Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Аманов, Ф. И. Мамедов, О регулярности решений вырождающихся эллиптических уравнений дивергентного вида, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 1, 3–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4334>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 18:19:56

О регулярности решений вырождающихся эллиптических уравнений дивергентного вида

Р. А. Аманов, Ф. И. Мамедов

Для линейных и квазилинейных уравнений с вырождением из A_p классов Макенхаупта получены априорные оценки в весовых нормах Лебега решения задачи Дирихле и его первых производных.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Пусть D – произвольная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, L – оператор вида

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i(x, u, u_x)), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u_x = (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2, \dots, \partial u / \partial x_n)$, $A_i(x, \xi, \eta)$ – измеримые функции такие, что для любых $\xi \in \mathbb{R}^1$, $x, \eta \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^n A_i(x, \xi, \eta) \eta_i \geq \omega |\eta|^p, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (2)$$

Здесь и далее v, ω – измеримые почти всюду конечные и положительные функции. Нами исследуются обобщенные решения задачи Дирихле

$$Lu = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad \text{в } D, \quad (3)$$

$$u|_{\partial D} = 0, \quad (4)$$

и доказываются ряд теорем, оценивающих решения этой задачи через правую часть уравнения.

Вопросы, рассмотренные в этой статье, в невесовом случае ($v \equiv \omega \equiv 1$) изучались рядом авторов: Стампакья [1], Вайнбергер [2], Чикко [3], Мазья [4] для линейных уравнений (случай $p = 2$), Ладыженская, Уральцева [5; с. 340], Таленти [6], Драбек, Куфнером, Николози [7; с. 49, 111] и др. для квазилинейных уравнений. Для линейных уравнений с суммируемыми младшими коэффициентами в [8] получена L_∞ -оценка решения при условии малости меры области D . В перечисленных выше работах уравнение не вырождается ($\omega, v \equiv 1$). Результаты настоящей статьи связаны с описанием условий на функции ω, v_1, v_2 и показатели $1 \leq p_1, p_2 < \infty$, при которых справедливы неравенства между $L^{p_1}(D, v_1)$, $L^\infty(D)$ -нормами решения (и ее производных) и $L^{p_2}(D, v_2)$ -нормой функций $f_0, f_1, \dots, f_n$. Для линейных уравнений

без вырождения такие оценки в [4] были применены к доказательству разрешимости задачи Дирихле в пространстве $W_q^1(D)$, $1 < q < 2$, в случае, когда правая часть не обладает достаточной суммируемостью ($f_i \equiv 0$, $f_0 \in L_p(D)$, $1 < p < 2n/(n+2)$). Обозначим через $L^p(D, v)$ пространство измеримых в области D функций с конечной нормой $\|f\|_{L^p(D, \omega)} = (\int_D |f|^p \omega dx)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$; положим $L^p(D) = L^p(D, 1)$. Через p' обозначим число, сопряженное к $p \in (1, \infty)$, т.е. $1/p + 1/p' = 1$ ($p' = 1$ при $p = \infty$, $p' = \infty$ при $p = 1$). Для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ и интегрируемой на E функции v обозначим $v(E) = \int_E v dx$. Выражение $(\int_D \omega^{1-p'} dx)^{1/p'}$ при $p = 1$ понимается как $\text{ess sup}_{x \in D} \omega^{-1}(x)$.

Условие $\omega \in A_p$ при $1 < p < \infty$ означает, что

$$\left(\int_{Q_\rho^x} \omega dy \right) \left(\int_{Q_\rho^x} \omega^{1-p'} dy \right)^{p-1} \leq C_p \rho^{np}$$

для любого шара $Q_\rho^x = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < \rho\}$, где постоянная C_p не зависит от x , ρ .

Известно [9], что $C_0^\infty(D)$ плотно в $L^p(D, \omega)$, если $\omega \in A_p$. Пусть $\text{Lip}(D)$ – пространство функций, удовлетворяющих условию Липшица в области D , $\text{Lip}_0(D)$ – подпространство функций из $\text{Lip}(\bar{D})$ с компактным в области D носителем. Через $W^{1,p}(D, \omega)$ ($W_0^{1,p}(D, \omega)$) обозначим замыкание $\text{Lip}(D)$ ($\text{Lip}_0(D)$) по норме

$$\|f; W^{1,p}(D, \omega)\| = \|f\|_{L^p(D, \omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^p(D, \omega)}.$$

Будем говорить, что последовательность $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ аппроксимирует $f \in W^{1,p}(D, \omega)$ ($W_0^{1,p}(D, \omega)$), если $f_j \in \text{Lip}(D)$ ($f_j \in \text{Lip}_0(D)$) и $\|f_j - f; W^{1,p}(D, \omega)\| \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$.

Пусть $a \in \mathbb{R}^1$, $E \subset D$, $u \in L_{p\omega}(D)$; тогда $u(x) \geq a$ ($u(x) \leq a$) на множестве E , если $\text{mes}\{E \cap u(x) < a\} = 0$ ($\text{mes}\{E \cap u(x) > a\} = 0$), а также $u(x) \geq a$ ($u(x) \leq a$) на $E \subset \bar{D}$ в смысле $W_{p\omega}^1(D)$, если $u_j(x) \geq a$ ($u_j(x) \leq a$) на E для некоторой аппроксимирующей последовательности $\{u_j\}$. Для $z, u \in W_{p\omega}^1(D)$ $z \geq u$ ($z \leq u$) на $E \subset \bar{D}$ в смысле $W_{p\omega}^1(D)$, если $z_j \geq u_j$ ($z_j \leq u_j$) на E для соответствующих аппроксимирующих последовательностей.

2. Вспомогательные результаты.

ЛЕММА 1 (см. также [5; с. 75] и [10; с. 81]). Пусть $p \geq 1$, $k \in \mathbb{R}^1$, $u \in W_{p\omega}^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная область, $\{u\}_k = \max\{u(x), k\}$. Предположим, что $\{u_j\}$ аппроксимирует u ; тогда $\{u\}_k \in W_{p\omega}^1(D)$ и $\|\{u_j\}_k - \{u\}_k\|_{W_{p\omega}^1(D)} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем из $\{u_j\}$ подпоследовательность, сохранив для нее прежнее обозначение, и пусть $u_j \rightarrow u$, $\nabla u_j \rightarrow \nabla u$ п.в. в D . Очевидно, что $\{u_j\}_k \in \text{Lip}(\bar{D})$, $\{u\}_k = k + \chi_{u>k}(u - k)$, $\{u_j\}_k = k + \chi_{u_j>k}(u_j - k)$, откуда $\{u_j\}_k - \{u\}_k = (u_j - u)\chi_{u_j>k} + (u - k)(\chi_{u_j>k} - \chi_{u>k})$; тогда в силу неравенства Минковского

$$\|\{u_j\}_k - \{u\}_k\|_{L_{p\omega}(D)} \leq \|(u_j - u)\chi_{u_j>k}\|_{L_{p\omega}(D)} + \|(u - k)(\chi_{u_j>k} - \chi_{u>k})\|_{L_{p\omega}(D)} \rightarrow 0$$

при $j \rightarrow \infty$, так как $\|u_j - u\|_{L_{p\omega}(D)} \rightarrow 0$, а второе слагаемое стремится к нулю в силу мажорантной теоремы Лебега (и соотношения, $\chi_{u_j>k} \rightarrow \chi_{u>k}$ п.в. в D для характеристических функций). Далее, $\nabla\{u_j\}_k = \nabla u_j \chi_{u_j>k}$, $\nabla\{u\}_k = \nabla u \chi_{u>k}$ п.в. в D , поэтому

$$\nabla\{u_j\}_k - \nabla\{u\}_k = (\nabla u_j - \nabla u)\chi_{u_j>k} + \nabla u(\chi_{u_j>k} - \chi_{u>k}),$$

откуда в силу теоремы Лебега и $\|\nabla u_j - \nabla u\|_{L_{p\omega}(D)} \rightarrow 0$ имеем

$$\|\nabla\{u_j\}_k - \nabla\{u\}_k\|_{L_{p\omega}(D)} \leq \|\nabla u_j - \nabla u\|_{L_{p\omega}(D)} + \left(\int_D |\chi_{u_j > k} - \chi_{u > k}|^p |\nabla u|^p \omega \, dx \right)^{1/p} \rightarrow 0.$$

Пусть $\{u_j\}$ аппроксимирует u , и для некоторой его подпоследовательности, для которой оставляем прежние обозначения, имеет место $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\{u_j\}_k - \{u\}_k\|_{W_{p\omega}^1(D)} = \delta > 0$. Повторяя прежние рассуждения получим, что у самой этой подпоследовательности найдется подпоследовательность, для которой, сохраняя прежние обозначения, справедливо равенство $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\{u_j\}_k - \{u\}_k\|_{W_{p\omega}^1(D)} = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\{u_j\}_k \rightarrow \{u\}_k$ сильно в $W_{p\omega}^1(D)$ для всякой аппроксимирующей последовательности, что требовалось доказать.

Используя лемму 1, находим, что если $u \in W_{p\omega}^1(D)$, $u(x) \leq k$ на ∂D в смысле $W_{p\omega}^1(D)$, то $u_k = \{u\}_k - k$ принадлежит $\mathring{W}_{p\omega}^1(D)$. Теми же рассуждениями, что и в лемме 1, можно показать, что если $z, u \in W_{p\omega}^1(D)$ и $z \geq u$ на ∂D в смысле $W_{p\omega}^1(D)$, то $(u - z)_+ = \max\{u - z, 0\}$ принадлежит $\mathring{W}_{p\omega}^1(D)$.

Условие $v \in A_\infty$ означает существование таких чисел $C, \delta > 0$, что для любого шара Q_ρ^x и его измеримого подмножества E имеет место неравенство

$$\frac{v(E)}{v(Q_\rho^x)} \leq C \left(\frac{\text{mes}_n E}{\text{mes}_n Q_\rho^x} \right)^\delta,$$

где $\text{mes}_n E$ – мера Лебега множества E в $\mathbb{R}^n$.

Условие $v \in RD$ означает существование чисел $\mu, \delta \in (0, 1)$, таких, что для любого шара Q_ρ^x имеет место неравенство

$$\int_{Q_{\delta\rho}^x} v \, dy \leq \mu \int_{Q_\rho^x} v \, dy.$$

Условие $(v, \omega) \in A_{ps}$, $1 \leq p, s < \infty$, означает, что для любого шара Q_ρ^x

$$\rho^{1-n} \left(\int_{Q_\rho^x} v \, dy \right)^{1/s} \left(\int_{Q_\rho^x} \omega^{1-p'} \, dy \right)^{1/p'} \leq C_{p,s} < \infty,$$

где число $C_{p,s} > 0$ не зависит от x и ρ .

Под решением уравнения

$$Lu = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad f_i \in L^{p'}(D, \omega^{1-p'}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

в области D будем понимать функцию $u \in W^{1,p}(D, \omega)$ такую, что для $\forall \varphi \in W_0^{1,p}(D, \omega)$ имеет место тождество

$$\sum_{i=1}^n \int_D A_i(x, u, u_x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = \int_D \left(\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - f_0 \varphi \right) \, dx. \quad (6)$$

ЛЕММА 2. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная область. Предположим, что $u \in W_0^{1,p}(D, \omega)$ – решение уравнения

$$Lu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (7)$$

при $f^{p'} \cdot \omega^{1-p'} \in L^{1,\text{loc}}(D)$, где $1 < p < \infty$, $f = \sum_{i=1}^n |f_i|$ и выполняется условие (2). Тогда для справедливости неравенства

$$\int_D |u(x)|^q v(x) dx \leq C \left(\int_D f^{p'} \omega^{1-p'} |u(x)|^{(p(q-s))/s} dx \right)^{s/p}, \quad (8)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от u, f, ω, v, D , достаточно, чтобы $v \in RD$ ($v \in A_\infty$) и $(v, \omega) \in A_{ps}$ при $q > 2$, $q > s > q - 1$, $s > p$ ($s = p$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $D' = \{x \in D : u(x) > 0\}$, $D'' = D \setminus \bar{D}'$. Положим $u_k(x) = \max(u(x) - k, 0)$ в (6) вместо пробной функции φ , где $k \in [0, \text{ess sup}_{D'} u]$.

В силу леммы 1 $u_k \in W_0^{1,p}(D, \omega)$. Тогда

$$\int_{D_k} \omega |\nabla u_k|^p dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{D_k} |f_i| \cdot |u_{x_i}| dx,$$

где $D_k = \{x \in D' : u(x) > k\}$. Применяя неравенство Гёльдера, отсюда получим

$$\int_{D_k} \omega |\nabla u_k|^p dx \leq \int_{D_k} f^{p'} \cdot \omega^{1-p'} dx. \quad (9)$$

Учитывая, что $u_k \in W_0^{1,p}(D, \omega)$ в силу [13; теорема 5] ([14]) из условий $v \in RD$ ($v \in A_\infty$) и $(v, \omega) \in A_{ps}$ при $s > p$ ($s = p$) следует неравенство

$$\left(\int_{D_k} v u_k^s dx \right)^{1/s} \leq C_0 C_{p,s} \left(\int_{D_k} |\nabla u_k|^p \omega dx \right)^{1/s}, \quad (10)$$

где $C_0 > 0$ не зависит от v, ω, u, D_k . Далее, применяя неравенство Гёльдера, в силу неравенств (9) и (10) имеем

$$\begin{aligned} \int_{D_k} v u_k dx &\leq \left(\int_{D_k} v u_k^s dx \right)^{1/s} \left(\int_{D_k} v dx \right)^{1/s'} \\ &\leq C_0 C_{p,s} \left(\int_{D_k} v dx \right)^{1/s'} \left(\int_{D_k} f^{p'} \cdot \omega^{1-p'} dx \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим $\lambda(k) = \int_{D_k} v u_k dx$; тогда $\lambda'(k) = - \int_{D_k} v dx$. Пусть $k(\lambda) = \inf\{t > 0 : \lambda(t) < \lambda\}$ ($\lambda > 0$) – обратная функция к $\lambda(k)$. Из (11) следует

$$\lambda(k) \leq C_0 C_{p,s} \left(\int_{D_k} f^{p'} \omega^{1-p'} dx \right)^{1/p} (-\lambda'(k))^{1/s'}. \quad (12)$$

Отсюда

$$1 \leq \frac{C_0 C_{p,s}}{\lambda(k)} (-\lambda'(k))^{1/s'} \left(\int_{D_k} f^{p'} \omega^{1-p'} dx \right)^{1/p}.$$

Интегрируя это неравенство, получим

$$k(x) \leq C_0 C_{p,s} \int_0^{k(x)} (\lambda(t))^{-1} \left(-\frac{d\lambda}{dt} \right)^{1/s'} \left(\int_{D_t} f^{p'} \omega^{1-p'} dx \right)^{1/p} dt$$

или

$$k(x) \leq C_0 C_{p,s} \int_x^{\lambda(0)} (\lambda(s))^{-1} \left(-\frac{d\lambda}{ds} \right)^{-1/s} \left(\int_{D_s} f^{p'} \omega^{1-p'} dx \right)^{1/p} d\lambda,$$

$0 < x < \lambda(x)$. Замечая, что

$$\int_0^{\lambda(0)} k(\lambda)^{q-1} d\lambda = \int_0^{\text{ess sup}_{D'} u} \lambda(k) dk^{q-1} = \int_{D'} (u(x))^q v dx, \quad (13)$$

применим неравенство Харди [15; с. 41]:

$$\int_0^\infty \left(\int_x^\infty f(s) ds \right)^{q-1} dx \leq \left(\frac{q-1}{q-2} \right)^{q-1} \int_0^\infty x^{q-1} f^{q-1} dx,$$

где $q > 2$, $f(s) \geq 0$. Имеем ($q > 2$)

$$\begin{aligned} & \int_{D'} (u(x))^q v(x) dx \\ & \leq \left(\frac{q-1}{q-2} \right)^{q-1} (C_0 C_{p,s})^{q-1} \int_0^{\lambda(0)} \left(\int_{D_{k(\lambda)}} f^{p'} \omega^{1-p'} dx \right)^{(q-1)/p} \left(-\frac{d\lambda}{dk} \right)^{(q-1)/s} d\lambda \\ & = C_1 \int_0^{\text{ess sup}_{D'} u} \left(-\frac{d\lambda}{dk} \right)^{(s-q+1)/s} \left(\int_{D_k} f^{p'} \omega^{1-p'} dx \right)^{(q-1)/p} d\lambda, \end{aligned}$$

откуда в силу неравенства Гёльдера (с показателями $s/(s-q+1)$ и $s/(q-1)$) получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda(0)} k(\lambda)^{q-1} d\lambda & \leq C_1 \left(\int_0^{\text{ess sup}_{D'} u(x)} \left(-\frac{d\lambda}{dk} \right)^{\mu s/(s-q+1)} dk \right)^{(s-q+1)/s} \\ & \quad \times \left(\int_0^{\text{ess sup}_{D'} u(x)} k^{-\mu s/(q-1)} \left(\int_{D_k} f^{p'} \omega^{1-p'} dx \right)^{s/p} dk \right)^{(q-1)/s}, \end{aligned}$$

где $C_1 = (C_0 C_{p,s})^{q-1} ((q-1)/(q-2))^{q-1}$, $\mu = (q-1)(s-q+1)/s$. Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda(0)} k(\lambda)^{q-1} d\lambda & \leq C_1 \left(\int_0^{\lambda(0)} k(\lambda)^{q-1} d\lambda \right)^{(s-q+1)/s} \\ & \quad \times \left(\int_0^{\text{ess sup}_{D'} u(x)} k^{-\mu s/(q-1)} \left(\int_{D_k} f^{p'} \omega^{1-p'} dx \right)^{s/p} dk \right)^{(q-1)/s}, \end{aligned}$$

или

$$\int_0^{\lambda(0)} k(\lambda)^{q-1} d\lambda \leq C_1 \int_0^{\text{ess sup}_{D'} u(x)} k^{-\mu s/(q-1)} \left(\int_{D_k} f^{p'} \omega^{1-p'} dx \right)^{s/p} dk.$$

Применим неравенство Минковского к правой части ($s \geq p$) последнего неравенства:

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{\text{ess sup}_{D'} u(x)} k(\lambda)^{q-1} d\lambda \right)^{(q-1)/s} \\ & \leq C_1 \left(\int_{D'} f^{p'} \omega^{1-p'} dx \left(\int_0^{u(x)} k^{-\mu s/(q-1)} dk \right)^{p/s} \right)^{(q-1)/p} \\ & = C_2 \left(\int_{D'} f^{p'} \omega^{1-p'} (u(x))^{(1-(\mu s)/(q-1))p/s} dx \right)^{(q-1)/p}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $C_2 = C_1(1/(q-s))^{(q-1)/s}$ ($q > s$). Из (14) следует оценка

$$\int_{D'} (u(x))^q v(x) dx \leq C_3 \left(\int_{D'} f^{p'} \omega^{1-p'} (u(x))^{(p(q-s))/s} dx \right)^{s/q}. \quad (15)$$

Такое же неравенство имеет место и для $-u(x)$ в D'' :

$$\int_{D''} (-u(x))^q v(x) dx \leq C_3 \left(\int_{D''} f^{p'} \omega^{1-p'} (-u(x))^{(p(q-s))/s} dx \right)^{s/p}, \quad (16)$$

где $C_3 = ((q-1)/(q-2))^s (C_0 C_{p,s}/(q-s))^s$. Из оценок (15) и (16) следует (8).

Лемма 2 доказана.

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная область. Предположим, что $u \in W_0^{1,p}(D, \omega)$ – решение уравнения

$$Lu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

при $f^r \cdot v(\omega^{1-p'}/v)^{r/p'} \in L^1(D)$, $r > p'$, где $f = \sum_{i=1}^n |f_i|$, $p > 1$ и выполняется условие (2).

Тогда для выполнения неравенства

$$\left(\int_D |u(x)|^q v(x) dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_D v f^r \left(\frac{\omega^{1-p'}}{v} \right)^{r/p'} dx \right)^{1/r(p-1)}, \quad (17)$$

где $C > 0$ не зависит от v, ω, f, u, D , достаточно, чтобы $v \in RD$ ($v \in A_\infty$) и $(v, \omega) \in A_{ps}$ при $q > 2$, $q-1 < s < q$, $s > p$ ($s = p$),

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{s} - \frac{1}{r(p-1)} = 0. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу оценки (8), леммы 2 и неравенства Гёльдера (с показателями r/p' и $r/(r-p')$) получим

$$\begin{aligned} \left(\int_D |u(x)|^q v(x) dx \right)^{1/q} & \leq C_3 \left(\int_D v(x) |u(x)|^{(p(q-s)r)/s(r-p')} dx \right)^{s(r-p')/pr} \\ & \quad \times \left(\int_D v \left(\frac{f^{p'} \omega^{1-p'}}{v} \right)^{r/p'} dx \right)^{p's/rp}, \end{aligned}$$

откуда с учетом условия (18) следует оценка (17).

Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, $1 < p < \infty$ и выполняется условие (2). Предположим, что $u \in W_0^{1,p}(D, \omega)$ – решение уравнения

$$Lu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

при $v \cdot (\omega^{1-p'}/v)^{r/p'} \cdot f^r \in L^1(D)$, $r > p'$, $p > 1$; $f = \sum_{i=1}^n |f_i|$.

Тогда для выполнения неравенства

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |u(x)| \leq C \left(\int_D v(x) dx \right)^{1/p-1/s-1/r(p-1)} \left(\int_D v \left(\frac{\omega^{1-p'}}{v} \right)^{r/p'} f^r dx \right)^{1/r(p-1)}, \quad (19)$$

где $C > 0$ не зависит от v , ω , f , u , D , достаточно, чтобы $v \in RD$ ($v \in A_\infty$) и $(v, \omega) \in A_{ps}$ при $s > p$ ($s = p$),

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{s} - \frac{1}{r(p-1)} > 0. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda(k)$, $k(\lambda)$ те же, что и в лемме 2. Тогда из неравенства (12) следует

$$\lambda(k) \leq C_0 C_{p,s} \left(\int_{D_k} f^{p'} \omega^{1-p'} dx \right)^{1/p} (-\lambda'(k))^{1/s'}.$$

Применим неравенство Гёльдера к правой части (с показателями r/p' и $r/(r-p')$) с учетом того, что $r > p'$:

$$\lambda(k) \leq C_0 C_{p,s} \left(\int_{D_k} v dx \right)^{(r-p')/rp} \left(\int_{D_k} v \left(\frac{\omega^{1-p'}}{v} \right)^{r/p'} f^r dx \right)^{p'/rp} (-\lambda'(k))^{1/s'},$$

откуда в силу равенства $\lambda'(k) = - \int_{D_k} v dx$ получим

$$\lambda(k) \leq C_0 C_{p,s} (-\lambda'(k))^{1/p+1/s-1/r(p-1)} \left(\int_{D'} v \left(\frac{f^{p'} \omega^{1-p'}}{v} \right)^{r/p'} dx \right)^{1/r(p-1)}. \quad (21)$$

Принимая по внимание условие (20), а также равенства

$$\lambda(0) = \int_{D'} v u dx, \quad \lambda(\operatorname{ess\,sup}_{x \in D'} u(x)) = 0,$$

и интегрируя неравенство (21) получим оценку (19) для функции $u(x)$ в D' . Аналогичная оценка имеет место для функции $-u(x)$ в D'' .

Теорема 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная область, $1 < p < \infty$ и выполняется условие (2). Предположим, что $u \in W_0^{1,p}(D, \omega)$ – решение уравнения

$$Lu = h \quad (22)$$

при $|h|^{s'} v^{1-s'} \in L^1(D)$, $p < s < \infty$ ($s = p$).

Тогда для выполнения неравенства

$$\int_D |u(x)|^q v(x) dx \leq C \left(\int_D |h|^{s'} v^{1-s'} |u(x)|^{(p-1)(q-s)/(s-1)} dx \right)^{(s-1)/(p-1)}, \quad (23)$$

где $C > 0$ не зависит от v, ω, u, h, D , достаточно, чтобы $v \in RD$ ($v \in A_\infty$) и $(v, \omega) \in A_{ps}$ при $2 < q < \infty, q-1 < s < q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $\varphi = u_k(x)$ вместо пробной функции в (6), при $f_0 = h, f_i = 0, i = 1, \dots, n$, имеем

$$\int_{D_k} \omega |\nabla u|^p dx \leq \int_{D_k} |h| u_k dx.$$

Отсюда с помощью неравенства Гёльдера получим

$$\left(\int_{D_k} v u_k^s dx \right)^{p/s} \leq C_{p,s}^p \left(\int_{D_k} |h|^{s'} v^{1-s'} dx \right)^{1/s'} \left(\int_{D_k} v u_k^s dx \right)^{1/s},$$

откуда

$$\int_{D_k} v u_k dx \left(\int_{D_k} v dx \right)^{1/s'} \leq C_0 C_{p,s}^{p'} \left(\int_{D_k} |h|^{s'} v^{1-s'} dx \right)^{1/(p-1)s'}.$$

Используя обозначения из леммы 2, имеем

$$\lambda(k) \leq (-\lambda'(k))^{1/s'} C_0 C_{p,s}^{p'} \left(\int_{D_k} |h|^{s'} v^{1-s'} dx \right)^{1/(p-1)s'}. \quad (24)$$

Далее, все рассуждения леммы 2 повторяются. В итоге получим неравенство (23), где $C = (C_0 C_{p,s}^{p'}/(q-s))((q-1)/(q-2))^s, C_0 > 0$, не зависит от v, ω, u, h, D .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная область, $1 < p < \infty$ и выполняется условие (2). Предположим, что $u \in W_0^{1,p}(D, \omega)$ – решение уравнения

$$Lu = h$$

при $|h|^r v^{1-r} \in L^1(D), 1 < r < \infty$.

Тогда для выполнения неравенства

$$\left(\int_D |u(x)|^q v dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_D |h|^r v^{1-r} dx \right)^{1/r(p-1)}, \quad (25)$$

где $C > 0$ не зависит от v, ω, u, h, D , достаточно, чтобы $v \in RD$ ($v \in A_\infty$) и $(v, \omega) \in A_{ps}$ при $s > p$ ($s = p$), $q-1 < s < q, s > r', 1/r'p + 1/p'q = 1/s$.

Оценка (25) является следствием утверждения леммы 3 и неравенства Гёльдера (с показателями r/s' и $r/(r-s')$).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, $1 < p < \infty$ и выполняется условие (2). Предположим, что $u \in W_0^{1,p}(D, \omega)$ – решения уравнения

$$Lu = h$$

при $|h|^r v^{1-r} \in L^1(D), 1 < r < \infty$.

Тогда для выполнения неравенства

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |u(x)| \leq C \left(\int_D v(x) dx \right)^{1/(p-1)s'-1/s-1/r(p-1)} \left(\int_D |h|^r v^{1-r} dx \right)^{1/(p-1)}, \quad (26)$$

где $C > 0$ не зависит от v, ω, u, h, D , достаточно, чтобы $v \in RD$ ($v \in A_\infty$) и $(v, \omega) \in A_{ps}$ при $s > p$ ($s = p$), $r > s'$, $1/(s'(p-1)) - 1/s - 1/(r(p-1)) > 0$.

Оценка (26) является следствием оценки (24) и неравенства Гёльдера:

$$\lambda(k) \leq C_0 C_{p,s}^{p'} (-\lambda'(k))^{1/s'+1/s'(p-1)-1/r(p-1)} \left(\int_{D'} v \left(\frac{|h|}{v} \right)^r dx \right)^{1/r(p-1)}. \quad (27)$$

Интегрируя дифференциальное неравенство (27) относительно $\lambda(k)$ и учитывая, что $\lambda(0) = \int_{D'} v u dx$, $\lambda(\operatorname{ess\,sup}_{x \in D'} u(x)) = 0$, получим оценку (26).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная область, $u \in W^{1,r'}(D, v(\omega/v)^{r'/2})$ – решение уравнения

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = h, \quad (28)$$

относительно которого будем предполагать, что

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \omega(x) |\xi|^2 \quad (29)$$

для $\forall x \in D, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |h|^{q'} \cdot v^{1-q'} \in L^1(D)$ при $2 < q < \infty, 2 < r < \infty$.

Тогда для выполнения неравенства

$$\left(\int_D |\nabla u|^{r'} v \left(\frac{\omega^{1-p'}}{v} \right)^{r'/2} dx \right)^{1/r'} \leq C \left(\int_D |h|^{q'} v^{1-q'} dx \right)^{1/q'}, \quad (30)$$

где $C > 0$ не зависит от v, ω, u, h, D , достаточно, чтобы $v \in RD$ ($v \in A_\infty$) и $(v, \omega) \in A_{2s}, \beta = v(1/\omega v)^{r'/2} \in A_r$ при $s > 2$ ($s = 2$), $q < s < q-1$,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{s} - \frac{1}{r} = 0. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем следовать методу работы [10; с. 84, § 5]. Пусть $\psi_i \in C_0^\infty(D); z_i \in W_0^{1,p}(D, \omega)$ – решение уравнения

$$\mathcal{L}z_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (32)$$

Тогда

$$\int_D u \psi_{x_i}^i dx = \int_D u \mathcal{L}z_i dx = \int_D \mathcal{L}u z_i dx = \int_D h z_i dx.$$

С помощью оценки теоремы 1 ($p = 2, L = \mathcal{L}$) имеем

$$-\int_D u_{x_i} \psi^i dx = \int_D u \psi_{x_i}^i dx \leq \left(\int_D |z_i|^q v dx \right)^{1/q} \left(\int_D |h|^{q'} v^{1-q'} dx \right)^{1/q'}$$

$$\leq \left(\int_D v |\psi^i|^r \left(\frac{1}{\omega v} \right)^{r/2} dx \right)^{1/r} \left(\int_D |h|^{q'} v^{1-q'} dx \right)^{1/q'}. \quad (33)$$

Используя сопряженность весовых пространств Лебега из неравенства (33) получим оценку (30). Отметим, что условие $\beta \in A_r$ нам понадобилось для справедливости равенства $\tilde{C}_0^\infty = L^r(D, \beta)$.

Теорема 5 доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная область, $u \in W_0^{1,p}(D, \omega) \cap L^{r'}(D, v)$ – решение уравнения (28), относительно которого будем предполагать выполнение условия (29), $|h|^{q'} v^{1-q'} \in L^1(D)$ при $2 < q < \infty$.

Тогда для выполнения неравенства

$$\left(\int_D |u(x)|^{r'} v dx \right)^{1/r'} \leq C \left(\int_D |h|^{q'} v^{1-q'} dx \right)^{1/q'}, \quad (34)$$

где $C > 0$ не зависит от v, ω, u, h, D , достаточно, чтобы $v \in A_{r'}$ и $(v, \omega) \in A_{2s}$, при $2 < s < \infty, q - 1 < s < q, r > s', 1/(2r') = 1/s - 1/(2q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предыдущей теоремы. Пусть $\psi \in C_0^\infty(D), z \in W_0^{1,p}(D, \omega)$ – решение уравнения $\mathcal{L}z = \psi$ (о существовании решения этой задачи см., например, [11]). Тогда

$$\begin{aligned} \int_D u \psi dx &= \int_D u \mathcal{L}z dx = \int_D \mathcal{L}u z dx = \int_D h z dx \\ &\leq \left(\int_D |z|^q v dx \right)^{1/q} \left(\int_D |h|^{q'} v^{1-q'} dx \right)^{1/q'}. \end{aligned}$$

Правая часть на основании оценки (26) из утверждения теоремы 4 оценивается сверху выражением

$$C \left(\int_D |\psi|^r v^{1-r} dx \right) \left(\int_D |h|^{q'} v^{1-q'} dx \right)^{1/q'}.$$

Откуда в силу сопряженности весовых пространств Лебега получим (34).

ТЕОРЕМА 7. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, $u \in W_0^{1,r'}(D, v(\omega/v)^{r'/2})$ – решение уравнения (28) при $2 < r < \infty$, и выполнены условия (29), $|h| \in L^1(D)$.

Тогда для выполнения неравенства

$$\left(\int_D |\nabla u|^{r'} v \left(\frac{\omega}{v} \right)^{r'/2} dx \right)^{1/r'} \leq C \left(\int_D v dx \right)^{1/2 - 1/s - 1/r} \left(\int_D |h| dx \right), \quad (35)$$

где $C > 0$ не зависит от v, ω, u, h, D , достаточно, чтобы $v \in RD$ и $(v, \omega) \in A_{2s}$, $\beta = v(1/(\omega v))^{r/2} \in A_r$ при $2 < s < \infty, 1/2 - 1/s - 1/r > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 7 аналогично доказательству теоремы 5, надо только применить теорему 2 вместо теоремы 1.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, $u \in W_0^{1,p}(D, \omega) \cap L^{r'}(D, v)$ – решение уравнения (28) при условии (29), $1 \leq r < \infty, |h| \in L^1(D)$.

Тогда для выполнения неравенства

$$\left(\int_D |u(x)|^{r'} v \, dx \right)^{1/r'} \leq C \left(\int_D v \, dx \right)^{1/2r' - 1/s} \left(\int_D |h| \, dx \right), \quad (36)$$

где $C > 0$ не зависит от v , ω , u , h , D , достаточно, чтобы $v \in A_{r'}$ и $(v, \omega) \in A_{2s}$, при $2 \leq s < \infty$, $s' < r < \infty$, $1/2r' - 1/s > 0$.

Доказательство теоремы 8 аналогично доказательству теоремы 6.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Stampacchia, “Contributi alla regolarizzazione della soluzioni del problemi al contro per equazi del secondo ordine ellitici”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **12** (1958), 223–245.
- [2] H. F. Weinberger, “Symmetrization in uniformly elliptic problems”, *Studies in Mathematical Analysis and Related Topics*, Stanford Univ. Press, Stanford, Calif., 1962, 424–428.
- [3] M. Chicco, “An a priori inequality concerning elliptic second order partial differential equations of variational type”, *Matematiche (Catania)*, **26**:1 (1971), 173–182.
- [4] В. Г. Мазья, “О слабых решениях задач Дирихле и Неймана”, *Тр. ММО*, **20** (1969), 137–172.
- [5] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.
- [6] G. Talenti, “Elliptic equations and rearrangements”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **3**:4 (1976), 697–718.
- [7] P. Drabek, A. Kufner, F. Nicolosi, *Nonlinear Elliptic Equations (Singular and Degenerated Cases)*, West Bohemia Univ., Pilshen, 1996.
- [8] Ф. И. Мамедов, “О регулярности решений линейных и квазилинейных уравнений эллиптического типа в дивергентной форме”, *Матем. заметки*, **53**:1 (1993), 68–82.
- [9] Kilpeläinen, “Smooth approximation in weighted Sobolev spaces”, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **38**:1 (1997), 29–35.
- [10] W. Littman, G. Stampacchia, H. F. Weinberger, “Regular points for equations with discontinuous coefficients”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **17** (1963), 43–77.
- [11] E. B. Fabes, C. E. Kenig, R. P. Serapioni, “The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations”, *Comm. Partial Differential Equations*, **7**:1 (1982), 77–116.
- [12] E. B. Fabes, D. Jerison, C. Kenig, “The Wiener test for degenerate elliptic equations”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **32**:3 (1982), 151–182.
- [13] E. T. Sawyer, R. L. Wheeden, “Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces”, *Amer. J. Math.*, **114**:4 (1992), 813–874.
- [14] F. I. Mamedov, “On two-weighted Sobolev inequalities in unbounded domains”, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **21** (1999), 117–123.
- [15] В. Г. Мазья, *Пространства Соболева*, Изд-во ЛГУ, Л., 1985.

Р. А. Аманов

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Поступило

14.07.2006

Ф. И. Мамедов

Университет Дичле, Турция

E-mail: farman-m@mail.ru