Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Костин, Применение формулы Маслова для асимптотического решения одной задачи об упругих деформациях, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 1, 50–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4335>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:13:05

Применение формулы Маслова для асимптотического решения одной задачи об упругих деформациях

Д. В. Костин

Предложена схема бифуркационного анализа равновесных конфигураций слабо неоднородной упругой балки на упругом основании в условиях двумодового вырождения, обобщающая схему Даринского–Сапронова, ранее разработанную для случая однородной балки. Переход к неоднородной балке потребовал замены условия постоянства пары собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ из линейной части уравнения (в нуле) на условие существования пары векторов, гладко зависящих от параметров, линейная оболочка которых инвариантна относительно $\mathcal{A}$. Показано, что такой пары достаточно для построения главной части ключевой функции и для проведения анализа ветвлений равновесных конфигураций балки. Построение искомой пары векторов основано на формуле ортогонального проектора на корневое подпространство $\mathcal{A}$ (из теории возмущений самосопряженных операторов по версии Маслова). Проанализировано влияние характера неоднородности балки на форму ее прогиба.

Библиография: 11 названий.

В настоящей статье предложена схема анализа бифуркаций равновесных конфигураций слабо неоднородной упругой балки на упругом основании в условиях двумодового вырождения. Решение аналогичной задачи в случае однородной балки ранее было дано Даринским и Сапроновым [1], [2]. Переход к случаю неоднородной балки потребовал перестройки в исследовательской схеме Даринского и Сапронова, в основе которой лежало условие постоянства пары собственных функций e_1, e_2 второго дифференциала (в нуле) функционала энергии. В случае неоднородной балки это условие нарушается и, более того, оно не допускает прямого обобщения, например, в виде условия существования непрерывного семейства собственных функций. В предлагаемой схеме условие постоянных собственных функций заменено условием существования пары гладких векторных полей $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$, линейная оболочка которых инвариантна относительно второго дифференциала в нуле. Наличие такой пары достаточно для построения главной части ключевой функции и, как следствие, для проведения анализа ветвления равновесных конфигураций балки.

В построении требуемой пары векторных полей главную роль сыграла взятая из монографии Маслова [3] формула ортогонального проектора (на линейную оболочку $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$).

Рассмотрение случая слабо неоднородной балки приводит к “понижению” симметрии ключевой функции и увеличению на единицу размерности ее базы деформации (появляется дополнительное квадратичное слагаемое в главной части ключевой функции). Анализ бифуркационных диаграмм и бифурцирующих критических точек в этой ситуации несколько усложняется [4], но выявляет новые бифуркационные эффекты.

Случай однородной балки. Колебания и волновые движения упругой балки на упругом основании изучали Митропольский, Мосеенков [5], Томпсон, Стюарт [6], Бардин, Фурта [7] и др. Простейшая нелинейная (промасштабированная) модель движений однородной балки описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha w + w^3 = 0,$$

где w – прогиб балки (поле смещений точек средней линии упругой балки, расположенной вдоль оси x). Заметим, что аналогичное уравнение возникает и в теории кристаллов [8], в которой w – параметр порядка.

Как известно, первый шаг в изучении такой задачи – отыскание равновесных (стационарных) состояний, определяемых уравнением

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w + w^3 = 0. \quad (1)$$

Если рассмотреть стандартные краевые условия

$$w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0, \quad (2)$$

то полученная граничная задача может допускать 2-мерные вырождения, порождающие 2-модовые бифуркации с интересными геометрическими и физическими эффектами. Решение этой задачи проводится на основе конечномерной редукции [9] к описанию экстремалей 2-параметрического семейства полиномов от двух переменных. В случае слабо неоднородной балки также допускается аналогичное сведение, но при этом в полиноме появляется дополнительное слагаемое, создающее более сложную картину бифуркационного поведения решений.

Уравнение (1) является уравнением Эйлера для экстремалей функционала

$$V = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \alpha w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dx. \quad (3)$$

Двумерное вырождение нулевой экстремали происходит при

$$\kappa = \kappa_1 := (p^2 + q^2)\pi^2, \quad \alpha = \alpha_1 := p^2 q^2 \pi^4, \quad p, q \in \mathbb{N},$$

со стандартным базисом (модами бифуркации) ядра второго дифференциала

$$e_1 = \sqrt{2} \sin(p\pi x), \quad e_2 = \sqrt{2} \sin(q\pi x).$$

Ниже предполагается, что $p = 1$, $q = 2$ и, соответственно, $\kappa_1 = 5\pi^2$, $\alpha_1 = 4\pi^4$ (эти значения являются наименьшими из тех, при которых происходит 2-мерное вырождение; в остальных случаях анализ аналогичен).

При сделанных предположениях анализ возможных бифуркационных эффектов осуществляется посредством редукции Ляпунова–Шмидта [2] к (ключевой) функции (двух переменных)

$$W(\xi, \delta) = \inf_{w: \langle w, e_1 \rangle = \xi_1, \langle w, e_2 \rangle = \xi_2} V(w, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2), \quad (4)$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \delta = (\delta_1, \delta_2).$$

Функционал (3) инвариантен относительно инволюций J_1, J_2 :

$$J_2(p)(x) := p(1 - x), \quad J_1 := -J_2.$$

Следовательно, функция (4) обладает симметрией прямоугольного параллелограмма:

$$W(-\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, -\xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2),$$

из которой вытекает [2] справедливость асимптотического представления

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где $U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \delta)$ – линейная ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2 . Таким образом, для ключевой функции имеет место асимптотическое представление

$$W_0(\xi, \delta) = \frac{\lambda_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{4} (A \xi_1^4 + 2B \xi_1^2 \xi_2^2 + C \xi_2^4) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \quad (5)$$

где

$$\lambda_1 = \delta_1 - \pi^2 \delta_2, \quad \lambda_2 = \delta_1 - 4\pi^2 \delta_2,$$

$$A = \int_0^1 e_1^4 dx = \frac{3}{2}, \quad B = \int_0^1 e_1^2 e_2^2 dx = 3, \quad C = \int_0^1 e_2^4 dx = \frac{3}{2}.$$

Сократив на множитель $3/2$, получим функцию (5) с нормализованной главной частью:

$$\widetilde{W}_0(\xi, \delta) = \widetilde{U}(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где

$$\widetilde{U}(\xi, \delta) = \frac{\widetilde{\lambda}_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\widetilde{\lambda}_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{4} (\xi_1^4 + 4\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4).$$

“Геометрический сюжет” бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращениям управляющих параметров) для функции $\widetilde{W}_0(\xi, \delta)$ полностью определяются ее главной частью $\widetilde{U}(\xi, \delta)$, которая представляет собой “возмущенную двумерную сборку” (с коэффициентом двойного отношения $a = 2$), четную по каждой переменной.

Критические точки определяются системой уравнений

$$\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \xi_1} = \widetilde{\lambda}_1 \xi_1 + \xi_1^3 + 2\xi_1 \xi_2^2 = 0,$$

$$\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \xi_2} = \widetilde{\lambda}_2 \xi_2 + 2\xi_1^2 \xi_2 + \xi_2^3 = 0,$$

все решения которой делятся на три типа:

- 1) 0-решение $\xi_1 = \xi_2 = 0$;
- 2) 1-модовые решения $\xi_1 = \pm\sqrt{-\tilde{\lambda}_1}$, $\lambda_1 < 0$, $\xi_2 = 0$ и $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \pm\sqrt{-\tilde{\lambda}_2}$, $\lambda_2 < 0$;
- 3) 2-модовые решения $\xi_1 = \pm\sqrt{(\tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2)/3}$, $\xi_2 = \pm\sqrt{(\tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1)/3}$, $\tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2 > 0$, $\tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1 > 0$.

Пусть $\theta_1 = \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2$, $\theta_2 = \tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1$. Так как матрица Гессе функции $\tilde{U}$ представима в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 + 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 & 4\xi_1\xi_2 \\ 4\xi_1\xi_2 & \tilde{\lambda}_2 + 2\xi_1^2 + 3\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

то, как нетрудно проверить, при $\theta_1 > 0$ и $\theta_2 > 0$ существуют четыре 2-модовые критические точки индекса 1. Все 1-модовые точки при этом являются точками локальных минимумов, а ноль – критической точкой индекса 2. Рождение 1-модовых критических точек происходит при переходах параметров $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ в области отрицательных значений.

Каустика (бифуркационная диаграмма функций [10]) $\Sigma_{\tilde{U}}$ функции $\tilde{U}$ разбивает плоскость управляющих параметров на шесть зон

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\}, \\ \omega_1 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\}, \\ \omega_2 &= \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 < 0\}, \\ \omega_3 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 < 0, \theta_2 > 0\}, \\ \omega_4 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 < 0\}, \\ \omega_5 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0\}. \end{aligned}$$

Каждой зоне соответствует свой расклад (bif-расклад) бифурцирующих критических точек: параметрам из зоны ω_0 отвечает случай единственной критической точки (точка минимума в нуле), для ω_1 , ω_2 – пара симметрично расположенных (относительно нуля) 1-модовых точек минимума и седло в нуле, для ω_3 , ω_4 – пара симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, пара 1-модовых седел и точка локального максимума в нуле, для ω_5 – четверка симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, четверка 2-модовых седел и точка локального максимума в нуле.

При обходе плоскости управляющих параметров против часовой стрелки вокруг нуля, начиная с зоны ω_0 , соответствующие метаморфозы линий уровней и распределений критических точек изображены на диаграмме (рис. 1).

В этом случае появляются те и только те расклады бифурцирующих критических точек (bif-расклады), которым соответствуют следующие целочисленные векторы: $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(4, 4, 1)$ ¹ (см. [1], [2]).

¹Компонента l_k строки (l_0, l_1, l_2) равна количеству критических точек с индексом Морса k в рассматриваемом раскладе бифурцирующих критических точек.

Рис. 1

Случай слабо неоднородной балки. Упругие равновесия слабо неоднородной балки описываются уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(q \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w + w^3 = 0, \quad q(x) = 1 + \varepsilon \gamma(x), \quad (6)$$

где ε – малый параметр, γ – гладкая функция. Уравнение (6) (также рассматриваемое на отрезке $[0, 1]$ числовой оси при краевых условиях (2)) определяет экстремали функционала

$$V = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(q \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \alpha w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dx. \quad (7)$$

Наличие “весового” множителя q не позволяет применять исследовательскую схему работы [1], так как из-за него не выполняется условие постоянства мод бифуркации. На нем основан вычислительный алгоритм [1]. Тем не менее, бифуркационный анализ решений краевой задачи (6), (2) также можно осуществить посредством редукции Ляпунова–Шмидта к ключевой функции более общего вида

$$\widetilde{W}(\xi, \delta) = \inf_{w: \langle w, \tilde{e}_1 \rangle = \xi_1, \langle w, \tilde{e}_2 \rangle = \xi_2} V(w, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2), \quad (8)$$

где $\{\tilde{e}_k\}$ – “возмущенные” моды бифуркации

$$\tilde{e}_k = e_k + \varepsilon h_k + o(\varepsilon),$$

образующие базис в 2-мерном корневом подпространстве оператора Гессе $\mathcal{H} = \mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{B}$ в нуле (соответствующего функционалу (7)), где

$$\mathcal{A}u := \frac{d^4 w}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha I, \quad \mathcal{B}w := \frac{d^2}{dx^2} \left(\gamma \frac{d^2 w}{dx^2} \right),$$

$$e_k = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$$

(элементы $\tilde{e}_k$ не являются, вообще говоря, собственными функциями оператора $\mathcal{H}$).

Основная техническая трудность в построении главной части ключевой функции (8) состоит в вычислении коэффициентов h_k . Их можно определить на основе формулы ортогонального проектора на корневое подпространство возмущенного симметричного оператора, приведенной в монографии Маслова [3].

Итак, вместо собственных функций рассматриваем такие элементы $\tilde{e}_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, для которых

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda) \tilde{e}_j(\lambda) = \sum_k \alpha_{jk}(\lambda) \tilde{e}_k(\lambda).$$

Функции $\tilde{e}_j(\lambda)$ будем называть *корневыми*.

Важным сопутствующим обстоятельством в предложенном здесь подходе является то, что входящие в эти соотношения функции $\alpha_{jk}(\lambda)$, $\tilde{e}_j(\lambda)$ будут гладко зависеть от λ . В качестве искомых базисных элементов можно взять

$$\tilde{e}_k(\lambda) := \mathbf{P}(\lambda)(e_k),$$

где

$$\mathbf{P}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} \mathcal{R}(\lambda, z) dz$$

– ортопроектор на двумерное корневое подпространство, ℓ – окружность достаточно малого радиуса с центром в нуле (на комплексной плоскости), $\mathcal{R}(\lambda, z)$ – резольвента

$$\mathcal{R}(\lambda, z) = (\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{B} - zI)^{-1}.$$

Таким образом,

$$\tilde{e}_k = e_k + \varepsilon h_k + o(\varepsilon), \quad (9)$$

где

$$h_k = \mathcal{M} e_k, \quad (10)$$

$$\mathcal{M} := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B} (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz. \quad (11)$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Возмущенные корневые векторы $\tilde{e}_k$, $k = 1, 2$, можно представить в виде (9), где h_k определяются соотношениями (10), (11).*

Вычисление интегральных коэффициентов (по формуле (11)). Из предыдущих рассуждений следует, что для получения корневых векторов $\tilde{e}_k$ необходимо вычислить интеграл

$$\mathcal{M} e_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B} (\mathcal{A} - zI)^{-1} e_k dz \quad (12)$$

с учетом краевых условий (2) (здесь ℓ – контур $|z| = 1$).

Собственное число $z = 0$ двукратно. Ему отвечают собственные элементы $e_k = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$, $k = 1, 2$.

Заметим, что если e_k – собственный вектор, отвечающий собственному числу z_k : $\mathcal{A} e_k = z_k e_k$, то

$$(\mathcal{A} - zI)^{-1} (\mathcal{A} - z_k I) e_k = 0$$

или

$$(\mathcal{A} - zI)^{-1} (\mathcal{A} - zI + zI - z_k I) e_k = e_k - (z_k - z) (\mathcal{A} - zI)^{-1} e_k = 0.$$

Отсюда получаем

$$(\mathcal{A} - zI)^{-1}e_k = \frac{e_k}{z_k - z}.$$

Таким образом, формулу (12) можно записать в виде

$$\mathcal{M}e_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(\mathcal{A} - zI)^{-1}\mathcal{B}e_k}{z_k - z} dz. \quad (13)$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{A}$ с заданной областью определения и краевыми условиями является симметричным, а собственные функции в силу следствия теоремы 1 [11; с. 91] образуют полную систему в $L^2[0, 1]$.

Рассмотрим функцию $g(x) = \mathcal{B}e_k$, $g(x) \in L^2[0, 1]$, и разложим ее в ряд по собственным функциям оператора $\mathcal{A}$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x), \quad (14)$$

где

$$c_n = \int_0^1 g(s) e_n(s) ds = \int_0^1 e_n(s) (\gamma(s) e_k''(s))'' ds. \quad (15)$$

Интегрируя по частям, преобразуем интеграл (15) к виду

$$c_n = -(n\pi)^2 \int_0^1 e_n(s) \gamma(s) e_k''(s) ds = (nk\pi^2)^2 \int_0^1 \gamma(s) e_n(s) e_k(s) ds.$$

Пользуясь формулой (14) в интеграле (13), при $k = 5\pi^2$, $\alpha = 4\pi^4$ получаем следующие разложения:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}e_k(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(\mathcal{A} - zI)^{-1}}{z} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x) dz = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e_n(x) dz}{z(z_n - z)} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} c_n e_n(x) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z_n} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z_n - z} \right) dz = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{c_n e_n(x)}{z_n}. \end{aligned}$$

Здесь было учтено, что $z_1 = z_2 = 0$ и

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2} = 0.$$

Таким образом, на основе (12) получаем для возмущенных собственных функций (в случае слабой неоднородности)

$$\begin{aligned} Me_1 &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}n^2}{(n^2 - 4)(n^2 - 1)} \left(\int_0^1 \gamma(s) \sin(n\pi s) \sin(\pi s) ds \right) \sin(n\pi x), \\ Me_2 &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{8\sqrt{2}n^2}{(n^2 - 4)(n^2 - 1)} \left(\int_0^1 \gamma(s) \sin(n\pi s) \sin(2\pi s) ds \right) \sin(n\pi x). \end{aligned} \quad (16)$$

Теперь, когда известны первые асимптотики корневых векторов $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$, можно построить главную часть ключевой функции (с точностью до линейной замены координат)

$$W_q(\xi, \nu) = \frac{1}{2}(\nu_1 \xi_1^2 + \nu_2 \xi_2^2 + 2\nu_3 \xi_1 \xi_2) + \frac{1}{4}(A \xi_1^4 + 2B \xi_1^2 \xi_2^2 + C \xi_2^4) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\nu, \varepsilon) + o(\nu, \varepsilon),$$

где

$$\nu_1 = \int_0^1 \left(q \left(\frac{d^2 \tilde{e}_1}{dx^2} \right)^2 - (\kappa_1 + \delta_1) \left(\frac{d \tilde{e}_1}{dx} \right)^2 + (\alpha_1 + \delta_2) \tilde{e}_1^2 \right) dx, \quad (17)$$

$$\nu_2 = \int_0^1 \left(q \left(\frac{d^2 \tilde{e}_2}{dx^2} \right)^2 - (\kappa_1 + \delta_1) \left(\frac{d \tilde{e}_2}{dx} \right)^2 + (\alpha_1 + \delta_2) \tilde{e}_2^2 \right) dx, \quad (18)$$

$$\nu_3 = \varepsilon \int_0^1 \left(\gamma \frac{d^2 \tilde{e}_1}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \tilde{e}_2}{dx^2} \right) dx, \quad (19)$$

$$A = C = \int_0^1 e_1^4 dx = \frac{3}{2}, \quad B = \int_0^1 e_1^2 e_2^2 dx = 3.$$

После сокращения на множитель $3/2$ получаем искомое представление ключевой функции. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Для ключевой функции (8) имеет место представление*

$$\widetilde{W}_q(\xi, \nu) = \frac{1}{2}(\tilde{\nu}_1 \xi_1^2 + \tilde{\nu}_2 \xi_2^2 + 2\tilde{\nu}_3 \xi_1 \xi_2) + \frac{1}{4}(\xi_1^4 + 4\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\tilde{\nu}, \varepsilon) + o(\tilde{\nu}, \varepsilon),$$

где $\tilde{\nu}_j$ определены соотношениями (10), (11), (16), (17)–(19).

По сравнению с функцией W_0 , определенной равенством (5), здесь появилось дополнительное слагаемое $\tilde{\nu}_3 \xi_1 \xi_2$, разрушающее симметрию прямоугольника.

Исследование каустики. Так как в “неоднородном случае” появляется третий управляющий параметр $\tilde{\nu}_3$, то дискриминантное множество будет двумерной поверхностью в трехмерном пространстве.

Рассмотрим систему уравнений, определяющую критические точки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_1} &= \tilde{\nu}_1 \xi_1 + \xi_1^3 + 2\xi_1 \xi_2^2 + \tilde{\nu}_3 \xi_2 = 0, \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_2} &= \tilde{\nu}_2 \xi_2 + 2\xi_1^2 \xi_2 + \xi_2^3 + \tilde{\nu}_3 \xi_1 = 0, \\ \det H &= \begin{vmatrix} \tilde{\nu}_1 + 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 & 4\xi_1 \xi_2 + \tilde{\nu}_3 \\ 4\xi_1 \xi_2 + \tilde{\nu}_3 & \tilde{\nu}_2 + 2\xi_1^2 + 3\xi_2^2 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

(здесь H – матрица Гессе).

Решая данную систему относительно $\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2, \tilde{\nu}_3$ и переходя к полярным координатам $\xi_1 = \rho \sin \varphi, \xi_2 = \rho \cos \varphi$, получим

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_1 &= -\rho^2 \frac{3 + \cos(2\varphi)^3}{2 + \sin(2\varphi)^2} = 0, \\ \tilde{\nu}_2 &= -\rho^2 \frac{3 - \cos(2\varphi)^3}{2 + \sin(2\varphi)^2} = 0, \\ \tilde{\nu}_3 &= -3\rho^2 \frac{\sin(2\varphi)^3}{4 + 2\sin(2\varphi)^2} = 0.\end{aligned}$$

На основе этой системы соотношений получено (в компьютерной среде Maple) следующее изображение каустики (рис. 2):

Рис. 2

Если зафиксировать $\tilde{\nu}_3 = \text{const} \neq 0$, то получим двумерное сечение каустики, посредством которого удобно иллюстрировать появление метаморфоз линий уровней (в зависимости от изменения управляющих параметров); см. рис. 3.

Рис. 3

Рис. 4

На рис. 4 изображены линии уровня главной части ключевой функции (при “типичных” значениях параметров $\tilde{\nu}_1$, $\tilde{\nu}_2$, $\tilde{\nu}_3$ и функции $\gamma = 0,01 \cdot \sin(2\pi x)$): сепаратрисные линии уровня ключевой функции и прогибы, соответствующие точкам минимума.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, “О двухмодовых бифуркациях решений одной вариационной краевой задачи для уравнения четвертого порядка”, *Понтрягинские чтения*, XI: Сб. трудов. Часть 1, ВГУ, Воронеж, 2000, 57–64.
- [2] Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев, “Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов”, *Соврем. проблемы матем. Фундам. напр.*, **12** (2004), 3–140.
- [3] В. П. Маслов, *Асимптотические методы и теория возмущений*, Наука, М., 1988.
- [4] Д. В. Костин, “Ортопроектор теории возмущения линейных операторов и бифуркации равновесий слабо неоднородной упругой балки”, *Труды Воронежской зимней математической школы С. Г. Крейна*, ВГУ, Воронеж, 2006, 106–113.
- [5] Ю. О. Мітропольский, Б. І. Мосеєнков, *Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи)*, Вид-во Київського ун-ту, Київ, 1961.
- [6] J. M. T. Thompson, H. B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Geometrical methods for engineers and scientists, John Wiley & Sons, Chichester, 1986.
- [7] Б. С. Бардин, С. Д. Фурта, “Локальная теория существования периодических волновых движений бесконечной балки на нелинейно упругом основании”, *Актуальные проблемы классической и небесной механики*, Эльф, М., 1998, 13–22.
- [8] Ю. А. Изюмов, В. И. Сыромятников, *Фазовые переходы и симметрия кристаллов*, Наука, М., 1984.
- [9] М. А. Красносельский, Н. А. Бобылев, Э. М. Мухамадиев, “Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления”, *Докл. АН СССР*, **240:3** (1978), 530–533.
- [10] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов*, Наука, М., 1982.
- [11] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.

Д. В. Костин

Воронежский государственный университет
E-mail: dvkostin@rambler.ru

Поступило

18.01.2007