Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Х. Расулов, О структуре существенного спектра модельного оператора нескольких частиц, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 1, 86–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4337>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 10:41:43

О структуре существенного спектра модельного оператора нескольких частиц

Т. Х. Расулов

В статье изучается существенный спектр модельного решетчатого гамильтониана для системы с переменным числом частиц $0 \leq n \leq 2$ в квазиимпульсном представлении. Свойства спектра описаны в терминах граничных значений функции комплексного аргумента, имеющей смысл ядра комплемента Шура

$$H_{11} - z - H_{12}(H_{22} - z)^{-1}H_{12}^*.$$

Библиография: 13 названий.

Введение. В рамках проблемы нескольких тел на непрерывном пространстве и на решетке решено большое число задач о собственных значениях для систем квазичастиц, число которых сохраняется. Однако имеются в определенном смысле более интересные задачи, возникающие в теории твердого тела, в которых число квазичастиц не сохраняется [1]. Следует отметить, что системы с несохраняющимся ограниченным числом частиц на непрерывном пространстве рассмотрены в работах [2], [3].

Гамильтонианы системы с сохраняющимся ограниченным числом квазичастиц (на примере модели Гейзенберга и Хаббарда [4], [5]) и несохраняющимся ограниченным числом квазичастиц на решетке (на примере s-d модели [6]) приводят к модельным операторам. Поэтому исследование спектральных свойств таких операторов играет важную роль в современной математической физике.

В настоящей работе рассматривается некоторый модельный оператор, действующий в прямой сумме 0-, 1- и 2-частичных подпространств фоковского пространства, который является решетчатым аналогом спин-бозонного гамильтониана [2] и модели светового излучения с неподвижным атомом и не более чем тремя фотонами [3], а также трехчастичного гамильтониана на решетке [7], [8]. Описывается структура существенного спектра этого оператора и задача состоит в обосновании этих описаний.

В пункте 1 модельный оператор рассматривается как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве и формулируется основной результат работы. В пункте 2, пользуясь разложением в прямой операторный интеграл [9], изучение спектральных свойств модельного оператора сводится к изучению спек-

тральных свойств семейства обобщенной модели Фридрихса. Описывается множество собственных значений обобщенной модели Фридрихса, лежащих левее “трех-частичной ветви” существенного спектра рассматриваемого модельного оператора. В пункте 3, пользуясь утверждениями пункта 2, доказывается основной результат настоящей работы.

1. Предварительные сведения и формулировка основного результата.

Пусть $\mathbf{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$ – трехмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $(\mathbf{T}^3)^2 = \mathbf{T}^3 \times \mathbf{T}^3$ – декартово произведение, $L_2((\mathbf{T}^3)^n)$, $n = 1, 2$, – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbf{T}^3)^n$, $n = 1, 2$, $\mathbf{C}$ – одномерное комплексное пространство.

Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0 = \mathbf{C}$, $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathbf{T}^3)$ и $\mathcal{H}_2 = L_2((\mathbf{T}^3)^2)$, т.е. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ называется *трехчастичным обрезанным* подпространством пространства Фока.

Рассмотрим модельный оператор H , действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и задающийся формулой

$$H = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & 0 \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где операторы $H_{ij}: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1, 2$, определяются по правилам

$$\begin{aligned} (H_{00}f_0)_0 &= w_0 f_0, & (H_{01}f_1)_0 &= \int b_1(q') f_1(q') dq', & (H_{10}f_0)_1 &= b_1(p) f_0, \\ (H_{11}f_1)_1 &= w_1(p) f_1(p), & (H_{12}f_2)_1 &= \int b_2(q') f_2(p, q') dq', \\ (H_{21}f_1)_2 &= b_2(q) f_1(p), & (H_{22}f_2)_2 &= w_2(p, q) f_2(p, q). \end{aligned}$$

Здесь $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1, 2$, w_0 – фиксированное вещественное число, $b_1(\cdot)$, $b_2(\cdot)$, $w_1(\cdot)$ и $w_2(\cdot, \cdot)$ – вещественно-аналитические функции на $\mathbf{T}^3$ и $(\mathbf{T}^3)^2$ соответственно.

Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования.

В математической физике операторы H_{01} , H_{12} называют операторами уничтожения, а операторы H_{10} , H_{21} называются операторами рождения.

Легко можно проверить, что оператор H , определенный операторной матрицей (1.1), действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, является ограниченным и самосопряженным.

Приведем несколько основных обозначений, которые будут применяться на протяжении всей работы.

При каждом фиксированном $p \in \mathbf{T}^3$ определим регулярную в $\mathbf{C} \setminus [m(p), M(p)]$ функцию

$$\Delta(p, z) = w_1(p) - z - \int \frac{b_2^2(q') dq'}{w_2(p, q') - z},$$

где числа $m(p)$ и $M(p)$ определяются следующим образом:

$$m(p) = \min_{q \in \mathbf{T}^3} w_2(p, q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathbf{T}^3} w_2(p, q). \quad (1.2)$$

Пусть σ – множество тех точек $z \in \mathbf{C}$, для которых равенство $\Delta(p, z) = 0$ имеет место хотя бы для одного $p \in \mathbf{T}^3$ и

$$m = \min_{p, q \in \mathbf{T}^3} w_2(p, q), \quad M = \max_{p, q \in \mathbf{T}^3} w_2(p, q), \quad \Sigma = [m, M] \cup \sigma.$$

Верна следующая

ТЕОРЕМА 1.2. *Существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H)$ оператора H не зависит от параметра w_0 и функции $b_1(\cdot)$ и совпадает с множеством Σ .*

При доказательстве теоремы 1.2 равенство $\sigma_{\text{ess}}(H) = \Sigma$ доказывается аналогично доказательству теоремы 1 из работы [10], а независимость множества Σ от параметра w_0 и функции $b_1(\cdot)$ вытекает из строения этого множества. Поэтому доказательство теоремы 1.2 не приводим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Множества σ и $[m, M]$ называются соответственно *двухчастичной* и *трехчастичной* ветвями существенного спектра оператора H .

Везде будет предполагаться, что функция $w_2(\cdot, \cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $(0, 0) \in (\mathbf{T}^3)^2$.

Для любых $p, q \in \mathbf{T}^3$ и $z < m$ справедливо неравенство $w_2(p, q) - z > 0$; отсюда следует, что

$$\int \frac{b_2^2(q') dq'}{w_2(p, q') - z} > 0, \quad p \in \mathbf{T}^3.$$

Так как функция $w_2(\cdot, \cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $(0, 0) \in (\mathbf{T}^3)^2$ и функция $b_2(\cdot)$ есть аналитическая функция на $\mathbf{T}^3$, то

$$\int \frac{b_2^2(q') dq'}{w_2(p, q') - m} > 0, \quad p \in \mathbf{T}^3,$$

является конечным интегралом.

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует, что

$$\Delta(0, m) = \lim_{p \rightarrow 0} \Delta(p, m)$$

и, следовательно, функция $\Delta(\cdot, m)$ непрерывна на $\mathbf{T}^3$.

Для любого $p \in \mathbf{T}^3$ функция $\Delta(p, \cdot)$ является монотонно убывающей на полуоси $(M, +\infty)$. Отсюда и из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует, что существует (конечный или бесконечный) предел

$$\Delta(p, M) = \lim_{z \rightarrow M+0} \Delta(p, z).$$

Пусть далее $E_{\min}$ и $E_{\max}$ соответственно нижняя и верхняя грани множества σ .

Теперь сформулируем основной результат настоящей работы, который описывает структуру существенного спектра оператора H .

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $\sup_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, M) \leq 0$. Тогда

- а) если $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) \geq 0$, то существенный спектр оператора H совпадает с отрезком $[m, M]$;
- б) если $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) < 0$ и $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) \geq 0$, то существенный спектр оператора H состоит из отрезка $[E_{\min}, M]$, причем $E_{\min} < m$;
- в) если $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) < 0$, то существенный спектр оператора H совпадает с множеством $[E_{\min}, E_{\max}] \cup [m, M]$, причем $E_{\max} < m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Отметим, что спектральные свойства оператора типа (1.1) изучены в работах [10], [11].

2. Некоторые спектральные свойства обобщенной модели Фридрихса.

В этом пункте с использованием разложения в прямой операторный интеграл [9] изучение спектральных свойств оператора H сводится к изучению спектральных свойств семейства обобщенной модели Фридрихса. Описывается множество собственных значений обобщенной модели Фридрихса, лежащих левее m , которое играет важную роль при доказательстве основного результата. Следует отметить, что спектр и резонансы обобщенной модели Фридрихса изучены в работах [12], [13].

Наряду с оператором H рассмотрим еще оператор $\hat{H}$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ по формуле

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что оператор $\hat{H}$ ограничен и самосопряжен в $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Оператор $\hat{H}$ коммутирует с любым оператором U_α , действующим в $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ по правилу

$$U_\alpha \begin{pmatrix} f_1(p) \\ f_2(p, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(p)f_1(p) \\ \alpha(p)f_2(p, q) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in L_2(\mathbf{T}^3).$$

Следовательно, из разложения в прямой интеграл пространства $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$:

$$\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \int \oplus (\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1) dp,$$

следует, что оператор $\hat{H}$ разлагается в прямой интеграл

$$\hat{H} = \int \oplus h(p) dp,$$

где семейство обобщенной модели Фридрихса $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, действует в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ по формуле

$$h(p) \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1(p)f_0 + \int b_2(q')f_1(q') dq' \\ b_2(q)f_0 + w_p(q)f_1(q) \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbf{T}^3, \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0, 1,$$

и является ограниченным и самосопряженным в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, где

$$w_p(q) = w_2(p, q), \quad p, q \in \mathbf{T}^3.$$

Пусть оператор $h_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, действует в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ как

$$h_0(p) \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w_p(q)f_1(q) \end{pmatrix}.$$

Оператор возмущения $h(p) - h_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, оператора $h_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Вейля [9] о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, совпадает с существенным спектром оператора $h_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$. Известно, что

$$\sigma_{\text{ess}}(h_0(p)) = [m(p), M(p)],$$

где числа $m(p)$ и $M(p)$ определяются равенствами (1.2).

Из последних двух фактов следует, что

$$\sigma_{\text{ess}}(h(p)) = [m(p), M(p)]. \quad (2.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Отметим, что для некоторого $p \in \mathbf{T}^3$ существенный спектр оператора $h(p)$ может совпадать с точкой $\{m(p)\}$ и, следовательно, для любого $p \in \mathbf{T}^3$ мы не можем сказать, что существенный спектр оператора $h(p)$ является абсолютно непрерывным. Например, если функция $w_2(\cdot, \cdot)$ имеет вид

$$w_2(p, q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(p + q) + \varepsilon(q),$$

где функция $\varepsilon(\cdot)$ определяется равенством

$$\varepsilon(q) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos q_i), \quad q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbf{T}^3, \quad p = (\pi, \pi, \pi) \in \mathbf{T}^3.$$

Теперь установим связь между собственными значениями оператора $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, и нулями функции $\Delta(p, z)$. Верна следующая

ЛЕММА 2.2. Число $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p))$ является собственным значением оператора $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, тогда и только тогда, когда

$$\Delta(p, z) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Анологичная лемма для двухчастичного дискретного оператора Шрёдингера доказана в работах [7], [8].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.2. Пусть число $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(p))$ есть собственное значение оператора $H(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, и пусть $f = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ – соответствующая собственная вектор-функция. Тогда f_0 и f_1 удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} (w_1(p) - z)f_0 + \int b_2(q')f_1(q') dq' &= 0, \\ b_2(q)f_0 + (w_2(p, q) - z)f_1(q) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В силу равенства (2.1) для любых $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p))$ и $q \in \mathbf{T}^3$ имеет место неравенство

$$w_2(p, q) - z \neq 0, \quad p \in \mathbf{T}^3.$$

Из второго уравнения системы (2.2) для f_1 имеем

$$f_1(q) = -\frac{b_2(q)f_0}{w_2(p, q) - z}. \quad (2.3)$$

Подставляя выражение (2.3) для f_1 в первое уравнение системы (2.2), получим, что система уравнений (2.2) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $f_0 \cdot \Delta(p, z) = 0$, т.е. когда $\Delta(p, z) = 0$. Лемма 2.2 доказана.

Из леммы 2.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Для дискретного спектра $\sigma_{\text{disc}}(h(p))$ оператора $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, верно равенство

$$\sigma_{\text{disc}}(h(p)) = \{z \in \sigma_{\text{ess}}(h(p)) : \Delta(p, z) = 0\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Видно, что согласно лемме 2.2 функция $\Delta(p, \cdot)$, $p \in \mathbf{T}^3$, обладает характеристическим свойством определителя Фредгольма. По этой причине мы назовем ее определителем Фредгольма, ассоциированным с оператором $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$.

Следующая лемма описывает множество собственных значений оператора $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, и играет важную роль при доказательстве основного результата.

ЛЕММА 2.6. 1) Пусть $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) \geq 0$. Тогда для любого $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h(p)$ не имеет собственных значений, лежащих на $(-\infty, m)$.

2) Пусть $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) < 0$ и $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) \geq 0$. Тогда существует непустое открытое множество $G \subset \mathbf{T}^3$ такое, что $G \neq \mathbf{T}^3$ и при всех $p \in G$ оператор $h(p)$ имеет единственное собственное значение $E(p)$, лежащее левее m , а для любого $p \in \mathbf{T}^3 \setminus G$ оператор $h(p)$ не имеет собственных значений, лежащих левее m .

3) Пусть $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) < 0$. Тогда для любого $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h(p)$ имеет единственное собственное значение $E(p)$, лежащее на полуоси $(-\infty, m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) \geq 0$. Так как для любого $p \in \mathbf{T}^3$ функция $\Delta(p, \cdot)$ монотонно убывает на полуоси $(-\infty, m)$, для всех $p \in \mathbf{T}^3$ и $z < m$ верно

$$\Delta(p, z) > \Delta(p, 0) \geq \min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, 0) \geq 0.$$

Следовательно, по лемме 2.2 для любого $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h(p)$ не имеет собственных значений на $(-\infty, m)$.

б) Пусть $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) < 0$ и $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) \geq 0$. Тогда существуют точки $p_0, p_1 \in \mathbf{T}^3$ такие, что

$$\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) = \Delta(p_0, m) < 0, \quad \max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) = \Delta(p_1, m) \geq 0.$$

Положим

$$G \equiv \{p \in \mathbf{T}^3 : \Delta(p, m) < 0\}.$$

Так как $\mathbf{T}^3$ – компактное множество и $\Delta(\cdot, m)$ – непрерывная функция на $\mathbf{T}^3$, отсюда следует, что множество G – непустое открытое множество, а из условия $\Delta(p_1, m) \geq 0$ вытекает, что $G \neq \mathbf{T}^3$.

Для любого $p \in \mathbf{T}^3$ функция $\Delta(p, \cdot)$ непрерывна и монотонно убывает на полуоси $(-\infty, m)$ и

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta(p, \cdot) = +\infty. \quad (2.4)$$

Поэтому для любого $p \in G$ существует единственное число $E(p) \in (-\infty, m)$ такое, что $\Delta(p, E(p)) = 0$. В силу леммы 2.2 для любого $p \in G$ число $E(p)$ является единственным собственным значением оператора $h(p)$.

Для любых $p \in \mathbf{T}^3 \setminus G$ и $z < m$ имеем

$$\Delta(p, z) = \Delta(p, m) \geq 0.$$

Отсюда следует, что для любого $p \in \mathbf{T}^3 \setminus G$ оператор $H(p)$ не имеет собственных значений на $(-\infty, m)$.

с) Пусть $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) < 0$. Тогда для любого $p \in \mathbf{T}^3$ имеет место $\Delta(p, m) < 0$, т.е. $G = \mathbf{T}^3$. Как показано выше, при всех $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h(p)$ имеет единственное собственное значение $E(p)$, лежащее на $(-\infty, m)$. Лемма 2.6 полностью доказана.

ЛЕММА 2.7. Пусть $\sup_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, M) \leq 0$. Тогда оператор $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, не имеет собственных значений, лежащих на $(M, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любого $p \in \mathbf{T}^3$ функция $\Delta(p, \cdot)$ монотонно убывает на полуоси $(M, +\infty)$, то для любых $p \in \mathbf{T}^3$ и $z > M$ справедливо

$$\Delta(p, z) < \Delta(p, M) \leq 0;$$

следовательно, по лемме 2.2 для любого $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h(p)$ не имеет собственных значений, лежащих на $(M, +\infty)$. Лемма 2.7 доказана.

ЛЕММА 2.8. Для спектра $\sigma(\hat{H})$ оператора $\hat{H}$ имеет место равенство

$$\sigma(\hat{H}) = \bigcup_{p \in \mathbf{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h(p)) \bigcup [m, M].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему о спектре разложимых операторов [9] и учитывая равенство

$$\sigma(h(p)) = \sigma_{\text{disc}}(h(p)) \bigcup [m(p), M(p)], \quad p \in \mathbf{T}^3,$$

мы приходим к утверждению леммы 2.8.

ЛЕММА 2.9. Спектр оператора $\hat{H}$ совпадает с существенным спектром оператора H , т.е.

$$\sigma(\hat{H}) = \sigma_{\text{ess}}(H). \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1.2 имеем $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma \cup [m, M]$. Из леммы 2.2 вытекает, что

$$\sigma = \bigcup_{p \in \mathbf{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h(p)) \quad (2.6)$$

и, следовательно, по лемме 2.8 мы получим равенство (2.5).

3. Доказательство основного результата. В этом пункте пользуясь утверждениями пункта 2 мы докажем основной результат работы.

Доказательство теоремы 1.4. Из лемм 2.7–2.9 получим, что

$$\sigma_{\text{ess}}(H) \cap (M, +\infty) = \emptyset.$$

а) Пусть $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) \geq 0$. Тогда по лемме 2.6 для любого $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h(p)$ не имеет собственных значений, лежащих на $(-\infty, m)$. Следовательно, по лемме 2.8

$$\sigma(\hat{H}) = [m, M].$$

Тогда лемма 2.9 заканчивает доказательство утверждения а) теоремы 1.4.

б) Пусть $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) < 0$ и $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) \geq 0$. Тогда в силу леммы 2.6 существует непустое открытое множество $G \subset \mathbf{T}^3$ такое, что для любого $p \in G$ оператор $h(p)$ имеет единственное собственное значение $E(p) < m$.

В силу аналитичности функций $w_1(\cdot)$, $b_2(\cdot)$ и $w_2(\cdot, \cdot)$ на $\mathbf{T}^3$ и $(\mathbf{T}^3)^2$ соответственно и леммы 2.2 отображение $E: p \in G \rightarrow E(p)$ является непрерывным в G .

Так как для любого $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h(p)$ ограничен и $\mathbf{T}^3$ – компактное множество, существует положительное число C такое, что $\sup_{p \in \mathbf{T}^3} \|h(p)\| \leq C$ и для любого $p \in \mathbf{T}^3$ имеем

$$\sigma(h(p)) \subset [-C, C]. \quad (3.1)$$

Для любого $q \in \partial G = \{p \in \mathbf{T}^3 : \Delta(p, m) = 0\}$ существует последовательность $\{p_n\} \subset G$ такая, что $p_n \rightarrow q$ при $n \rightarrow \infty$. Положим $E_n = E(p_n)$. Тогда по лемме 2.6 для любого $p_n \in G$ имеет место неравенство $E_n < m$ и из (3.1) следует, что $E_n \subset [-C, m]$. Не нарушая общности (в противном случае мы можем взять подпоследовательность) предположим, что $E_n \rightarrow E_0$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторого $E_0 \in [-C, m]$.

Из непрерывности функции $\Delta(p \cdot, \cdot)$ на $\mathbf{T}^3 \times (-\infty, m]$ и соотношений $p_n \rightarrow q$ и $E_n \rightarrow E_0$ при $n \rightarrow \infty$ следует, что

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(p_n, E_n) = \Delta(q, E_0).$$

Так как для любого $p \in \mathbf{T}^3$ функция $\Delta(p \cdot, \cdot)$ монотонно убывает на $(-\infty, m]$ и $q \in \partial G$, то $\Delta(q, E_0) = 0$ тогда и только тогда, когда $E_0 = m$.

Для любого $q \in \partial G$ определим

$$E(q) = \lim_{p \rightarrow q, q \in G} E(p) = m.$$

Функция $E(\cdot)$ является непрерывной на компактном множестве $G \cup \partial G$ и $E(q) = m$ для любого $q \in \partial G$; мы имеем

$$\text{Im } E = [E_{\min}, m], \quad E_{\min} < m.$$

Следовательно, множество

$$\{z \in \sigma : z \leq m\} = \bigcup_{p \in \mathbf{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h(p)) \cap (-\infty, m]$$

совпадает с множеством $\text{Im } E = [E_{\min}, m]$. Тогда утверждение б) теоремы 1.4 вытекает из леммы 2.9.

с) Пусть $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta(p, m) < 0$. Тогда в силу леммы 2.9 для любого $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h(p)$ имеет единственное собственное значение $E(p) < m$.

Функция $E(\cdot)$ является непрерывной на компактном множестве $\mathbf{T}^3$ и ее область значений является замкнутым множеством в $(-\infty, m)$, т.е. $\text{Im } E = [E_{\min}, E_{\max}]$. Следовательно, $\sigma = [E_{\min}, E_{\max}]$. Теорема 1.4 полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. А. Изюмов, М. В. Медведев, “Магнитный померон в ферромагнитном кристалле”, *ЖЭТФ*, **59**:2 (1970), 553–560.
- [2] R. A. Minlos, H. Spohn, “The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons”, *Topics in statistical and theoretical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **177**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 159–193.
- [3] Ю. В. Жуков, Р. А. Минлос, “Спектр и рассеяние в модели “спин-бозон” с не более чем тремя фотонами”, *ТМФ*, **103**:1 (1995), 63–81.
- [4] D. Mattis, “The few-body problem on a lattice”, *Rev. Modern Phys.*, **58**:2 (1986), 361–379.
- [5] E. Lieb, “Two theorems on the Hubbard model”, *Phys. Rev. Lett.*, **62**:10 (1989), 1201–1204.
- [6] A. J. Mogilner Hamiltonians in solid-state physics as multiparticle discrete Schrodinger operators: problems and results, *Adv. Soviet Math.*, **5** (1991), 139–194.
- [7] С. Н. Лакаев, “Об эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц”, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:3 (1993), 15–28.
- [8] С. Н. Лакаев, “О бесконечном числе трехчастичных связанных состояний системы трех квантовых решетчатых частиц”, *ТМФ*, **89**:1 (1991), 94–104.
- [9] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: Анализ операторов, Мир, М., 1982.
- [10] С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов, “Модель в теории возмущений существенного спектра многочастичных операторов”, *Матем. заметки*, **73**:4 (2003), 556–564.
- [11] С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов, “Об эффекте Ефимова в модели теории возмущений существенного спектра”, *Функц. анализ и его прил.*, **37**:1 (2003), 81–84.
- [12] Zh. I. Abdullaev, S. N. Lakaev, “On the spectral properties of the matrix-valued Friedrichs model”, *Many-particle Hamiltonians: spectra and scattering*, Adv. Sov. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 1–37.
- [13] С. Н. Лакаев, “Некоторые спектральные свойства обобщенной модели Фридрихса”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **11** (1986), 210–238.

Т. Х. Расулов

Самаракандский государственный университет им. А. Навои
E-mail: rth@mail.ru

Поступило

20.03.2006