Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Квазитермодинамика и поправка к закону Стефана–Больцмана, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 1, 77–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4336>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:40:29

Квазитермодинамика и поправка к закону Стефана–Больцмана

В. П. Маслов

Приводятся общие соображения относительно поправки к термодинамическому пределу в статистической физике.

Библиография: 12 названий.

В настоящей заметке мы приведем некоторые общие соображения относительно поправки к термодинамическому пределу в статистической физике. В начале остановимся на излучении черного тела.

Формула Релея–Джинса для излучения черного тела в классической физике, справедливая для низких частот, в 1900 г. была продолжена на высокие частоты знаменитой формулой Планка, который предположил дискретность энергии и вел константу, получившую название константы Планка. Из этой формулы следовал, в частности, закон Стефана–Больцмана, открытый ранее.

Вывод формулы Релея–Джинса основывался на уравнении Максвелла и распределении Гиббса в классической механике. Он использовал также полную изотропию черного излучения.

На основе предположения о полной изотропии излучения черного тела (см. [1; с. 205]) мы строго получили поправку к формуле Планка и закону Стефана–Больцмана. В большом числе точных экспериментов по черному излучению эти поправки не были замечены. С другой стороны, точное уравнение Максвелла для свободных фотонов, на основе которого выводится закон Релея–Джинса, не содержит параметра h , и появление поправки к закону, содержащей параметр h , индуцирует задачу о возможности переноса поправки, содержащей h , на уравнение Максвелла.

Что касается закона Стефана–Больцмана, который имеет вид

$$F = -\frac{4\delta}{3c}VT^4, \quad (1)$$

где F – свободная энергия, V – объем, c – скорость света, δ – константа Стефана–Больцмана, то здесь, действительно, возникали некоторые небольшие неувязки с экспериментом. Так в Физическом энциклопедическом словаре 1966 г. [2; с. 82] говорится: “Экспериментально установленное значение $\delta_{\text{эксп}}$ несколько превышает теоретическое значение $\delta_{\text{теор}}$, полученное непосредственным интегрированием формулы Планка по длине волны λ (или по частоте ν). Причины расхождения не совсем ясны”.

Обратимся к истории. В начале 1860-х гг. Кирхгоф сформулировал закон теплового излучения, согласно которому отношение лучеиспускательной способности

нагретого тела к его поглотительной способности не зависит от природы тела. Это отношение является функцией температуры и частоты излучения и одинаково для всех тел. Однако Кирхгоф не сумел предложить соответствующей формулы.

Больцман уточнил этот закон следующим образом: энергия излучения пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры. Утверждение Больцмана указывало лишь на общую величину энергии, но не определяло, как именно распределяется энергия в спектре излучения.

Вскоре вычисления Релея привели его к выводу, что нагретое тело независимо от температуры должно излучать бесконечно большую энергию в ультрафиолетовой области спектра. Этот вывод, который стали называть термином “ультрафиолетовая катастрофа”, казался парадоксальным, так как противоречил представлениям классической физики.

Все это явилось предпосылками исследований, которыми занимался Планк. Он вывел формулу зависимости распределения энергии в спектре излучения от температуры и длины волны (частоты).

Основная идея Планка, которую он изложил в докладе на заседании Немецкого физического общества в декабре 1900 г., заключалась в том, что испускание и поглощение энергии атомами и молекулами происходит не непрерывно, как считалось в классической физике, а дискретно – квантами. Эта новаторская идея породила новую дисциплину – квантовую физику.

Считается, что Планк сам всерьез не верил в реальную дискретность энергии и что, якобы, это свойство ему понадобилось как прием для обоснования формулы, которую он нашел для излучения черного тела. Это неверно. Формула, которую предъявил Планк, не использовала факта дискретности энергии: она справедлива и в случае, когда энергия непрерывна, и те результаты, которые из нее следуют – закон Стефана–Больцмана, формула Релея–Джинса, закон Вина – получаются из интеграла по непрерывной энергии, а не из ряда по дискретным состояниям энергии.

Однако строгий вывод этой формулы, приведенный автором в [3], относящийся к другой науке – вероятностной теории чисел – дает именно ее дискретный вариант. Применительно к излучению черного тела он означает уточнение дискретной формулы Планка, которая учитывает, что энергия распространяется порциями hn .

Вывод этого вероятностного соотношения основан на общем законе, который автор назвал “законом отсутствия предпочтения” [4], применив это соотношение к объектам экономики, лингвистики, семиотики. В физике этот закон приводит, точнее заменяет, понятие “энтропии” (о связи с энтропией см. [5], [6]).

Указанная дискретность позволяет уточнить, в частности, закон Стефана–Больцмана.

Однако те оценки, которые приведены в [3], этого сделать не позволяют. Нужна более точная общая оценка, приведенная в работе [7]. Шредингер в знаменитой популярной философской книге “Что такое жизнь?” [8] отмечает, что статистические законы, имеющие место при $N \rightarrow \infty$, где N – число частиц, справедливы с точностью не более, чем до $\sqrt{N}$. В общей теореме автора [3] дается оценка с точностью до $N^{3/4+\varepsilon}$, где ε сколь угодно мало. Однако в конкретном примере, когда последовательность λ_n , участвующая в вышеуказанных теоремах, пропорциональна n , оценку удастся уточнить до $N^{1/2}(\ln N)^{1/2+\varepsilon}$, где ε сколь угодно мало, подобно тому, как это было сделано для другого случая в работе [9].

Пусть выполнено условие:

$$\sum_{i,j,k} (i+j+k) N_{i,j,k} \leq E, \quad (2)$$

где E – константа, $N_{i,j,k}$ – любые целые, равноценны, иначе говоря, равновероятны или равномерно распределены. Тогда в силу аналога теоремы [3] большинство вариантов будет скапливаться около следующей зависимости “кумулятивной вероятности”

$$B_l = \sum_{i+j+k \leq l} N_{i,j,k},$$

$l \leq s$, $s = \max(i+j+k)$ в неравенстве (2)

$$B_l = \sum_{i=1}^l \frac{1}{2} \cdot \frac{i(i+1)}{e^{bi} - 1}, \quad (3)$$

где b определяется из условий

$$\sum_{i=1}^s \frac{1}{2} \cdot \frac{i^2(i+1)}{e^{bi} - 1} = E, \quad (4)$$

если $E \rightarrow \infty$. Обозначим через N среднее значение сумм $\text{Sup} \sum_{i,j,k} N_{i,j,k}$ при условии (2).

Оказывается, что в этом случае большинство вариантов будет скапливаться также около следующей зависимости “локальной энергии” $E_l = \sum_{i+j+k \leq l} (i+j+k) N_{i,j,k}$, $E_l \leq E$, вблизи

$$\sum_{i=1}^l \frac{1}{2} \cdot \frac{i^2(i+1)}{e^{bi} - 1}, \quad (5)$$

где b определяются из условий (4), если $E \rightarrow \infty$.

Теорема [4] для данного примера формулируется аналогично теореме 3 из [3].

ТЕОРЕМА 1. Пусть все варианты наборов $\{N_i\}$ таких, что

$$\sum_{i,j,k} (i+j+k) N_{i,j,k} \leq E, \quad (6)$$

равновероятны. Тогда число вариантов $\mathcal{N}$ наборов $\{N_{i,j,k}\}$, удовлетворяющих (2) и (6), для которых выполняется дополнительное соотношение

$$\left| \sum_{i+j+k \leq l} (i+j+k) N_{i,j,k} - \sum_{i=1}^l \frac{1}{2} \cdot \frac{i^2(i+1)}{e^{bi} - 1} \right| \geq \bar{E} N^{1/2} (\ln N)^{1/2+\epsilon}, \quad (7)$$

меньше чем $(c_1 \mathcal{N})/N^m$ (где c_1 и m – любые числа), $\bar{E} = E/N \sim 1/b$.

Обозначения: $\mathcal{M}$ – множество всех наборов $\{N_{i,j,k}\}$, удовлетворяющих условию (2), $\mathcal{N}\{\mathcal{M}\}$ – число элементов множества $\mathcal{M}$, $\mathcal{A}$ – подмножество $\mathcal{M}$, удовлетворяющее условию

$$\left| E_l - \sum_{i=0}^l \frac{1}{2} \cdot \frac{i^2(i+1)}{e^{bi} - 1} \right| \leq \Delta, \quad l = 0, 1, \dots, s,$$

где Δ, b – некоторые действительные числа, не зависящие от l .

Обозначим

$$\left| E_l - \sum_{i=1}^l \frac{1}{2} \cdot \frac{i^2(i+1)}{e^{bi} - 1} \right| = S_l.$$

Напомним схему доказательства, аналогичную доказательству теоремы 3 из работы [3] для данного случая.

Очевидно, что если $\mathcal{M}$ множество всех наборов $\{N_{i,j,k}\}$, то

$$\mathcal{N}\{\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}\} = \sum_{\{N_{i,j,k}\}} \left(\Theta \left\{ E - \sum_{i,j,k} (i+j+k) N_{i,j,k} \right\} \delta_{(\sum_{i,j,k} (i+j+k) N_{i,j,k}), N} \prod_{l=0}^s \Theta\{|S_l - \Delta|\} \right). \quad (8)$$

Сумма берется по всем целым $N_{i,j,k}$, $\Theta(\lambda)$ – функция Хевисайда, а δ_{k_1, k_2} – символ Кронекера.

Используем интегральные представления:

$$\delta_{NN'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-iN\varphi} e^{iN'\varphi}, \quad (9)$$

$$\Theta(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{1}{\lambda - i} e^{by(1+i\lambda)}. \quad (10)$$

Используя общепринятую регуляризацию, получаем

$$\int_0^{\infty} dE \Theta \left(E - \sum_{i,j,k} (i+j+k) N_{i,j,k} \right) e^{-bE} = \frac{e^{-b \sum_{i,j,k} (i+j+k) N_{i,j,k}}}{b}. \quad (11)$$

Обозначим

$$Z(b, N) = \sum_{\{N_{i,j,k}\}} e^{-b \sum_{i,j,k} (i+j+k) N_{i,j,k}},$$

где сумма берется по всем $N_{i,j,k}$. Введем обозначения

$$\zeta_l(i\alpha, b) = \prod_{i=1}^l \xi_i(i\alpha, b), \quad \xi_j(i\alpha, b) = \frac{1}{(1 - e^{i\alpha - bj})^{j(j+1)/2}}, \quad j = 1, \dots, l.$$

В силу (9)

$$Z(b, N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha e^{-iN\alpha} \zeta_s(i\alpha, b), \quad (12)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}\} &\leq \left| \frac{e^{bE}}{i(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\exp(-iN\varphi) \right. \right. \\ &\quad \times \sum_{\{N_{i,j,k}\}} \left(\exp \left\{ \left(-b \sum_{i,j,k} (i+j+k) N_{i,j,k} \right) + (i\varphi) N_{i,j,k} \right\} \right) \left. \right] d\varphi \\ &\quad \times \prod_{l=0}^s \Theta(|S_l - \Delta|) \Big|, \end{aligned} \quad (13)$$

где b – такой действительный параметр, для которого ряд сходится.

Оценивая правую часть, пронеся модуль под интеграл и затем под знак суммы и интегрируя по φ , получим

$$\mathcal{N}\{\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}\} \leq \frac{e^{bE}}{2\pi} \sum_{\{N_{i,j,k}\}} \exp\left\{-b \sum_{i,j,k} (i+j+k) N_{i,j,k}\right\} \prod_{l=0}^s \Theta(|S_l - \Delta|). \quad (14)$$

Из неравенства для гиперболического косинуса $\text{ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$:

$$2^s \prod_{l=0}^s \text{ch}(x_l) \geq e^\delta \quad \forall x_l: \sum_{l=0}^s |x_l| \geq \delta \geq 0, \quad (15)$$

следует, что для всех положительных c и Δ выполняется неравенство (ср. [10], [11])

$$\prod_{l=0}^s \Theta(|S_l - \Delta|) \leq 2^s e^{-c\Delta} \prod_{l=0}^s \text{ch}\left(c \sum_{i+j+k \leq l} (i+j+k) N_{i,j,k} - c\psi_b\right), \quad (16)$$

где

$$\psi_b = \sum_{i=1}^l \frac{1}{2} \cdot \frac{i^2(i+1)}{e^{bi} - 1}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}\} &\leq e^{-c\Delta} \exp(bE) \sum_{\{N_{i,j,k}\}} \exp\left\{-b \sum_{i,j,k} (i+j+k) N_{i,j,k}\right\} \\ &\quad \times \prod_{l=0}^s \text{ch}\left(\sum_{i+j+k \leq l} c(i+j+k) N_{i,j,k} - c\psi_b\right) \\ &= e^{bE} e^{-c\Delta} \prod_{l=0}^s \{\zeta_l(0, b-c) \exp(-c\psi_b) + \zeta_l(0, b+c) \exp(c\psi_b)\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Применим к $\zeta_l(0, b \pm c)$ формулу Тейлора. Существует $\gamma < 1$ такое, что

$$\ln(\zeta_l(0, b \pm c)) = \ln \zeta_l(0, b) \pm c(\ln \zeta_l)'_b(0, b) + \frac{c^2}{2} (\ln \zeta_l)''_b(0, b \pm \gamma c).$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial b} \ln \zeta_l \equiv -\psi_b.$$

Положим $c = \Delta/D(0, b)$, где $D(0, b) = (\ln \zeta_l)''_b(0, b)$ больше нуля при всех b , причем монотонно убывает по b . Правая часть соотношения (17) не будет превосходить

$$2^\gamma e^{bE} \prod_{p=0}^s \zeta_{l_p}(0, b) e^{-(\Delta_l^2)/|D(0,b)|} + \frac{\Delta_l^2 D(0, b - \gamma \Delta/D(0, b))}{2(D(0, b))^2}.$$

Аналогично [3] получим

$$\mathcal{N}(\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}) \leq e^{bE} \zeta_l(0, b) e^{-\varepsilon \Delta^2/D(0,b)}. \quad (18)$$

Отсюда, в интервале от $-\pi$ до π , на котором берется интеграл (12), вклад дает только окрестность точки $\alpha = 0$. Вычислим интеграл (12) по методу Лапласа с точностью до N^{-m} . Применим все последующие рассуждения теоремы 3 из [3].

Для оценки снизу $\zeta_s(0, \beta)$ можно воспользоваться точной асимптотикой, полученной Крутковым [12] применительно к трехмерному осциллятору. В случае общего спектра λ_n формула, полученная по методу перевала, встречает существенные затруднения, поскольку в конкретных примерах может быть бесконечное число точек перевала (Коваль, частное сообщение).

Отметим, что сумму по всем вариантам, удовлетворяющим неравенству (2), можно интерпретировать как дискретный континуальный “интеграл” по путям: каждый вариант – путь. Асимптотический главный член континуального интеграла, как правило, сосредоточен вблизи одной главной “траектории” (метод Лапласа для континуального интеграла) и вне окрестности этой траектории быстро стремится к нулю. Это и выражается формулировкой теоремы. Величина этой окрестности (в нашем случае $\bar{E}O(N^{1/2}(\ln N)^{1/2+\varepsilon})$) определяет предел точности, с которой имеет смысл вычислять эту “главную траекторию”.

В упомянутой выше книге “Что такое жизнь?” Шредингер говорит о следующем “законе природы” (правило $\sqrt{N}$): если некоторое число (частиц, молекул, генов в хромосоме) велико и равно N , то мы можем гарантировать выполнение какой-либо статистической закономерности лишь с точностью до $\sqrt{N}$.

В связи с этим мы выскажем следующую несколько измененную гипотезу о правиле Шредингера, которое он формулирует как “закон природы”. Если некоторое число частиц, молекул, генов в хромосоме равно N , то получить статистическую закономерность можно с точностью не более, чем $O(\sqrt{N \ln N})$. Математический смысл этой гипотезы состоит в том, что улучшить оценку (7) более, чем на ε , невозможно.

Поскольку в (4) $E \rightarrow \infty$, то полагая $s = \infty$ для суммы

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2(i+1)}{2(e^{bi} - 1)},$$

мы можем применить формулу Эйлера вида

$$\begin{aligned} \sum_{b>n>a} f(n) &= \int_a^b f(x) dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) \\ &\quad + \sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x)f''(x) dx \\ \rho(x) &= \frac{1}{2} - \{x\}, \quad \sigma(x) = \int_0^x \rho(t) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку $\sigma(x) \leq 1/8$, то нетрудно убедиться, что

$$E = \frac{\zeta(4)}{12} b^{-4} + \frac{3}{4} \zeta(3) b^{-3} + O(b^{-2}),$$

где $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана. Отсюда $b \rightarrow 0$. Как известно, $\zeta(4) = \pi^4/90$.

Аналогично, в правой части (7) при достаточно больших l можно перейти к интегралам.

В силу (7) член $O(b^3) > \overline{E}\sqrt{N \ln N}$, и его вычисление не имеет смысла.

Аналогичные оценки для N , как это видно из теоремы 1 работы [4], также дают возможность вычислить только два члена асимптотики по b : $O(b^{-3})$ и $O(b^{-2})$. Главный (первый) член асимптотики мы будем называть *термодинамическим пределом*, а второй член – квазитермодинамическим пределом.

Рассмотрим теперь систему N 3-х мерных невзаимодействующих осцилляторов с одинаковой частотой ω_0 :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi_n(x) - \omega_0^2|x|^2\Psi_n(x) = n\Psi_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (20)$$

Чтобы получить для системы осцилляторов главный член закона Стефана–Больцмана, мы должны положить

$$b = \frac{\omega_0 \hbar}{kT},$$

где $\hbar$ – константа Планка, k – константа Больцмана, T – температура, ω_0 – частота, равная $\omega_0 = c/\sqrt[3]{V}$, где c – скорость света, V – объем. Мы полагаем в осцилляторе полную изотропию, поэтому частота ω_0 одинаковая во всех направлениях. Частот $\omega > \omega_0$ не существует при заданной температуре, а частоты $\omega < \omega_0$ дают существенно меньшее число вариантов, и ими можно пренебречь.

В результате для поправки к закону Стефана–Больцмана мы получаем квазитермодинамический член вида:

$$F = -\frac{4\delta}{3c}T^4V - \frac{12\hbar\delta}{k} \cdot \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)}T^3V^{2/3}, \quad (21)$$

где F – свободная энергия, $\delta = \pi^2k^4/(60\hbar^3c^2)$ – постоянная Стефана–Больцмана, V – объем, c – скорость света, $\hbar$ – постоянная Планка, k – константа Больцмана, T – температура.

Оказалось, что *всегда* экспериментальные значения постоянной Стефана–Больцмана превышали теоретическое значение. Теперь причины расхождения ясны: приведенная поправка объясняет эти причины.

Однако главный эффект от квазитермодинамики будет иметь место в случае, когда фазового перехода нет в термодинамике, но он есть в квазитермодинамике. Именно такой эффект получен автором при рассмотрении ферми-газа без дополнительного предположения о существовании куперовских пар. Предполагалось, что число частиц $N \rightarrow \infty$, взаимодействие парное, как в гелии 4, т.е. отталкивание вблизи и притяжение вдали. Вместе с тем потенциал $V(r_i - r_j)$ в целом короткодействующий. Спектр получался вида

$$E_l = \frac{\hbar^2 l^2}{2m} + \tilde{V}(l) - \tilde{V}(0), \quad (22)$$

$\tilde{V}(l)$ – преобразование Фурье от $V(z)$.

При $N \rightarrow \infty$ и V (объеме) $\rightarrow \infty$, так что $N/V \rightarrow \text{const}$, потенциал стремится к δ -функции и, следовательно, стремится к спектру идеального газа. Сверхтекучесть возникает лишь в квазитермодинамическом пределе. В этом пределе для спектра (22) возникает, как правило, кривая Ландау. Значит, фазовый переход в сверхтекучее состояние происходит в квазитермодинамике в этой “модели”. Отметим, что эта модель не содержит дополнительных физических взаимодействий: это

“модель” без модели, поскольку антисимметрические решения N -частичного уравнения Шредингера с обычным парным взаимодействием уже не может считаться “моделью”. Это обычная математическая задача.

Обратимся к бозе-газу. Боголюбов предъявил в этом случае следующий спектр

$$E_l = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 l^2}{2m} + \tilde{V}(l)\right)^2} - \tilde{V}(l)^2, \quad (23)$$

который в квазитермодинамике также дает кривую Ландау. Но в отличие от (22) в термодинамическом пределе он дает

$$\lim_{N/V \rightarrow \text{const}, N \rightarrow \infty} E_l = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 l^2}{2m} + \tilde{V}(0)\right)^2} - \tilde{V}(0)^2,$$

и сверхтекучесть сохраняется (критическая скорость Ландау в термодинамическом пределе не равна нулю, как в случае спектра (22)). Однако ротонная часть спектра исчезает в термодинамическом пределе и появляется только в квазитермодинамике.

ЗАМЕЧАНИЕ. Работа Боголюбова может быть строго обоснована при некоторых дополнительных условиях, если, как это делает Боголюбов, рассматривать задачу в 3-мерном торе. Однако предельный переход от тора к 3-мерному пространству некорректен – в пределе возникает всюду плотный точечный спектр.

Автором получено уточнение формулы (23) для случая, когда жидкость протекает в капилляре радиуса r . Спектр в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} E_l = & \left[\frac{1}{2} \left(a(l^2 - k_2^2) + \frac{\tilde{V}(l - k_2) - \tilde{V}(k_2)}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(a(l_1^2 - k_2^2) + \frac{\tilde{V}(l - k_2) - \tilde{V}(k_2)}{2} \right)^2 \right. \\ & + \left(\frac{\tilde{V}(l + k_2) + \tilde{V}(k_2)}{2} \right)^2 - \left(\frac{\tilde{V}(l - k_2) + \tilde{V}(l + k_2)}{2} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} (a(l_1^2 + l^2 - 2k_2^2) + \tilde{V}(l - k_2) - \tilde{V}(k_2)) \\ & \left. \times \sqrt{a^2(l_1^2 - l^2)^2 + 2(\tilde{V}(l + k_2) + \tilde{V}(k_2))^2} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$a = \frac{\hbar^2}{2m}, \quad l_1 = l + 2k_2,$$

а $k_2 = 2\pi n/r$, где $n = 1, 2, \dots$.

Когда $r = \infty$ и, значит, $k_2 = 0$, мы получаем формулу Боголюбова (23). В пределе при $r \rightarrow 0$, $k_2 \rightarrow \infty$, $l = (l_0, -k_2)$ (l_0 – компонента вдоль течения) мы получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} E_{l_0} = \sqrt{a^2 l_0^4 + \sqrt{2} a |\tilde{V}(l_0)| l_0^2}.$$

Эти результаты, подобно формуле Боголюбова, имеют место в термодинамическом пределе с квазитермодинамической поправкой.

Возвращаясь к Планку заметим, что Планк при выводе своей знаменитой формулы из дискретного набора энергии неизбежно должен был учитывать тождественность частиц, т.е. считать, что частицы света являются бозе-частицами. Однако он это скрыл. Индус Бозе заметил это в 1915 г., после чего подвергся остракизму со стороны физиков, что, к счастью, не привело его к тому, что привело к кончине Больцмана. Такое отношение физиков сохранялось почти до 1923 г., когда эту теорию поддержал и обобщил Эйнштейн.

Макс Планк говорил, что новая теория побеждает тогда, когда ее противники умирают. Эти слова и знание Планка истории возникновения новых физических идей подтверждают предположение, что Макс фон Планк верил в дискретность энергии и знал бозе-статистику.

Отмечу следующий существенный момент. Математическая теорема как видно из (7), носит кумулятивный (интегральный) характер, и потому закон смещения Вина не следует из этой теоремы. Скорее всего закон смещения Вина и, следовательно, поправка к нему, которая, казалась бы, должна быть получена, как следствие поправки к распределению Планка и закону Стефана–Больцмана, не может быть обоснована строго. Если закон смещения и может быть получен строго, то в некоторой другой формулировке, чем в [1].

В заключение приношу глубокую благодарность моему учителю в области теории чисел А. А. Карацубе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 5: Статистическая физика, Наука, М., 1964.
- [2] *Физический энциклопедический словарь*, т. 5, Советская энциклопедия, М., 1966.
- [3] V. P. Maslov, “Revision of probability theory from the point of view of quantum statistics”, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:1 (2007), 66–95.
- [4] В. П. Маслов, “Закон “отсутствия предпочтения” и соответствующее распределение в частотной теории вероятностей”, *Матем. заметки*, **80**:2 (2006), 220–230.
- [5] В. П. Маслов, В. В. Вьюгин, “Принцип максимума энтропии для неупорядоченных данных”, *Докл. РАН*, **398**:1 (2004), 19–22.
- [6] В. П. Маслов, А. С. Черный, “О минимизации и максимизации энтропии в различных дисциплинах”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **48**:3 (2003), 466–486.
- [7] В. П. Маслов, *Квантовая экономика*, Наука, М., 2006.
- [8] Э. Шрёдингер, *Что такое жизнь? С точки зрения физики*, Атомиздат, М., 1972; пер. изд.: E. Schrödinger, *What is Life? The Physical Aspect of the Living Cell*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1944.
- [9] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, “Об одной задаче теории вероятностей”, *Матем. заметки*, **81**:6 (2007), 879–892.
- [10] В. П. Маслов, “Нелинейное среднее в экономике”, *Матем. заметки*, **78**:3 (2005), 377–395.
- [11] В. П. Маслов, “Об одной общей теореме теории множеств, приводящей к распределению Гиббса, Бозе–Эйнштейна, Парето и закону Ципфа–Мандельброта для фондового рынка”, *Матем. заметки*, **78**:6 (2005), 870–877.
- [12] Ю. А. Крутков, “Дополнение редактора”, Г. А. Лоренц, *Статистические теории в термодинамике*, РХД, Ижевск, 2001, 152–157.

В. П. Маслов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило

07.09.2007