Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Старцев, Метод каскадного интегрирования Лапласа для линейных гиперболических систем уравнений, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 1, 107–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4338>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 15:34:40

Метод каскадного интегрирования Лапласа для линейных гиперболических систем уравнений

С. Я. Старцев

Предложено обобщение каскадного метода интегрирования Лапласа на случай линейных гиперболических систем уравнений. На основе этого доказано, что система уравнений с обращающимся в нуль произведением инвариантов Лапласа обладает полным набором решений, зависящих от произвольных функций.

Библиография: 9 названий.

1. Введение: каскадное интегрирование скалярных уравнений. Рассмотрим систему линейных уравнений вида

$$l(u) \equiv u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0, \quad (1)$$

где через a , b и c обозначены матрицы размера $n \times n$, а u является n -мерным вектором. В скалярном случае (при $n = 1$) одним из классических методов точного интегрирования уравнений вида (1) является каскадный метод интегрирования Лапласа (см., например, [1]–[3]). Однако для систем уравнений (т.е. когда $n > 1$) такого метода не имеется и целью настоящей работы будет обобщение каскадного метода интегрирования на случай произвольного n .

В качестве введения положим $n = 1$ и опишем, как выглядит интересующий нас метод для скалярных уравнений. Несколько необычный вид некоторых формул, используемых в ходе этого изложения, объясняется желанием записать эти формулы таким образом, чтобы они оставались пригодными и для систем уравнений.

Нетрудно видеть, что дифференциальный оператор l , задающий уравнение (1), может быть записан в виде

$$l = \left(\frac{\partial}{\partial x} + b \right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial y} + a \right) - H_1, \quad (2)$$

где символом $\circ$ обозначена операция композиции операторов. Остаток H_1 от деления оператора l на оператор $\partial/\partial y + a$ назовем y -инвариантом Лапласа уравнения (1). Легко проверить, что $H_1 = a_x + ba - c$. Если $H_1 = 0$, то решение уравнения (1) может быть найдено путем последовательного интегрирования двух обыкновенных

дифференциальных уравнений с параметром. Если же $H_1 \neq 0$, то можно построить дифференциальную подстановку, переводящую в решения уравнения (1) решения некоторого другого уравнения такого же вида. Суть каскадного метода интегрирования состоит в том, чтобы связать исходное уравнение цепочкой таких подстановок с уравнением, у которого y -инвариант Лапласа будет равен нулю.

Для построения упомянутой дифференциальной подстановки найдем функцию $a_1(x, y)$ такую, что выполнено операторное соотношение

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_1\right) \circ H_1 = H_1 \circ \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right). \quad (3)$$

Если $H_1 \neq 0$, то это соотношение однозначно определяет $a_1 = a - (H_1)_y/H_1$ и верна формула

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) \circ \frac{1}{H_1} = \frac{1}{H_1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_1\right).$$

Пользуясь этой формулой и учитывая (2), нетрудно проверить, что оператор

$$l_1 = \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_1\right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) - H_1 \quad (4)$$

связан с оператором l соотношением

$$l \circ \frac{1}{H_1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \circ \frac{1}{H_1} \circ l_1. \quad (5)$$

Последнее равенство означает, что оператор $(H_1)^{-1}(\partial/\partial x + b)$ переводит ядро оператора l_1 в ядро оператора l , т.е. дифференциальная подстановка $u = (H_1)^{-1}(v_x + b(x, y)v)$, называемая *преобразованием Лапласа*, переводит решения уравнения $l_1(v) = 0$ в решения уравнения (1).

Найдем y -инвариант Лапласа H_2 уравнения $l_1(v) = 0$. По определению H_2 есть остаток от деления оператора l_1 на оператор $\partial/\partial y + a_1$, т.е.

$$l_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_1\right) - H_2.$$

Сравнив последнюю формулу с (4), получаем

$$H_2 = H_1 + \left[\frac{\partial}{\partial x} + b, \frac{\partial}{\partial y} + a_1\right],$$

где через $[f, g]$ обозначен коммутатор $f \circ g - g \circ f$ операторов f и g . Вычислив коммутатор, получаем $H_2 = H_1 + (a_1)_x - b_y$. Если $H_2 \neq 0$, то мы можем повторить рассуждения из предыдущего абзаца применительно к уравнению $l_1(v) = 0$ и однозначно определить дифференциальный оператор l_2 такой, что дифференциальная подстановка $v = (H_2)^{-1}(w_x + b(x, y)w)$ будет переводить решения уравнения $l_2(w) = 0$ в решения уравнения $l_1(v) = 0$.

Многokrato повторяя вышеприведенные рассуждения, мы можем построить последовательность дифференциальных операторов

$$l_i = \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_i\right) - H_{i+1}$$

такую, что оператор $(H_i)^{-1}(\partial/\partial x + b)$ переводит ядро оператора l_i в ядро оператора l_{i-1} . Функции a_i и H_{i+1} при этом будут определяться по рекуррентным формулам

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_i\right) \circ H_i = H_i \circ \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_{i-1}\right), \quad (6)$$

$$H_{i+1} = H_i + \left[\frac{\partial}{\partial x} + b, \frac{\partial}{\partial y} + a_i\right]. \quad (7)$$

Будем продолжать эту последовательность до тех пор, пока очередной y -инвариант Лапласа H_{i+1} не окажется равным нулю, и потому можем считать, что $H_j \neq 0$ для всех $j \leq i$. Заметим, что в качестве определяющих соотношений для a_i мы можем взять операторные равенства

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_i\right) \circ H_i H_{i-1} \cdots H_1 = H_i H_{i-1} \cdots H_1 \circ \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right), \quad (8)$$

так как и формулы (6), и формулы (8) дают нам

$$a_i = a - \frac{(H_i H_{i-1} \cdots H_1)_y}{H_i H_{i-1} \cdots H_1}$$

для всех i таких, что $H_i H_{i-1} \cdots H_1 \neq 0$. Поскольку a_i определены однозначно, то и y -инварианты Лапласа H_{i+1} определены однозначно вплоть до момента, когда очередной инвариант Лапласа обратиться в нуль.

Предположим теперь, что найдется такое m , что $H_{m+1} = 0$. Тогда

$$l_m = \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial y} + a - \frac{(H_m H_{m-1} \cdots H_1)_y}{H_m H_{m-1} \cdots H_1}\right)$$

и $w = H_m H_{m-1} \cdots H_1 \gamma(x, y) f(x)$, где $\gamma_y + a\gamma = 0$, является решением уравнения $l_m(w) = 0$ для любой функции $f(x)$. Воспользовавшись преобразованиями Лапласа, из этого решения получим следующее решение исходного уравнения (1):

$$u = \frac{1}{H_1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \circ \cdots \circ \frac{1}{H_m} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) (H_m H_{m-1} \cdots H_1 \gamma(x, y) f(x)).$$

Заметим, что выбрав функции $B_i(x, y)$ так, чтобы выполнялись операторные соотношения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \circ H_i H_{i-1} \cdots H_1 = H_i H_{i-1} \cdots H_1 \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_i\right), \quad (9)$$

нетрудно переписать полученную нами формулу для решений уравнения (1) в виде

$$u = \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_1\right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_2\right) \circ \cdots \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_m\right) (\gamma(x, y) f(x)). \quad (10)$$

Ясно, что мы можем удовлетворить соотношениям (9), положив

$$B_i = b + \frac{(H_i H_{i-1} \cdots H_1)_x}{H_i H_{i-1} \cdots H_1}.$$

Раскрыв скобки в (10), найденное решение уравнения (1) можем записать также еще и в виде

$$u = \sum_{i=0}^m S_i(x, y) \frac{d^i f(x)}{dx^i}. \quad (11)$$

Для более компактной записи формул здесь и далее будем придерживаться того соглашения, что $d^0 f/dx^0 = f$.

Таким образом, применение каскадного метода интегрирования Лапласа в скалярном случае дает нам следующее хорошо известное

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Обозначим через H_i последовательность функций, заданную рекуррентными формулами (7), (8) и первым членом $H_1 = a_x + ba - c$. Пусть найдется m такое, что $H_{m+1} = 0$. Тогда найдутся функции $S_i(x, y)$ такие, что $S_m \neq 0$ и (11) является решением скалярного ($n = 1$) уравнения (1) для любой функции $f(x)$.*

Ясно, что таким же образом мы можем определить последовательность x -инвариантов Лапласа и доказать для нее утверждение, аналогичное утверждению 1, – для этого достаточно в вышеприведенных рассуждениях поменять местами x и y , а также a и b . Пользуясь симметрией формулы (1) относительно перестановок $x \leftrightarrow y$, $a \leftrightarrow b$, в настоящей статье будем приводить лишь одно из двух “симметричных” утверждений и определений.

Заметим, что не любое уравнение (1) может быть проинтегрировано с помощью каскадного метода Лапласа – условием применимости этого метода в скалярном случае является выполнение равенства $H_i = 0$ при некотором i . В следующей части статьи мы покажем, какие условия следует считать достаточно естественными для применимости этого метода в случае систем и на основе этого сформулируем для систем теорему, аналогичную утверждению 1.

2. Определения, известные факты и вспомогательные утверждения.

Отсюда и далее будем работать с системами линейных уравнений вида (1), т.е. будем считать n произвольным. При этом, однако, мы будем ссылаться на те из приведенных выше формул, которые остаются пригодными и для систем, т.е. не требуют переписывания при замене в них скалярных функций на матрицы с теми же обозначениями. Не оговаривая это каждый раз особо, далее будем считать все вектора n -мерными, а матрицы – имеющими размер $n \times n$. Если не указано иного, компоненты всех векторов и матриц следует считать функциями от x и y .

Так же, как и в скалярном случае, инвариант Лапласа H_1 определим по формуле (2) как остаток от деления оператора l на оператор $\partial/\partial y + a$. Так как $H_1 = a_x + ba - c$ теперь является матрицей, которая, вообще говоря, может быть вырожденной, формула (5) становится непригодной и прямого аналога преобразования Лапласа в случае систем не имеется. Однако можем попробовать построить последовательность матриц H_i , определяя, по аналогии со скалярным случаем, матрицы a_i из формулы (8) и вычисляя H_{i+1} по формуле (7). Вычислив коммутатор в (7) и обозначив через Y_i произведение матриц $H_i H_{i-1} \cdots H_1$, приходим к следующему определению, предложенному в работе [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Обобщенными y -инвариантами Лапласа системы (1) называются матрицы Y_i , определяемые по рекуррентным формулам*

$$Y_1 = H_1 = a_x + ba - c, \quad Y_{i+1} = H_{i+1}Y_i, \quad (12)$$

$$H_{i+1} = \frac{\partial a_i}{\partial x} + [b, a_i] - \frac{\partial b}{\partial y} + H_i, \quad (13)$$

где матрицы a_i выбраны так, чтобы выполнялись операторные соотношения

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_i \right) \circ Y_i = Y_i \circ \left(\frac{\partial}{\partial y} + a \right). \quad (14)$$

Формула (14) равносильна следующему матричному уравнению:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y} - Y_i a + a_i Y_i = 0, \quad (15)$$

которое в случае $\det(Y_i) = 0$ может не иметь решения a_i . Поэтому существование последовательности инвариантов Лапласа нужной длины не гарантировано для какой угодно системы вида (1). И если в скалярном случае условием применимости метода каскадного интегрирования являлось обращение в нуль инварианта Лапласа Y_{m+1} при некотором m , то в случае систем к этому условию приходится добавлять еще и предположение о разрешимости соотношений (14) для всех $i \leq m$.

Кроме того, для вырожденного Y_i матрица a_i (если она существует) определяется из (15) неоднозначно, а стало быть и последовательность обобщенных инвариантов также определена, вообще говоря, неоднозначно. Исходя из нежелательности работы с некорректно определенными объектами, естественно потребовать от системы (1), чтобы ее инварианты Лапласа Y_i не только существовали, но и не зависели от выбора решений уравнений (15). Из работ [4], [5] известно следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Обобщенный инвариант Лапласа Y_k системы (1) не зависит от выбора матриц a_i тогда и только тогда, когда для всех $i < k$ найдутся матрицы B_i , удовлетворяющие уравнениям*

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x} + bY_i - Y_i B_i = 0. \quad (16)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (16) равносильно операторному равенству

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b \right) \circ Y_i = Y_i \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_i \right). \quad (17)$$

Отметим, что функции B_i в формуле (10) для решений скалярного уравнения задаются как раз уравнением (17). Это совпадение можно рассматривать как дополнительный аргумент в пользу разумности предположения о единственности обобщенных инвариантов Лапласа системы (1).

Целью настоящей статьи является доказательство следующего аналога утверждения 1.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть для системы (1) для всех $i \leq t$ найдутся матрицы a_i и B_i такие, что выполнены соотношения (14) и (17), где матрицы Y_i вычислены по*

формулам (12), (13), и пусть $Y_{m+1} = 0$. Тогда найдутся матрицы $S_i(x, y)$ такие, что

$$u = \sum_{i=0}^m S_i(x, y) \frac{d^i f(x)}{dx^i} \quad (18)$$

для любого вектора $f(x)$ является решением системы (1) и $\det(S_m) \neq 0$.

Другими словами, в теореме 1 предполагаем, что обобщенные инварианты Лапласа системы (1) существуют и определены однозначно¹. Можно доказать, что при этих предположениях условие $Y_{m+1} = 0$ является необходимым для существования решения вида (18) (ср. [5], [6]), однако такое доказательство выходит за рамки темы настоящей статьи. Заметим, что в работе [7] ранее уже был предложен алгоритм построения решений вида (18), но он требует выполнения условия значительно более жесткого, чем условие $Y_{m+1} = 0$.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие результаты.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Матрица a_i такая, что выполнено соотношение (14), существует тогда и только тогда, когда в ядре Y_i можно выбрать базис из векторов e_j таких, что $\partial e_j / \partial y + a e_j = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть для всех $j \leq t$ существуют обобщенные инварианты Лапласа Y_j системы (1) и для всех $i < t$ найдутся матрицы B_i , удовлетворяющие уравнениям (17). Тогда для всех $i < t$ верна формула $Y_{i+1} = Y_i \hat{H}_{i+1}$, где

$$\hat{H}_1 = H_1, \quad \hat{H}_{i+1} = \hat{H}_i + \left[\frac{\partial}{\partial x} + B_i, \frac{\partial}{\partial y} + a \right]. \quad (19)$$

Утверждения 3 и 4 были доказаны в работах [7] и [8] соответственно.

Мы будем стремиться провести доказательство теоремы 1 так, чтобы из него можно было легко извлечь способ построения решения (18). При практическом нахождении этого решения удобно сначала обратимыми преобразованиями привести систему (1) к некому каноническому виду. Для обоснования корректности этого действия следует доказать

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть условия теоремы 1 выполнены для системы (1). Тогда система уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{b} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + \tilde{a} \right) \tilde{u} - \tilde{H}_1 \tilde{u} = 0,$$

полученная из системы (1) заменой переменных $u = \gamma(x, y) \tilde{u}$, где γ – невырожденная матрица, также будет удовлетворять всем условиям теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямым вычислением получаем

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \gamma^{-1}(a\gamma + \gamma_y), & \left(\frac{\partial}{\partial y} + \tilde{a} \right) &= \gamma^{-1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial y} + a \right) \circ \gamma, \\ \tilde{b} &= \gamma^{-1}(b\gamma + \gamma_x), & \left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{b} \right) &= \gamma^{-1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b \right) \circ \gamma \end{aligned}$$

¹Этим предположением не накладываем на систему никаких ограничений кроме тех, которые выполнены в скалярном случае, так как инварианты Лапласа скалярного уравнения всегда существуют и определены однозначно.

и $\tilde{H}_1 = \gamma^{-1}H_1\gamma$. Стартуя с этих формул, индукцией по i нетрудно доказать, что $\tilde{H}_i = \gamma^{-1}H_i\gamma$, $\tilde{Y}_i = \gamma^{-1}Y_i\gamma$ и условия теоремы выполнены для преобразованной системы. Действительно, из (14) следует

$$\gamma^{-1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_i \right) \circ \gamma \gamma^{-1} Y_i \gamma = \gamma^{-1} Y_i \gamma \gamma^{-1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial y} + a \right) \circ \gamma.$$

В силу предположения индукции $\tilde{Y}_i = \gamma^{-1}Y_i\gamma$ последняя формула означает, что для $\tilde{a}_i = \gamma^{-1}(a_i\gamma + \gamma_y)$ выполнено соотношение

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \tilde{a}_i \right) \circ \tilde{Y}_i = \tilde{Y}_i \circ \left(\frac{\partial}{\partial y} + \tilde{a} \right).$$

Подставив в формулу (13) предположение индукции $\tilde{H}_i = \gamma^{-1}H_i\gamma$ и найденное значение $\tilde{a}_i$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{i+1} &= \frac{\partial \tilde{a}_i}{\partial x} + [\tilde{b}, \tilde{a}_i] - \frac{\partial \tilde{b}}{\partial y} + \tilde{H}_i = \left[\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{b}, \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{a}_i \right] + \gamma^{-1}H_i\gamma \\ &= \left[\gamma^{-1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b \right) \circ \gamma, \gamma^{-1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_i \right) \circ \gamma \right] + \gamma^{-1}H_i\gamma = \gamma^{-1}H_{i+1}\gamma \end{aligned}$$

и $\tilde{Y}_{i+1} = \tilde{H}_{i+1}\tilde{Y}_i = (\gamma^{-1}H_{i+1}\gamma)(\gamma^{-1}Y_i\gamma) = \gamma^{-1}Y_{i+1}\gamma$. Аналогичные рассуждения приводят к тому, что $\tilde{B}_i = \gamma^{-1}(B_i\gamma + \gamma_x)$ удовлетворяет равенству

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{b} \right) \circ \tilde{Y}_i = \tilde{Y}_i \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{B}_i \right).$$

Утверждение 5 доказано.

3. Метод каскадного интегрирования.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Учитывая утверждение 5, без нарушения общности можем считать, что $a = 0$, так как сделав в системе (1) замену переменных $u = \gamma(x, y)\tilde{u}$, где $\gamma_y + a\gamma = 0$, всегда можем обнулить матрицу a .

Обозначим

$$L_i = \left(\frac{\partial}{\partial x} + b \right) \circ Y_i \circ \frac{\partial}{\partial y} - Y_{i+1}.$$

Заметим, что считая Y_0 равным единичной матрице и учитывая равенство $Y_1 = H_1$, получаем $L_0 = l$. Для дальнейших рассуждений нам также потребуются дифференциальные операторы

$$\hat{l}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_i \right) \circ \frac{\partial}{\partial y} - \hat{H}_{i+1}, \quad (20)$$

где B_i и $\hat{H}_i$ находятся по формулам (17) и (19), соответственно. Учитывая (19), оператор $\hat{l}_i$ можем также записать в виде

$$\hat{l}_i = \frac{\partial}{\partial y} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_i \right) - \hat{H}_i = 0. \quad (21)$$

Предположим, что существуют матрицы γ_j такие, что

$$u_i = \frac{d^p f}{dx^p} + \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_j(x, y) \frac{d^j f}{dx^j} \quad (22)$$

является решением системы уравнений $L_i(u) = 0$ для любого вектора $f(x)$. Покажем, что тогда найдутся матрицы ξ_j такие, что для дифференциального оператора

$$R_i = \sum_{j=0}^p \xi_j(x, y) \frac{d^j}{dx^j}$$

выполнены равенства

$$\frac{\partial R_i(f)}{\partial y} = \widehat{l}_i(u_i), \quad Y_i R_i(f) = 0. \quad (23)$$

Нетрудно проверить, что

$$\widehat{l}_i(u_i) = \sum_{j=0}^p \eta_j(x, y) \frac{d^j f}{dx^j},$$

где η_j – некоторые матрицы. В силу (17) и утверждения 4 выполнены соотношения $L_i = Y_i \widehat{l}_i$ и, следовательно, из $L_i(u_i) = 0$ вытекает $\widehat{l}_i(u_i) \in \ker Y_i$. Таким образом, $Y_i \eta_j = 0$ для всех $j \leq p$. Выбрав матрицы ξ_j в операторе R_i так, что $\partial \xi_j / \partial y = \eta_j$, выполним первое из условий (23). Покажем теперь, что мы можем при этом удовлетворить и второму из условий (23), выбрав константы интегрирования так, чтобы столбцы матриц ξ_j также лежали в ядре Y_i . Для этого воспользуемся тем, что согласно утверждению 3 в $\ker Y_i$ можно выбрать базис $e_1(x), \dots, e_k(x)$ из векторов, зависящих только от x . Произвольный вектор $r(x, y)$ из ядра Y_i разлагается по этому базису: $r(x, y) = \sum_{j=1}^k e_j(x) c_j(x, y)$. Тогда

$$\int r dy = g(x) + \sum_{j=1}^k e_j(x) \int c_j(x, y) dy,$$

где $g(x)$ – вектор, составленный из констант интегрирования. Выбрав $g = 0$, получим $Y_i \int r dy = 0$.

Пусть теперь нам известно решение u_i вида (22) для системы $L_i(u) = 0$ и соответствующий ему оператор R_i , удовлетворяющий условию (23). Покажем, что тогда решение u_{i-1} системы $L_{i-1}(u) = 0$ и соответствующий ему оператор R_{i-1} можно найти по формулам

$$\begin{aligned} u_{i-1} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_i \right) (u_i) - R_i(f), \\ z_{i-1} &= \frac{\partial \widehat{H}_i}{\partial x} + B_{i-1} \widehat{H}_i - \widehat{H}_i B_i, \\ R_{i-1}(f) &= \int (\widehat{H}_i R_i(f) + z_{i-1} u_i) dy, \end{aligned} \quad (24)$$

выбирая в последней формуле константы интегрирования так, чтобы $Y_{i-1} R_{i-1}(f) = 0$.

Действительно, учитывая (20) и (21), нетрудно проверить, что

$$\widehat{l}_{i-1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_i \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_{i-1} \right) \circ \widehat{l}_i + z_{i-1}. \quad (25)$$

В силу этой формулы и равенства (23) получаем

$$\widehat{l}_{i-1} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + B_i u_i \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_{i-1} \right) \left(\frac{\partial R_i(f)}{\partial y} \right) + z_{i-1} u_i.$$

Учитывая, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + B_{i-1} \right) \left(\frac{\partial R_i(f)}{\partial y} \right) = \widehat{l}_{i-1}(R_i(f)) + \widehat{H}_i R_i(f),$$

приходим к формуле

$$\widehat{l}_{i-1} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + B_i u_i - R_i(f) \right) = \widehat{H}_i R_i(f) + z_{i-1} u_i.$$

Учитывая утверждение 4 и сопоставляя формулы (17) при i и $i-1$, легко видеть, что столбцы матрицы z_{i-1} лежат в ядре Y_{i-1} , а $Y_{i-1} \widehat{H}_i R_i(f) = Y_i R_i(f) = 0$ в силу (23). Поэтому

$$\widehat{l}_{i-1}(u_{i-1}) = \widehat{H}_i R_i(f) + z_{i-1} u_i \in \ker Y_{i-1} \Rightarrow L_{i-1}(u_{i-1}) = Y_{i-1} \widehat{l}_{i-1}(u_{i-1}) = 0.$$

Так как $Y_{m+1} = 0$ и $L_m(u) = (Y_m u_y)_x + b Y_m u_y$, любой зависящий только от x вектор $f(x)$ может быть взят в качестве решения системы $L_m(u) = 0$. Обозначим $u_m = f(x)$. Нетрудно проверить, что соответствующий оператор R_m находится по формуле $R_m = -\int \widehat{H}_{m+1} dy$. Стартуя с этих u_m и R_m , по формулам (24) найдем решение системы (1). Теорема доказана.

Из проведенного доказательства видно, что каскадный метод интегрирования Лапласа для систем уравнений вида (1) и проверка его применимости сводятся к выполнению следующей последовательности действий

1) Найти набор n линейно независимых решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $w_y + a(x, y)w = 0$ и, подставив эти решения в качестве столбцов в матрицу $\gamma(x, y)$, сделать в системе (1) замену переменных $u = \gamma \tilde{u}$. После такого преобразования мы придем к системе вида (1) с нулевой матрицей a и шаги 2)–4) алгоритма будем выполнять для этой преобразованной системы уравнений.

2) Найти B_i по формулам (17), проверив тем самым их разрешимость, и выяснить выполнено ли условие $Y_{m+1} = 0$ при некотором m . Матрицы Y_i при этом удобно находить по формуле $Y_i = Y_{i-1} \widehat{H}_i$, где $\widehat{H}_i$ вычисляются по формуле (19).

3) Убедиться в разрешимости соотношений (14) – для этого достаточно, например, проверить, что при всех $i \leq m$ базисы ядер Y_i могут быть составлены из векторов, не зависящих от y . (При практических вычислениях нам не требуется знать a_i .)

4) Если удалось выполнить шаги 2) и 3), то система (1) допускает построение решения вида (18) методом каскадного интегрирования Лапласа. В этом случае

следует взять в качестве u_m произвольный вектор $f(x)$ и в качестве R_m – матрицу $\xi(x, y)$ такую, что $\xi_y = -\widehat{H}_{m+1}$ и $Y_m \xi = 0$, а затем последовательно, начиная с $i = m - 1$ и двигаясь в сторону уменьшения индекса i , найти u_i и $R_i(f)$ по рекуррентным формулам (24), выбирая при этом константы интегрирования для $R_i(f)$ так, чтобы $Y_i R_i(f) = 0$.

5) Вернуться в исходную систему координат: $u = \gamma u_0$, где γ – матрица, найденная нами в пункте 1), будет решением системы (1).

Проиллюстрируем этот алгоритм на примере системы

$$\begin{aligned} v_{xy} + \frac{v_x + v_y}{x + y} - 8 \frac{\phi}{\psi^2} v - 6 \frac{\psi}{\phi} w &= 0, \\ w_{xy} + \frac{w_x + w_y}{x + y} + 4 \frac{\phi}{\psi^2} v + 6 \frac{\psi}{\phi} w &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\phi = (x^3 y^3 + 3x^2 y^2 - 3xy - 1)^2$, $\psi = x^4 y^4 - 4x^3 y^3 - 6x^2 y^2 - 4xy + 1$. При дальнейших вычислениях будем пользоваться тем, что $\phi_{xy} \phi - \phi_x \phi_y = 6\phi\psi$ и $\psi_x \psi_y - \psi_{xy} \psi = 4\phi$.

1) Сделав замену переменных $v = p/(x + y)$, $w = q/(x + y)$, перейдем к системе

$$\begin{aligned} p_{xy} - 8 \frac{\phi}{\psi^2} p - 6 \frac{\psi}{\phi} q &= 0, \\ q_{xy} + 4 \frac{\phi}{\psi^2} p + 6 \frac{\psi}{\phi} q &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

которая не содержит первых производных по x .

2) Найдем последовательности B_i , $\widehat{H}_i$ и Y_i для системы (27):

$$\begin{aligned} Y_1 &= H_1 = \widehat{H}_1 = \begin{pmatrix} 8 \frac{\phi}{\psi^2} & 6 \frac{\psi}{\phi} \\ -4 \frac{\phi}{\psi^2} & -6 \frac{\psi}{\phi} \end{pmatrix}, \\ B_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\phi_x}{\phi} - 2 \frac{\psi_x}{\psi} & 0 \\ 0 & \frac{\psi_x}{\psi} - \frac{\phi_x}{\phi} \end{pmatrix}, \quad \widehat{H}_2 = \begin{pmatrix} -6 \frac{\psi}{\phi} & 6 \frac{\psi}{\phi} \\ -4 \frac{\phi}{\psi^2} & 4 \frac{\phi}{\psi^2} \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \frac{24}{\psi} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \\ B_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{\psi_x}{\psi} & 0 \\ 0 & -\frac{\psi_x}{\psi} \end{pmatrix}, \quad \widehat{H}_3 = \begin{pmatrix} -6 \frac{\psi}{\phi} - 4 \frac{\phi}{\psi^2} & 6 \frac{\psi}{\phi} \\ -4 \frac{\phi}{\psi^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \frac{144}{\phi} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \\ B_3 &= \begin{pmatrix} -\frac{\phi_x}{\phi} & 0 \\ 0 & -\frac{\phi_x}{\phi} \end{pmatrix}, \quad \widehat{H}_4 = \begin{pmatrix} -4 \frac{\phi}{\psi^2} & 6 \frac{\psi}{\phi} \\ -4 \frac{\phi}{\psi^2} & 6 \frac{\psi}{\phi} \end{pmatrix}, \quad Y_4 = 0. \end{aligned}$$

3) В качестве базисного вектора ядер Y_2 и Y_3 можно взять постоянный вектор $(1, 1)$ и, следовательно, соотношения (14) для системы (27) разрешимы. Таким образом, все условия теоремы выполнены и мы можем использовать описанный выше алгоритм для построения решений системы (27).

4) По формулам (24) построим последовательность u_i и R_i для системы (27):

$$\begin{aligned} u_3 &= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, & R_3 &= - \begin{pmatrix} \frac{\psi_x}{\psi} & \frac{\phi_x}{\phi} \\ \frac{\psi_x}{\psi} & \frac{\phi_x}{\phi} \end{pmatrix}, \\ u_2 &= \frac{du_3}{dx} + (B_3 - R_3)u_3, & R_2 &= \begin{pmatrix} 2 \left(\frac{\psi_x}{\psi} \right)_x & -\frac{\psi_{xx}}{\psi} \\ 2 \left(\frac{\psi_x}{\psi} \right)_x & -\frac{\psi_{xx}}{\psi} \end{pmatrix}, \\ u_1 &= \frac{\partial u_2}{\partial x} + B_2 u_2 - R_2 u_3, & R_1 &= 0, \\ u_0 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_1 \right) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + B_2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_3 - R_3 \right) u_3 - R_2 u_3 \right]. \end{aligned}$$

5) Сделав обратную замену переменных, получаем, что

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \frac{u_0}{x+y} = \frac{1}{x+y} \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_1 \right) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + B_2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_3 - R_3 \right) - R_2 \right] \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

является решением системы (26) для любого вектора $(f_1(x), f_2(x))$.

Во время подготовки настоящей публикации автору стало известно о работе [9], в которой предложена модификация каскадного метода интегрирования Лапласа для систем уравнений вида

$$a_i(x, y) \frac{\partial u_i}{\partial x} + b_i(x, y) \frac{\partial u_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^n c_{ij}(x, y) u_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (28)$$

с попарно неколлинеарными векторами (a_i, b_i) . Не исключено, что после некоторых видоизменений этот алгоритм удастся применить и к системам вида (1), однако в нынешнем своем виде он для этого непригоден, так как в существенной мере опирается на свойство попарной неколлинеарности векторов (a_i, b_i) , которое не выполнено для $2n$ -компонентных систем, получающихся при записи системы (1) в виде (28).

Автор благодарен В. В. Соколову за вопросы, которые послужили первоначальным толчком к получению изложенного здесь результата, и за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal*, v. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1915.
- [2] E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes*, v. 1, Hermann, Paris, 1896; v. 2, Hermann, Paris, 1898.
- [3] Ф. Трикоми, *Лекции по уравнениям в частных производных*, ИЛ, М., 1957.
- [4] А. В. Жибер, В. В. Соколов, "Точно интегрируемые уравнения лиувилевского типа", *УМН*, **56:1** (2001), 63–106.
- [5] А. В. Жибер, В. В. Соколов, С. Я. Старцев, "Нелинейные гиперболические системы уравнений лиувилевского типа", *Тихонов и современная математика: Функциональный анализ и дифференциальные уравнения* (Международная конференция, Москва, МГУ, 19–25 июля 2006 г.), Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, М., 2006, 305–306.

- [6] С. Я. Старцев, “Об инвариантах Лапласа систем гиперболических уравнений”, Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения, **3**, Ин-т математики с ВЦ РАН, Уфа, 1996, 144–154.
- [7] А. В. Жибер, С. Я. Старцев, “Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений”, *Матем. заметки*, **74**:6 (2003), 848–857.
- [8] А. М. Гурьева, А. В. Жибер, “Инварианты Лапласа двумеризованных открытых цепочек Тоды”, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 401–421.
- [9] S. P. Tsarev, *Generalized Laplace transformations and integration of hyperbolic systems of linear partial differential equations*, [arXiv: cs/0501030](https://arxiv.org/abs/cs/0501030).

С. Я. Старцев

Институт математики

с вычислительным центром РАН

E-mail: startsev@anrb.ru

Поступило

29.04.2005

Исправленный вариант

19.04.2007