем по y_2 , имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial F}{\partial y_1} * \frac{\partial G}{\partial y_2}, \quad y = y_1 + y_2.$$

Полагая $y_1 = y_2 = y/2$ и учитывая (7) и (6), где $\beta = 1 - \operatorname{Re} \alpha$, находим

$$\left\| \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right\|_{\infty} \leq \left\| \frac{\partial F}{\partial y_1} \right\|_{\infty} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial y_2} \right\|_1 \leq A_1 \|f\|_p y^{-2+(1-\operatorname{Re} \alpha-1/p)}, \quad y > 0.$$

Теперь лемма 5 следует из леммы 1; условие $u \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ этой леммы выполнено, так как $g \in L^q(\mathbb{R})$, $1/p + 1/q = 1$, по предположению $q \operatorname{Re} \alpha < 1$, и значит, по неравенству Гёльдера $u = f * g \in L^{\infty}$.

ЛЕММА 6. Если $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 - \operatorname{Re} \alpha < 1/p < 1$, а $g_1(t) = g(-t)$, где функция $g(t)$ определена в лемме 4, то

$$f * g_1 \in L^s(\mathbb{R}) \quad \text{и} \quad \|f * g_1\|_s \leq A \|f\|_p, \quad 1 - \operatorname{Re} \alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{s},$$

где A от f не зависит.

Лемма 6 следует из теоремы Харди–Литтлвуда [6, гл. 5, § 1] о потенциале Рисса (и опять без оценки нормы присутствует в [3]).

3. Оценка преобразования Лапласа липшицевой меры. Обозначим через $\Lambda_{\beta}[a, b]$, $0 < \beta \leq 1$, класс непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $\mu(t)$, для которых

$$|\mu(t_1) - \mu(t_2)| \leq C_{\beta}(\mu) |t_1 - t_2|^{\beta}, \quad t_1, t_2 \in [a, b].$$

Для функции $\psi \in L^1(a, b)$ введем ее интегральный модуль непрерывности

$$\Omega_1(h; \psi) := \int_a^{b-h} |\psi(t+h) - \psi(t)| dt, \quad 0 < h \leq b-a,$$

и пусть

$$N_{1,\gamma} := \int_0^{b-a} h^{-1-\gamma} \Omega_1(h, \psi) dh, \quad \|\psi\|_1 := \|\psi\|_{L^1(a,b)}.$$

Следующая лемма представляет собой упрощенный вариант оценки интеграла Стильеса, содержащейся в [7].

ЛЕММА 7. Если $\psi \in \Lambda_1[a, b]$, а $\mu \in \Lambda_{1-\gamma}[a, b]$, $0 < \gamma < 1$, то

$$\left| \int_a^b \psi(t) d\mu(t) \right| \leq M_{\gamma} C_{1-\gamma}(\mu) (N_{1,\gamma}(\psi) + \|\psi\|_1).$$

Применим лемму 7 для оценки интеграла

$$E(y) = \int_{-2\pi}^{-h} e^{yt} d\mu(t), \quad y > 0, \quad 0 < h < 2\pi. \quad (8)$$

ЛЕММА 8. Если $\mu \in \Lambda_{1-\gamma}[-2\pi, 0]$, $0 < \gamma < 1$, то

$$|E(y)| \leq M \cdot C_{1-\gamma}(\mu) y^{\gamma-1} e^{-hy}, \quad y > 0,$$

где M от μ и h не зависит.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\psi(t) = e^{yt}$, $a = -2\pi$, $b = -h$. Для $0 < H \leq 2\pi - h$ имеем

$$\begin{aligned} |\psi(t+H) - \psi(t)| &= e^{yt}(e^{yH} - 1), \\ \Omega_1(H; \psi) &= (e^{yH} - 1) \int_{-2\pi}^{-h-H} e^{yt} dt < (e^{yH} - 1) \frac{e^{-y(H+h)}}{y} = e^{-hy} \frac{1 - e^{-Hy}}{y}. \end{aligned}$$

Если $0 < H \leq 1/y$, то $1 - e^{-Hy} < Hy$, и значит,

$$\Omega_1(H; \psi) \leq H e^{-hy}, \quad 0 < Hy \leq 1. \quad (9)$$

Если $H > 1/y$, то $1 - e^{-Hy} < 1$ и, следовательно,

$$\Omega_1(H; \psi) \leq \frac{e^{-hy}}{y}, \quad H > \frac{1}{y}. \quad (10)$$

Пусть $y > 1/(2\pi - h)$; тогда

$$N_{1,\gamma}(\psi) = \int_0^{2\pi-h} H^{-1-\gamma} \Omega_1(H; \psi) dH = \int_0^{1/y} + \int_{1/y}^{2\pi-h} = I_1 + I_2. \quad (11)$$

Применяя соответственно оценки (9) и (10), находим, что

$$\begin{aligned} I_1 &\leq e^{-hy} \int_0^{1/y} H^{-\gamma} dH = C e^{-hy} y^{\gamma-1}, \\ I_2 &\leq \frac{e^{-hy}}{y} \int_{1/y}^{2\pi-h} H^{-1-\gamma} dH \leq C_1 e^{-hy} y^{\gamma-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $y > 1/(2\pi - h)$

$$N_{1,\gamma}(\psi) \leq C e^{-hy} y^{\gamma-1}. \quad (12)$$

Пусть $0 < y \leq 1/(2\pi - h)$. Так как $0 < H \leq 2\pi - h$, то $Hy \leq 1$, и, применяя оценку (9) к левому интегралу в (11), получаем, что $N_{1,\gamma}(\psi) \leq C e^{-hy}$. Значит, оценка (12) верна для всех $y > 0$.

Остается оценить

$$\|\psi\|_1 = \int_{-2\pi}^{-h} e^{yt} dt = \frac{e^{-hy} - e^{-2\pi y}}{y}.$$

Если $y \geq 1$, то

$$\|\psi\|_1 \leq \frac{e^{-hy}}{y} \leq C e^{-hy} y^{\gamma-1}, \quad (13)$$

где $C = 1$. Если же $0 < y < 1$, то

$$e^{-hy} - e^{-2\pi y} = e^{-hy}(1 - e^{-(2\pi-h)y}) \leq 2\pi y e^{-hy},$$

и $\|\psi\|_1 \leq 2\pi e^{-hy}$. Тем более, для таких y выполнена оценка (13) с $C = 2\pi$. Значит, оценка (13), подобно оценке (12), верна для всех $y > 0$. Лемма 8 следует из этих оценок и из леммы 7.

4. Оценка преобразования Фурье сужения свертки. Пусть $g_1(t) = g(-t)$, где $g(t)$ – функция из леммы 4. Пусть $f \in L^p$ при $1 < p < 1/(1 - \operatorname{Re} \alpha)$ и $f \in L_0^p$ при $1/p < 1 - \operatorname{Re} \alpha$. Рассмотрим свертку $\varphi = f * g_1$, которая сосредоточена на $[-2\pi, 2\pi]$. Наша ближайшая цель – оценить функцию

$$F(z) = \begin{cases} \int_{-2\pi}^0 e^{-izt} \varphi(t) dt, & y = \operatorname{Im} z > 0, \\ -\int_0^{2\pi} e^{-izt} \varphi(t) dt, & y = \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \quad (14)$$

При фиксированном $y > 0$

$$F(x + iy) = \int_{-2\pi}^0 e^{-ixt} \varphi_y(t) dt, \quad \varphi_y(t) = e^{yt} \varphi(t).$$

Обозначим через $\Phi_y(t)$ 2π -периодическое продолжение функции $\varphi_y(t)$, $-2\pi < t < 0$. Повторяя известный прием оценки коэффициентов Фурье [5], получаем

$$|F(x + iy)| \leq \frac{1}{2} \omega_1 \left(\frac{\pi}{|x|}; \Phi_y \right), \quad (15)$$

где ω_1 – периодический интегральный модуль непрерывности:

$$\omega_1(\delta; \Phi_y) := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^0 |\Delta \Phi_y(t)| dt, \quad \Delta \Phi_y(t) = \Phi_y(t+h) - \Phi_y(t).$$

Оценим $\omega_1(\delta; \Phi_y)$, $\delta > 0$. При $0 < h < 2\pi$ имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta \Phi_y(t)\|_{L^1(-2\pi, 0)} &= \int_{-2\pi}^{-h} |\Delta \varphi_y(t)| dt + \int_{-h}^0 |\varphi_y(t+h-2\pi) - \varphi_y(t)| dt \\ &\leq \int_{-2\pi}^{-h} |\Delta \varphi_y(t)| dt + \int_{-h}^0 |\varphi_y(t+h-2\pi)| dt + \int_{-h}^0 |\varphi_y(t)| dt \\ &= J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (16)$$

1) Случай $1 < p < 1/(1 - \operatorname{Re} \alpha)$. Начиная с этого момента, под $\|\cdot\|_p$ понимаем норму в L^p на том интервале, который очевиден из контекста. По неравенству Гёльдера

$$J_3 = \int_{-h}^0 e^{yt} |\varphi(t)| dt \leq \frac{1}{(qy)^{1/q}} \|\varphi\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (17)$$

Пусть $1/p - 1/s = 1 - \operatorname{Re} \alpha$. Обозначим через τ показатель, сопряженный с s/p , т.е. $1/\tau + p/s = 1$. Снова применяя неравенство Гёльдера, а затем лемму 6, по которой $\|\varphi\|_s \leq M \|f\|_p$, найдем

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_p^p &= \int_{-h}^0 |\varphi(t)|^p dt \leq C \|\varphi\|_s^p h^{1/\tau} = C \|\varphi\|_s^p h^{1-p/s}, \\ \|\varphi\|_p &\leq C_1 \|\varphi\|_s h^{1/p-1/s} \leq C \|f\|_p h^{1-\operatorname{Re} \alpha}. \end{aligned}$$

Подставляя это в (17) и поступая аналогично с J_2 , получаем

$$J_2, J_3 \leq \frac{C \|f\|_p h^{1-\operatorname{Re} \alpha}}{y^{1/q}}. \quad (18)$$

Далее, так как при $t \in (-2\pi, -h)$

$$\Delta \varphi_y(t) = e^{y(t+h)} \Delta \varphi(t) + e^{yt} (e^{hy} - 1) \varphi(t),$$

то

$$J_1 \leq \int_{-2\pi}^{-h} e^{y(t+h)} |\Delta \varphi(t)| dt + (e^{hy} - 1) \int_{-2\pi}^{-h} e^{yt} |\varphi(t)| dt = K_1 + K_2. \quad (19)$$

По неравенству Гёльдера, по свойству свертки $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1$ и по лемме 4 имеем

$$K_1 \leq \frac{1}{(qy)^{1/q}} \|\Delta \varphi\|_p \leq \frac{1}{(qy)^{1/q}} \|f\|_p \cdot \|\Delta g_1\|_1 \leq \frac{C \|f\|_p h^{1-\operatorname{Re} \alpha}}{y^{1/q}}. \quad (20)$$

Пусть $1/l + 1/s = 1$. По неравенству Гёльдера и по лемме 6

$$K_2 \leq (e^{hy} - 1) \frac{e^{-hy}}{(ly)^{1/l}} \|\varphi\|_s \leq \frac{1 - e^{-hy}}{(ly)^{1/l}} C \|f\|_p.$$

Но $1 - e^{-hy} \leq hy$, а $1/l - 1 = -1/s = 1 - \operatorname{Re} \alpha - 1/p$. Поэтому

$$K_2 \leq \frac{C_1 \|f\|_p h}{y^{1-\operatorname{Re} \alpha - 1/p}}. \quad (21)$$

Подставим (20) и (21) в (19); затем полученную оценку для J_1 вместе с оценкой (18) для J_2, J_3 подставим в (16). Будем иметь

$$\omega_1(\delta; \Phi_y) \leq \frac{C \|f\|_p}{y^{1/q}} \delta^{1-\operatorname{Re} \alpha} (1 + (\delta y)^{\operatorname{Re} \alpha}).$$

В силу (15) для $y > 0$ получаем

$$|F(z)| \leq \frac{C_1 \|f\|_p}{y^{1/q} |x|^{1-\operatorname{Re} \alpha}} (1 + |\operatorname{tg} \theta|^{\operatorname{Re} \alpha}), \quad z = x + iy = re^{i\theta}.$$

Если $y < 0$, то поступаем совершенно аналогично с интегралом из второй строки формулы (14). В итоге получаем оценку

$$|F(z)| \leq \frac{C \|f\|_p}{|y|^{1/q} r^{1-\operatorname{Re} \alpha}}, \quad \left| \theta \pm \frac{\pi}{2} \right| \geq \frac{\pi}{4}, \quad \theta \neq 0, \pi. \quad (22)$$

2) Случай $1 - \operatorname{Re} \alpha > 1/p$. Теперь вместо леммы 6 применяется лемма 5, по которой $\varphi \in \Lambda_{1-\operatorname{Re} \alpha - 1/p}(\mathbb{R})$ и $C_{1-\operatorname{Re} \alpha - 1/p}(\varphi) \leq M \|f\|_p$. Ясно, что и $|\varphi| \in \Lambda_{1-\operatorname{Re} \alpha - 1/p}(\mathbb{R})$ с той же оценкой липшицевой константы. Так как носитель φ лежит на $[-2\pi, 2\pi]$, то $\varphi(\pm 2\pi) = 0$. Далее,

$$\varphi(0) = (g_1 * f)(0) = \int_{-\pi}^{\pi} g_1(-t) f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) f(t) dt = 0,$$

так как $f \in L_0^p$. Благодаря этому при $y > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_{-h}^0 e^{yt} |\varphi(t) - \varphi(0)| dt \leq C \|f\|_p h^{1-\operatorname{Re} \alpha - 1/p} \int_{-h}^0 e^{yt} dt \\ &= C \|f\|_p h^{1-\operatorname{Re} \alpha - 1/p} \frac{1 - e^{-hy}}{y} \leq C \|f\|_p h^{2-\operatorname{Re} \alpha - 1/p}, \end{aligned} \quad (23)$$

так как $1 - e^{-hy} < hy$. Повторяя этот прием и используя равенство

$$\varphi(t + h - 2\pi) = \varphi(t + h - 2\pi) - \varphi(-2\pi),$$

видим, что такая же оценка верна для J_2 . Оценка (20) для K_1 сохраняется, так как при ее выводе мы не использовали специфику случая 1). Оценим K_2 . Интегрируя по частям и учитывая, что

$$\varphi(-2\pi) = 0, \quad |\varphi(-h)| = |\varphi(-h) - \varphi(0)| \leq C \|f\|_p h^{1-\operatorname{Re} \alpha - 1/p},$$

получаем

$$K_2 = \frac{e^{hy} - 1}{y} \left(e^{-hy} |\varphi(-h)| - \int_{-2\pi}^{-h} e^{yt} d|\varphi(t)| \right) \leq C \|f\|_p h^{2-\operatorname{Re} \alpha - 1/p} + \frac{e^{hy} - 1}{y} |E(y)|, \quad (24)$$

где за $E(y)$ сохранено обозначение (8) с $\mu = |\varphi|$. По лемме 8

$$|E(y)| \leq C \|f\|_p e^{-hy} y^{\operatorname{Re} \alpha + 1/p - 1}$$

и, значит, последний член в (24) не превосходит $C \|f\|_p h y^{\operatorname{Re} \alpha - 1/q}$. Таким образом,

$$K_2 \leq C \|f\|_p (h^{2-\operatorname{Re} \alpha - 1/p} + h y^{\operatorname{Re} \alpha - 1/q}).$$

Объединяя эту оценку с оценкой (20) для K_1 , получаем оценку для J_1 , которая вместе с оценкой (23) для J_2, J_3 дает

$$\|\Delta \Phi_y(t)\|_{L^1(-2\pi, 0)} \leq C \|f\|_p \left(\frac{h^{1-\operatorname{Re} \alpha}}{y^{1/q}} + h^{2-\operatorname{Re} \alpha - 1/p} + \frac{h y^{\operatorname{Re} \alpha}}{y^{1/q}} \right).$$

Следовательно,

$$\omega_1(\delta; \Phi_y) \leq C \|f\|_p \frac{\delta^{1-\operatorname{Re} \alpha}}{y^{1/q}} (1 + (\delta y)^{1/q} + (\delta y)^{\operatorname{Re} \alpha}),$$

и в силу (15) при $y > 0$

$$|F(z)| \leq \frac{C \|f\|_p}{y^{1/q} |x|^{1-\operatorname{Re} \alpha}} (1 + |\operatorname{tg} \theta|^{1/q} + |\operatorname{tg} \theta|^{\operatorname{Re} \alpha}).$$

После аналогичных рассуждений для полуплоскости $y < 0$ получаем ту же оценку с естественной заменой y на $|y|$. Вывод: и в случае $1 - \operatorname{Re} \alpha > 1/p$ оценка (22) имеет место.

Из формулы (14) следует, что функция $F(z)$, аналитическая в полуплоскостях $\operatorname{Im} z \geq 0$, ограничена в них. Значит, функции $F(z) z^{1/q + 1 - \operatorname{Re} \alpha}$ имеют минимальный тип при порядке 1 в секторах $|\theta \pm \pi/2| \leq \pi/4$. В силу (22) на границах этих секторов они ограничены константой $C \|f\|_p$. По теореме Фрагмена–Линделёфа эти функции ограничены в секторах той же константой, т.е.

$$|F(z)| \leq C \|f\|_p r^{-1/q - 1 + \operatorname{Re} \alpha}, \quad \left| \theta + \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{4}.$$

И так как в этих секторах $|y| \asymp r$, то, учитывая (22), для всех невещественных z получаем единообразную оценку

$$|F(z)| \leq \frac{C \|f\|_p}{y^{1/q} r^{1-\operatorname{Re} \alpha}}, \quad \operatorname{Im} z \neq 0. \quad (25)$$

5. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим *биортогональный ряд* функции $f \in L^1$ по системе (1):

$$f(t) \sim i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=\lambda_n} \frac{e^{izt}}{L(z)} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma(u) \int_0^u f(v) e^{iz(u-v)} dv = \sum_{n=0}^{\infty} P_{m_n-1}(t) e^{i\lambda_n t} \quad (26)$$

(см. [2]). Нам понадобится

ЛЕММА 9 [8]. Пусть $L(z)$ – функция (2) с условиями (3). Тогда

1) все нули λ_n функции $L(z)$, кроме, быть может, конечного числа, просты, и имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_n = n + \frac{1-\alpha}{2} \operatorname{sign} n + \frac{1}{2\pi i} \log \left(-\frac{k(-\pi+0)}{k(\pi-0)} \right) + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty;$$

2) если $\operatorname{dist}(z, \lambda \cup \{0\}) \geq \delta > 0$, то

$$|L(z)| \geq C(\delta) e^{\pi|y|_r \operatorname{Re} \alpha - 1}, \quad C(\delta) > 0. \quad (27)$$

Заметим, что нумерация в утверждении 1) иная, нежели в (26), но это не приведет к путанице.

Благодаря утверждению 1) леммы 9 ряд (26) записывается в виде

$$f(t) \sim Q(t) + \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t}, \quad (28)$$

где $Q(t)$ – квазиполином системы (1), отвечающий кратным корням. Обозначим

$$S_r^+(t; f) := \sum_{\operatorname{Re} \lambda_n \geq 0} P_{m_n-1}(t) e^{i\lambda_n t}, \quad S_r^-(t; f) := \sum_{\operatorname{Re} \lambda_n < 0} P_{m_n-1}(t) e^{i\lambda_n t}.$$

Пусть $\widehat{f}(u)$ – преобразование Фурье функции $f \in L^1(-\pi, \pi)$, продолженной нулем вне $(-\pi, \pi)$, т.е.

$$\widehat{f}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iut} f(t) dt, \quad u \in \mathbb{R},$$

и пусть $F(z)$ – кусочно-аналитическая функция

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{f}(u) L(u)}{u - z} du, \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Считаем, что на мнимой оси нет точек λ_n ; по лемме 9 это не снижает общности. Имеют место формулы (см. [2])

$$R_r^{\pm}(t; f) := S_r^{\pm}(t; f) - \int_{I_r^{\pm}} e^{iut} \widehat{f}(u) du = \int_{\gamma_r^{\pm}} e^{izt} \frac{F(z)}{L(z)} dz, \quad (29)$$

где $I_r^+ = [0, r]$, $I_r^- = [-r, 0]$, а $\gamma_r^\pm$ — проходимая в положительном направлении граница полукруга $[-ir, ir] \cup (|z| = r, \operatorname{Re} z \geq 0)$. В [3] показано, что $F(z)$ приводится к виду (14).

Назовем последовательность $r_\kappa \rightarrow +\infty$ *подходящей*, если последовательность окружностей $|z| = r_\kappa$ находится на положительном расстоянии от λ . Фиксируем подходящую последовательность r_κ и оценим $|R_r^\pm(t; f)|$, $|t| < \pi$, $r = r_\kappa$, где $f \in L^p$ при $1 < p < 1/(1 - \operatorname{Re} \alpha)$ и $f \in L_0^p$ при $1 - \operatorname{Re} \alpha > 1/p$. В силу (29), (25) и (27) имеем

$$|R_r^\pm(t; f)| \leq C \|f\|_p \int_{\gamma_r^\pm} e^{|y|(|t| - \pi)} |y|^{-1/q} |dz| = C \|f\|_p (R_1 + R_2),$$

где

$$R_1 = \int_{-r}^r \frac{e^{-|y|(\pi - |t|)}}{|y|^{1/q}} dy, \quad R_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-r|\sin \theta|(\pi - |t|)}}{(r|\sin \theta|)^{1/q}} r d\theta.$$

Теперь

$$\begin{aligned} R_1 &< 2 \int_0^\infty \frac{e^{-y(\pi - |t|)}}{y^{1/q}} dy = \frac{2}{(\pi - |t|)^{1/p}} \int_0^\infty e^{-u} u^{-1/q} du = \frac{C}{(\pi - |t|)^{1/p}}, \\ R_2 &< C_1 \int_0^{\pi/2} (r\theta)^{-1/q} e^{-(2/\pi)r\theta(\pi - |t|)} r d\theta \\ &< \frac{C_2}{(\pi - |t|)^{1/p}} \int_0^\infty e^{-u} u^{-1/q} du = \frac{C}{(\pi - |t|)^{1/p}}, \quad |t| < \pi, \end{aligned}$$

где $C > 0$ от $r = r_\kappa$ не зависит. Таким образом,

$$|R_r^\pm(t; f)| \leq M \|f\|_p (\pi - |t|)^{-1/p}, \quad |t| < \pi, \quad r = r_\kappa. \quad (30)$$

1) Случай $1 < p < 1/(1 - \operatorname{Re} \alpha)$. Оценка (30) показывает, что операторы $R_r^\pm$, $r = r_\kappa$, имеют слабый тип (p, p) , причем константа слабого типа от κ не зависит. По интерполяционной теореме Марцинкевича [6] нормы операторов $R_r^\pm$, действующих из $L^p(-\pi, \pi)$ в $L^p(-\pi, \pi)$, ограничены в совокупности. А нормы операторов

$$\int_{I_r^\pm} e^{iut} \widehat{f}(u) du, \quad r > 0,$$

ограничены в совокупности по теореме Рисса. Но тогда в силу левой части формулы (29) также ограничены в совокупности и нормы операторов $S_r^\pm$. Далее, если f — (конечная) линейная комбинация функций системы (1), а r достаточно велико, то по построению

$$S_r^+ : \sum P_{m_n-1}(t) e^{i\lambda_n t} \rightarrow \sum_{\operatorname{Re} \lambda_n \geq 0} P_{m_n-1}(t) e^{i\lambda_n t},$$

причем эта формула сохраняет силу, если в ней одновременно заменить S_r^+ на S_r^- и $\operatorname{Re} \lambda_n \geq 0$ на $\operatorname{Re} \lambda_n < 0$. И так как множество таких линейных комбинаций плотно в $L^p(-\pi, \pi)$ (см., например, [3]), то по теореме Банаха–Штейнгауза последовательность операторов $S_r^\pm$ при $r = r_\kappa \rightarrow \infty$ (сильно) сходится к некоторому ограниченному в L^p оператору $S^\pm$. Ясно, что оператор S^+ как раз является тем проектором (5), который фигурирует в определении базиса со свойством Рисса. Остается убедиться, что система (1) — базис в L^p .

По существу, это уже сделано. Действительно, если положить

$$S_r(t; f) = S_r^+(t; f) + S_r^-(t; f),$$

то по доказанному последовательность операторов S_r при $r = r_\kappa \rightarrow \infty$ сходится к ограниченному в L^p оператору S . Если f – линейная комбинация системы (1), множество которых плотно в L^p , то $Sf = f$, т.е. S – единичный оператор. Таким образом, для любой функции $f \in L^p$

$$S_r(t; f) \xrightarrow{L^p} f(t), \quad r = r_\kappa \rightarrow \infty, \quad (31)$$

т.е. подпоследовательность S_r , $r = r_\kappa$, частичных сумм ряда (26) сходится в L^p к $f(t)$. Перейдем в этом утверждении от подпоследовательности ко всей последовательности. Для этого сначала заметим, что подходящую последовательность r_κ можно фиксировать такой, что при достаточно больших κ в кольце $r_\kappa < |z| < r_{\kappa+1}$ лежит не более двух точек λ_n (по утверждению 1) леммы 9). После чего воспользуемся тем, что в обозначениях (28) $c_n \rightarrow 0$ для любой функции $f \in L^1$ (см. [8]). Тогда (31) перейдет в соотношение

$$Q(t) + \sum_{n=n_0}^N c_n e^{i\lambda_n t} \xrightarrow{L^p} f(t), \quad N \rightarrow \infty,$$

показывающее, что для любой функции $f \in L^p$ ее ряд (26) сходится к ней в $L^p(-\pi, \pi)$. В силу биортогональности этот ряд единственный, и система (1) образует базис в $L^p(-\pi, \pi)$. Случай $1 < p < 1/(1 - \operatorname{Re} \alpha)$ разобран.

2) Случай $1 - \operatorname{Re} \alpha > 1/p$. Здесь небольшой дополнительный шаг вызван неполнотой системы (1) в L^p (по построению система (1) аннулируется функцией из L^q , $1/p + 1/q = 1$). Как показано в [3], дефект системы (1) в L^p равен 1, т.е. после присоединения к системе (1) одной экспоненты новая система становится полной и остается минимальной в L^p . Значит, если фиксировать $\mu \neq \lambda_n$, то пространство L^p есть прямая сумма L_0^p и одномерного подпространства, натянутого на $e^{i\mu t}$. Поэтому если $f_1 \in L^p$, то, обозначив через f проекцию f_1 на L_0^p , имеем

$$\|f\|_p \leq C \|f_1\|_p, \quad (32)$$

где C от f_1 не зависит.

Рассмотрим ряд (26), построенный относительно f . Как мы показали, верна оценка (30). Для дальнейшего применения теоремы Марцинкевича нужно, чтобы рассматриваемые операторы $R_r^\pm$ и $S_r^\pm$ были заданы на всем пространстве L^p . Но это так, ведь оператор $R_r^\pm$ (а то же верно и для $S_r^\pm$) есть итог композиции операторов $f_1 \rightarrow f \rightarrow R_r^\pm$, где f_1 – произвольный элемент пространства L^p . С учетом подчиненности норм (32) и рассуждений, отвечающих случаю 1), заключаем, что система (1), пополненная функцией $e^{i\mu t}$, образует в L^p базис, обладающий свойством Рисса. А это равносильно требуемому утверждению. Случай $1 - \operatorname{Re} \alpha > 1/p$ также разобран. Теорема 1 доказана.

6. Критический случай в теореме 1. Это случай, когда $1 - \operatorname{Re} \alpha = 1/p$. Отвечающая ему система (4) при $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет вид

$$\exp\left(i\left(n + \frac{1}{2p} \operatorname{sign} n\right)t\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (33)$$

Было известно [2], [9], что система (33) не образует базиса в L^p , $1 < p < \infty$. В [3] показано, что если аналитическое ядро суммирования $K(z)$, $|z| < 1$, положительно на вещественном диаметре (что относится, например, к методу суммирования Рисса, когда ядро имеет вид $K(z) = (1 - z^2)^\nu$, $\nu > 0$), то система (33) не образует в L^p базиса суммирования относительно данного метода. Здесь мы рассматриваем вопрос о том, образует ли система (33) в L^p базис суммирования относительно метода Абеля–Пуассона.

Пусть система $e^{i\lambda_n t}$ полна и равномерно минимальна в L^p ; пусть $h_n(t)$ – соответствующая *биортогональная система*, $h_n \in L^q$; пусть, кроме того, все точки λ_n лежат вне углов $|\arg z \pm \pi/2| < \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Для произвольной функции $f \in L^p$ рассмотрим ее биортогональный ряд по данной системе экспонент:

$$f(t) \sim \sum c_n e^{i\lambda_n t}, \quad c_n = (h_n, f). \quad (34)$$

В сделанных предположениях ряды

$$\sum_{\operatorname{Re} \lambda_n \geq 0} c_n e^{i\lambda_n(t+i\sigma)} = f_\sigma^+(t), \quad \sum_{\operatorname{Re} \lambda_n < 0} c_n e^{i\lambda_n(t-i\sigma)} = f_\sigma^-(t) \quad (35)$$

сходятся равномерно относительно $t \in [-\pi, \pi]$ при любом $\sigma > 0$ (это утверждение будет доказано чуть позже). Скажем, что система $e^{i\lambda_n t}$ образует в L^p *базис суммирования относительно метода Абеля–Пуассона*, если для любой функции $f \in L^p$

$$f_\sigma^+(t) + f_\sigma^-(t) \xrightarrow{L^p} f(t), \quad \sigma \rightarrow +0.$$

ТЕОРЕМА 2. Система (33) не образует в L^p , $1 < p < \infty$, базиса суммирования относительно метода Абеля–Пуассона.

Сначала обоснуем равномерную сходимость рядов (35), являющихся средними Абеля–Пуассона для ряда (34). При условии полноты системы $e^{i\lambda_n t}$ в L^p ее равномерная минимальность равносильна условию

$$\sup_n \|h_n\|_q \cdot \|e^{i\lambda_n t}\|_p < \infty, \quad (36)$$

где h_n – биортогональная система (см. [10]). Так как

$$\begin{aligned} |e^{i\lambda_n t}| &\leq \exp(\pi|\beta_n|), \quad |t| \leq \pi, \quad \beta = \operatorname{Im} \lambda_n, \\ \|e^{i\lambda_n t}\|_p^p &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{p\beta_n t} dt = \frac{2 \operatorname{sh}(p\pi\beta_n)}{p\beta_n} \geq C \frac{\exp(p\pi|\beta_n|)}{1 + |\beta_n|}, \quad C > 0, \end{aligned}$$

то при любом $t \in [-\pi, \pi]$

$$|e^{i\lambda_n t}| \leq C \|e^{i\lambda_n t}\|_p (1 + |\beta_n|)^{1/p},$$

и, применяя условие (36), для всех $t \in [-\pi, \pi]$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ получаем

$$|c_n e^{i\lambda_n t}| = |(h_n, f)| \cdot |e^{i\lambda_n t}| \leq C \|f\|_p \cdot \|h_n\|_q \cdot \|e^{i\lambda_n t}\|_p (1 + |\beta_n|)^{1/p} \leq M (1 + |\beta_n|)^{1/p}. \quad (37)$$

В силу полноты и минимальности системы $e^{i\lambda_n t}$ в L^p некоторая целая функция вида (2) обращается в нуль в точках λ_n , $n \neq 0$, и только в них. Но последовательность нулей функции вида (2) имеет положительную плотность (см. [11]), т.е. $n/|\lambda_n| \rightarrow \Delta > 0$, $n \rightarrow +\infty$. Применяя это и условие распределения последовательности λ вне углов $|\arg z \pm \pi/2| < \varepsilon$, имеем

$$|\operatorname{Re} \lambda_n| \geq \delta_1 |\lambda_n| > \delta n, \quad n > n_1.$$

Значит, в силу (37) общий член первого (второго) ряда в (35) при $|t| \leq \pi$ по модулю не превосходит выражения

$$M(1 + |\beta_n|)^{1/p} \exp(-\sigma |\operatorname{Re} \lambda_n|) \leq M\left(1 + \frac{2}{\Delta} n\right)^{1/p} \exp(-\sigma \delta n),$$

и утверждение о равномерной сходимости рядов (35) верно.

Теперь займемся непосредственно системой (33). Ее полнота в L^p известна (см., например, [3]). По утверждению 1) теоремы 1 она образует базис в L^s , $1 < s < p$, и значит [10], равномерно минимальна в L^s . Но тогда она равномерно минимальна и в L^p . Таким образом, для системы (33) выполнены все предположения, при которых мы определяли понятие базиса суммирования относительно метода Абеля–Пуассона.

Итак, пусть $\lambda_n = n + (1/(2p)) \operatorname{sign} n$, $n \in \mathbb{Z}$. Фиксируем $\mu \neq \lambda_n$ и рассмотрим биортogonalный ряд функции $e^{i\mu t}$ по системе $e^{i\lambda_n t}$. С точностью до постоянного множителя и равномерно сходящегося на $[-\pi, \pi]$ ряда он имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \lambda_n t}{\lambda_n^{1/q}}$$

(см. [2]). Надо показать, что он не суммируется в $L^p(0, \pi)$ методом Абеля–Пуассона. Так как $1/\lambda_n^{1/q} = 1/n^{1/q} + O(1/n^{1+1/q})$, то это утверждение достаточно доказать для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \lambda_n t}{n^{1/q}}. \quad (38)$$

Положим $\theta = \pi - t$, $0 < \theta < \pi$. Тогда

$$\lambda_n t = \pi n - n\theta - \frac{\theta - \pi}{2p}, \quad \sin \lambda_n t = (-1)^{n+1} \sin\left(n\theta + \frac{\theta - \pi}{2p}\right),$$

и вместо ряда (38) надлежит рассмотреть ряд

$$\cos \frac{\theta - \pi}{2p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^{1/q}} + \sin \frac{\theta - \pi}{2p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^{1/q}}.$$

Надо убедиться, что предел

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left(\cos \frac{\theta - \pi}{2p} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin n\theta}{n^{1/q}} + \sin \frac{\theta - \pi}{2p} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos n\theta}{n^{1/q}} \right), \quad (39)$$

понимаемый в норме $L^p(0, \pi)$, не существует. Для этого найдем удобное аналитическое выражение для функции под знаком предела.

Воспользуемся тем, что при $0 < r < 1$

$$\frac{1}{(1 - re^{i\theta})^{1/p}} = 1 + \frac{1}{\Gamma(1/p)} \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta} \left(\frac{1}{n^{1/q}} + O\left(\frac{1}{n^{1+1/q}}\right) \right)$$

(см. [5, гл. 5, формула (2.2) и гл. 3, формула (1.18)]). Благодаря этому с точностью до равномерно сходящегося на отрезке $\theta \in [-\pi, \pi]$ ряда имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos n\theta}{n^{1/q}} = \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \operatorname{Re} \frac{1}{(1 - re^{i\theta})^{1/p}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin n\theta}{n^{1/q}} = \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \operatorname{Im} \frac{1}{(1 - re^{i\theta})^{1/p}}. \quad (40)$$

Далее [5, гл. 1, § 1], для $0 < r < 1$, $-\pi < \theta < \pi$

$$\frac{1}{1 - re^{i\theta}} = \frac{1}{(1 + r^2 - 2r \cos \theta)^{1/2}} \exp\left(i \operatorname{arctg} \frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta}\right).$$

Значит,

$$\frac{1}{(1 - re^{i\theta})^{1/p}} = \frac{1}{(1 + r^2 - 2r \cos \theta)^{1/(2p)}} \exp\left(\frac{i}{p} \operatorname{arctg} \frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta}\right) \quad (41)$$

(здесь и ранее имеется в виду однозначная аналитическая ветвь степенной функции, принимающая положительные значения на положительном радиусе). Теперь, применяя последовательно формулы (40) и (41), делаем вывод, что выражение под знаком предела в (39) с точностью до постоянного множителя и равномерно сходящегося ряда имеет вид

$$\begin{aligned} & \cos \frac{\theta - \pi}{2p} \operatorname{Im} \frac{1}{(1 - re^{i\theta})^{1/p}} + \sin \frac{\theta - \pi}{2p} \operatorname{Re} \frac{1}{(1 - re^{i\theta})^{1/p}} \\ &= \frac{1}{(1 + r^2 - 2r \cos \theta)^{1/(2p)}} \sin\left(\frac{1}{p} \left(\frac{\theta - \pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta}\right)\right). \end{aligned} \quad (42)$$

Значит, достаточно показать, что правая часть в (42) не имеет предела в $L^p(0, \pi)$ при $r \rightarrow 1-0$. Для этого, обозначив через γ выражение под знаком синуса в (42), достаточно убедиться, что при всех r , достаточно близких к 1,

$$R(r) := \|(1 + r^2 - 2r \cos \theta)^{-1/(2p)} \sin \gamma\|_{L^p(0, 1-r)}^p \geq \delta > 0. \quad (43)$$

Так как $0 < \theta < 1 - r$, то $0 < (r \sin \theta)/(1 - r \cos \theta) < 1$ и $\pi/2 > |p\gamma| > \pi/6$ при $r > r_0$. Поэтому $|\sin \gamma| > \delta > 0$. Далее,

$$1 + r^2 - 2r \cos \theta = (1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq (1 - r)^2 + \theta^2.$$

Значит, при $r > r_0$

$$R(r) \geq c \int_0^{1-r} \frac{d\theta}{((1 - r)^2 + \theta^2)^{1/2}} = c \log(\theta + ((1 - r)^2 + \theta^2)^{1/2}) \Big|_{\theta=0}^{1-r} = c \log(1 + \sqrt{2}),$$

и (43) доказано. Итак, биортогональный ряд конкретной функции из $L^p(-\pi, \pi)$ по системе (33) не суммируется в $L^p(-\pi, \pi)$ методом Абеля–Пуассона. Следовательно, система (33) не образует в L^p базиса суммирования относительно этого метода. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Система

$$\exp\left(i\left(n - \frac{1}{2q} \operatorname{sign} n\right)t\right), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (44)$$

эквивалентна в $L^p(-\pi, \pi)$ системе (33) (см. [2, с. 87]). Поэтому теорема 2 верна и для системы (44).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Levinson N. Gap and Density Theorems. New York: Publ. Amer. Math. Soc., 1940.
- [2] Седлецкий А. М. Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 51–95.
- [3] Седлецкий А. М. О суммируемости и сходимости негармонических рядов Фурье // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 3. С. 151–168.
- [4] Пономарёв С. М. Об одной задаче на собственные значения // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 5. С. 1068–1070.
- [5] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
- [6] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [7] Мадаев В. И., Соломяк М. З. Об условиях существования интеграла Стильеса // Матем. сб. 1972. Т. 88. № 4. С. 522–535.
- [8] Седлецкий А. М. О равномерной сходимости негармонических рядов Фурье // Тр. МИАН. 1991. Т. 200. С. 299–309.
- [9] Моисеев Е. И. О базисности систем синусов и косинусов // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 794–798.
- [10] Крейн С. Г. (ред.) Функциональный анализ. М.: Наука, 1972.
- [11] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: sedlet@mail.ru

Поступило
05.01.2001