Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Фаминский, Задача Коши для уравнения
Кортевега–де Фриза в случае негладкой неограниченной
начальной функции, *Матем. заметки*, 2008, том 83, вы-
пуск 1, 119–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4339>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:20:51

УДК 517.957

Задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза в случае негладкой неограниченной начальной функции

А. В. Фаминский

Установлен результат о существовании в полосе $\Pi = (-1, 0) \times \mathbb{R}$ решений задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$ с начальным условием либо 1) $u(-1, x) = -x\theta(x)$, либо 2) $u(-1, x) = -x\theta(-x)$, где θ – функция Хевисайда. Построенные решения являются бесконечно гладкими при $t \in (-1, 0)$ и быстро убывающими при $x \rightarrow +\infty$. Для случая первого начального условия установлена также единственность в некотором классе. Подобные специальные решения уравнения КдФ возникают при изучении асимптотического поведения по малой дисперсии решений некоторых модельных задач в окрестности линии слабого разрыва.

Библиография: 12 названий.

В работах [1]–[4] для ряда газодинамических задач было исследовано влияние малой вязкости на решения, имеющие слабый разрыв в пределе нулевой вязкости. Было, в частности, показано, что если по одну из сторон слабого разрыва этот предел постоянен, то в окрестности линии слабого разрыва главный член асимптотик решений допределных задач по малому параметру, характеризующему малость диссипации, часто описывается специальным решением уравнения Бюргерса

$$u_t - u_{xx} + uu_x = 0 \quad (1)$$

(здесь и далее $u = u(t, x)$). Это специальное решение определено в полосе $\Pi = (-1, 0) \times \mathbb{R}$, удовлетворяет условию

$$u(-1, x) = -x\theta(\pm x), \quad (2)$$

где θ – функция Хевисайда, и имеет асимптотику при $|x| \rightarrow \infty$

$$u(t, x) - \frac{x\theta(\pm x)}{t} = o(1). \quad (3)$$

Подобное решение легко строится с помощью хорошо известной замены Хопфа–Коула; при $t \rightarrow 0 - 0$ оно терпит сильный разрыв (см., например, [3]).

При замене малой диссипации на малую дисперсию аналогичные рассуждения приводят к тому, что главный член соответствующих асимптотик в окрестности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00253).

слабого разрыва должен описываться вместо уравнения (1) решениями в полосе Π уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad (4)$$

также обладающими свойствами (2) и (3).

Однако в отличие от уравнения Бюргерса явные формулы для построения подобных решений в случае уравнения КдФ неизвестны. Новым является и сам факт существования этих решений, который устанавливается в работе.

В работе рассматривается задача Коши в полосе Π для уравнения КдФ (4) с начальным условием

$$u(-1, x) = u_0(x), \quad (5)$$

где либо

$$u_0(x) = -x\theta(x), \quad (6)$$

либо

$$u_0(x) = -x\theta(-x). \quad (7)$$

Заметим, что в отличие от уравнения Бюргерса, где с помощью простой замены оба случая (6) и (7) сводятся друг к другу, для уравнения КдФ, имеющего различные свойства при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$, это действительно разные задачи.

Заметим также, что в обоих случаях (6) и (7) соответствующая задача Коши для вырожденного уравнения

$$U_t + UU_x = 0 \quad (8)$$

имеет точное решение

$$U(t, x) = \frac{x\theta(\pm x)}{t}, \quad (9)$$

являющееся гладким при $t < 0$ за исключением линии $x = 0$, где оно терпит слабый разрыв (характеристики уравнения (8) пересекаются в момент времени $t = 0$).

Ранее задача Коши для уравнения КдФ в классах растущих функций при неограниченной начальной функции изучалась в работах [5]–[9]. Основная идея доказательства существования решения во всех этих статьях состоит в том, что сначала строится решение $U(t, x)$ задачи Коши для вырожденного уравнения (8) с растущей начальной функцией $U_0(x)$ такой, что функция $v_0(x) \equiv u_0(x) - U_0(x)$ уже является убывающей, а потом для функции $v(t, x) \equiv u(t, x) - U(t, x)$ рассматривается задача Коши для уравнения

$$v_t + v_{xxx} + vv_x + (vU)_x + U_{xx} = 0$$

с начальной функцией v_0 . Подобный подход потребовал определенной гладкости функции U , что привело к необходимости наложения условий гладкости на функцию u_0 . В частности, в статье [5] предполагалось существование производных до 7-го порядка включительно, а в [6]–[9] u_0 вообще предполагалась бесконечно дифференцируемой, что, разумеется, не выполняется в случаях (6) и (7).

Идея настоящей статьи состоит в том, чтобы в отличие от [5]–[9] рассмотреть вместо точного решения уравнения (8) приближенное решение с “хорошей” невязкой. Выбор начальной функции в виде (6) или (7) дает такую возможность.

Положим

$$\psi(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} \lambda(x-y)u_0(y) dy,$$

где ядро усреднения $\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\lambda(x) \geq 0$, $\lambda(x) = 0$ при $|x| \geq 1$, $\lambda(-x) \equiv \lambda(x)$, $\int_{-1}^1 \lambda(x) dx = 1$.

Нетрудно видеть, что как в случае (6), так и в случае (7) $\psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\psi(x) = u_0(x)$ при $|x| \geq 1$. Положим

$$g(t, x) \equiv \frac{\psi(x)}{t}.$$

Введем обозначения для функциональных пространств. Положим $L_2 = L_2(\mathbb{R})$, $H^k = H^k(\mathbb{R}) = W_2^k(\mathbb{R})$. Если X – некоторое банахово пространство, а I – интервал действительной оси, то символ $L_p(I; X)$ используется в общепринятом смысле для обозначения измеримых по Бохнеру суммируемых со степенью p (существенно ограниченных при $p = +\infty$) отображений I в X (см., например, [10]). Через $C(\bar{I}; X)$ и $C_w(\bar{I}; X)$ обозначим соответственно пространства непрерывных и слабо непрерывных отображений $\bar{I}$ в X . Известно, что $C_w(\bar{I}; X) \subset L_\infty(I; X)$ для ограниченного отрезка $\bar{I}$ (см. [10]).

Положим $x_+ = \max(x, 0)$. Для операции усреднения будем использовать общепринятый символ: если $h > 0$, то

$$\begin{aligned} f^h(x) &\equiv \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} \lambda\left(\frac{x-y}{h}\right) f(y) dy, \\ f^h(t, x) &\equiv \frac{1}{h^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \lambda\left(\frac{t-\tau}{h}\right) \lambda\left(\frac{x-y}{h}\right) f(\tau, y) dy d\tau. \end{aligned}$$

Во многих выкладках в дальнейшем применяется простое интерполяционное неравенство для $f \in H^1$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f^2(x) \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |f' f| dx \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} (f')^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} f^2 dx \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Для $\delta \in [0, 1)$ положим $\Pi_\delta = (-1, -\delta) \times \mathbb{R}$ (тогда $\Pi_0 = \Pi$).

Введем вспомогательное понятие обобщенного решения задачи (4), (5) при произвольной начальной функции $u_0 \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u(t, x) \in L_2^{\text{loc}}(\Pi_\delta)$ называется *обобщенным решением* задачи (4), (5) в полосе Π_δ для некоторого $\delta \in [0, 1)$, если она

- 1) удовлетворяет уравнению (4) в смысле следующего интегрального тождества: для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Pi_\delta)$

$$\iint_{\Pi_\delta} u \left(\varphi_t + \varphi_{xxx} + \frac{1}{2} u \varphi_x \right) dx dt = 0, \quad (11)$$

- 2) принимает начальные данные (5) в следующем слабом смысле (возможно, после изменения на множестве нулевой меры): для любой функции $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} \int_{\mathbb{R}} (u(t, x) - u_0(x)) \omega(x) dx = 0.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема о существовании решения рассматриваемой задачи (более регулярного, чем в смысле данного определения).

ТЕОРЕМА 1. *Если выполнены условия (6) или (7), то решение $u(t, x)$ задачи (4), (5) в полосе Π существует, причем для любых $\delta \in (0, 1)$ и $\alpha \geq 0$*

$$(1 + x_+)^{\alpha} \left(u(t, x) + \frac{u_0(x)}{t} \right) \in C_w([-1, -\delta]; H^1), \quad (12)$$

$$|x|^{1/2} \left(u(t, x) + \frac{u_0(x)}{t} \right) \in C_w([-1, -\delta]; L_2), \quad (13)$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} [\|(1 + x_+)^{\alpha}(u(t, x) - u_0(x))\|_{H^1} + \| |x|^{1/2}(u(t, x) - u_0(x)) \|_{L_2}] = 0, \quad (14)$$

для любого $x_0 \in \mathbb{R}$

$$(x - x_0)_+^{\alpha} u_{xx}(t, x) \in L_2(\Pi_{\delta}) \quad (15)$$

и для любых $t_0 \in (0, 1 - \delta)$ и целых $m, l \geq 0$

$$(x - x_0)_+^{\alpha} D_t^m D_x^l (u(t, x) + g(t, x)) \in C([-1 + t_0, -\delta]; L_2). \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$f(t, x) \equiv (-g_t - g_{xxx} + gg_x)(t, x) = \frac{\psi(x)}{t^2} - \frac{\psi'''(x)}{t} + \frac{\psi(x)\psi'(x)}{t^2}.$$

Поскольку $g(t, x) = -U(t, x)$ при $|x| \geq 1$ (функция U задана формулой (9)), то $f(t, x) = 0$ при $|x| \geq 1$ и $f \in C^{\infty}(\Pi)$.

Положим

$$v_0(x) \equiv u_0(x) - \psi(x)$$

($v_0 \in H^1$ и $v_0(x) = 0$ при $|x| \geq 1$) и рассмотрим задачу Коши

$$v_t + v_{xxx} + vv_x - (gv)_x + f = 0, \quad (17)$$

$$v(-1, x) = v_0(x). \quad (18)$$

Решение задачи (17), (18) (и, как следствие, решение исходной задачи) построим как предел решений некоторых “гладких” задач.

Введем вспомогательную бесконечно дифференцируемую неубывающую при $x \geq 0$ функцию $\sigma(x)$ такую, что $\sigma(x) = x$ при $x \in [0, 1]$, $\sigma(x) = 2$ при $x \geq 2$.

Для любого $h \in (0, 1]$ положим

$$\psi_h(x) \equiv \begin{cases} \psi(x) & \text{при } |x| \leq 1/h, \\ -(1/h)\theta(\pm x)\sigma(h|x|)\text{sign } x & \text{при } |x| > 1/h \end{cases}$$

(плюс для (6), минус для (7)). Тогда $\psi_h \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, причем $|\psi_h(x)| \leq 2/h$ и равномерно по h

$$|\psi_h(x)| \leq (1 + |x|)\theta(\pm x + 1), \quad |\psi_h^{(j)}(x)| \leq c(j) \quad (19)$$

для любых $x \in \mathbb{R}$ и натуральных j . Положим также

$$g_h(t, x) \equiv \frac{\psi_h(x)}{t}, \quad v_{0h}(x) \equiv v_0^h(x)$$

и рассмотрим задачу Коши

$$v_{ht} + v_{hxxx} + v_h v_{hx} - (g_h v_h)_x + f = 0, \quad (20)$$

$$v_h(-1, x) = v_{0h}(x). \quad (21)$$

Согласно [11] для любого $\delta \in (0, 1)$ существует единственное решение этой задачи $v_h(t, x) \in C^\infty([-1, -\delta]; \mathcal{S}(\mathbb{R}))$, где $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ – пространство Шварца быстро убывающих функций.

Установим оценки функций v_h , равномерные по $h \in (0, 1]$.

Пусть $\rho(x) \in C^3(\mathbb{R})$ – некоторая неотрицательная функция, имеющая не более чем степенной рост при $|x| \rightarrow \infty$. Умножив уравнение (20) на $2v_h(t, x)\rho(x)$ и проинтегрировав по $\mathbb{R}$, получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} v_h^2 \rho \, dx + 3 \int_{\mathbb{R}} v_{hx}^2 \rho' \, dx - \int_{\mathbb{R}} v_h^2 \rho''' \, dx \\ & - \int_{\mathbb{R}} g_{hx} v_h^2 \rho \, dx + \int_{\mathbb{R}} g_h v_h^2 \rho' \, dx - \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} v_h^3 \rho' \, dx + 2 \int_{\mathbb{R}} f v_h \rho \, dx = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Выбрав сначала $\rho(x) \equiv 1$, находим из (22), что для любого $t \in [-1, -\delta]$

$$\|v_h(t, \cdot)\|_{L_2}^2 \leq \|v_{0h}\|_{L_2}^2 + c(\delta^{-1})(t+1) \leq c_1(\delta^{-1}). \quad (23)$$

Пусть теперь $\rho(x) \equiv (x - x_0)_+^{2\alpha}$ для некоторых $x \in \mathbb{R}$ и $\alpha \geq 3/2$. Заметим, что тогда

$$|\psi_h(x)\rho'(x)| \leq c(x_0, \alpha)(\rho(x) + 1). \quad (24)$$

Используя интерполяционное неравенство (10) находим, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} v_h^3 \rho' \, dx \right| & \leq \left(\int_{\mathbb{R}} v_h^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} v_h^2 \rho' \, dx \right)^{1/2} \sup_{x \in \mathbb{R}} (|v_h|(\rho')^{1/2}) \\ & \leq \sqrt{2} \left(\int_{\mathbb{R}} v_h^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} v_h^2 \rho' \, dx \right)^{1/2} \left[\int_{\mathbb{R}} \left(|v_{hx} v_h| \rho' + \frac{1}{2} v_h^2 \rho'' \right) dx \right]^{1/2} \\ & \leq c \left(\int_{\mathbb{R}} v_h^2 \, dx \right)^{1/2} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} v_{hx}^2 \rho' \, dx \right)^{1/4} \left(\int_{\mathbb{R}} v_h^2 \rho' \, dx \right)^{3/4} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{\mathbb{R}} v_h^2 \rho' \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} v_h^2 \rho'' \, dx \right)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

и с учетом уже полученной оценки (23) выводим из (22), что

$$\|(x - x_0)_+^\alpha v_h(t, \cdot)\|_{L_2}^2 \leq \|(x - x_0)_+^\alpha v_{0h}\|_{L_2}^2 + c(\delta^{-1}, x_0, \alpha)(t+1). \quad (25)$$

Теперь положим $\rho(x) \equiv 1 + (x - x_0)_+^{2\alpha}$, умножим (20) на $-2(v_{hxx}(t, x) + v_h^2(t, x))\rho(x)$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} (v_{hx}^2 - \frac{1}{3} v_h^3) \rho \, dx + 3 \int_{\mathbb{R}} v_{hx}^2 \rho' \, dx - \int_{\mathbb{R}} v_{hx}^2 \rho''' \, dx \\ & - 4 \int_{\mathbb{R}} v_h v_{hx}^2 \rho' \, dx + \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} v_h^3 \rho''' \, dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} v_h^4 \rho' \, dx \\ & + \int_{\mathbb{R}} (g_h \rho' - 3g_{hx} \rho) v_{hx}^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}} (g_{hxxx} \rho + g_{hxx} \rho') v_h^2 \, dx \\ & + \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} (2g_{hx} \rho - g_h \rho') v_h^3 \, dx + 2 \int_{\mathbb{R}} f_x v_{hx} \rho \, dx - \int_{\mathbb{R}} f v_h^2 \rho \, dx = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку с учетом уже доказанных оценок (23) и (25)

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathbb{R}} v_h^3 \rho \, dx \right| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |v_h| \int_{\mathbb{R}} v_h^2 \rho \, dx \leq c \left(\int_{\mathbb{R}} v_{hx}^2 \rho \, dx \right)^{1/4}, \\
 \left| \int_{\mathbb{R}} v_h v_{hx}^2 \rho' \, dx \right| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} v_h^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} v_{hx}^2 \rho' \, dx \right)^{1/2} \sup_{x \in \mathbb{R}} (|v_{hx}| (\rho')^{1/2}) \\
 &\leq c \left[\left(\int_{\mathbb{R}} v_{hxx}^2 \rho' \, dx \right)^{1/4} \left(\int_{\mathbb{R}} v_{hx}^2 \rho' \, dx \right)^{3/4} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_{\mathbb{R}} v_{hx}^2 \rho' \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} v_{hxx}^2 \rho'' \, dx \right)^{1/2} \right], \\
 \left| \int_{\mathbb{R}} v_h^4 \rho \, dx \right| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} v_h^2 \int_{\mathbb{R}} v_h^2 \rho \, dx \leq c \left(\int_{\mathbb{R}} v_{hx}^2 \rho \, dx \right)^{1/2},
 \end{aligned}$$

то используя также неравенство (24) (которое, очевидно, справедливо и для данного ρ) выводим из (26), что при $\alpha \geq 3/2$

$$\|(1 + (x - x_0)_+^{2\alpha})^{1/2} v_{hx}\|_{L_\infty(-1, -\delta; L_2)} + \|(x - x_0)_+^{\alpha-1/2} v_{hxx}\|_{L_2(\Pi_\delta)} \leq c(\delta^{-1}, x_0, \alpha). \quad (27)$$

Опять вернемся к равенству (22). Выберем в нем в качестве весовой функции сглаженную функцию $|x|$, а именно, положим $\rho(x) = \widetilde{|x|} \equiv \int_{\mathbb{R}} \lambda(x - y) |y| \, dy$. Тогда поскольку в этом случае $\rho(x) = |x|$ при $|x| \geq 1$, $|\rho^{(j)}(x)| \leq c(j)$ для любого натурального j , то с учетом оценок (23), (25) и (27) находим, что при $t \in [-1, -\delta]$

$$\|\widetilde{|x|}^{1/2} v_h(t, \cdot)\|_{L_2}^2 \leq \|\widetilde{|x|}^{1/2} v_{0h}\|_{L_2}^2 + c(\delta^{-1})(t + 1). \quad (28)$$

Далее, поскольку согласно (20)

$$v_{ht} = (-v_{hxx} - (1/2)v_h^2 + g_h v_h)_x - f,$$

из оценок (23), (27) и известного вложения L_1 в H^{-1} следует, что для любого натурального $n \geq 2$

$$\|v_{ht}\|_{L_2(-1, -1/n; H^{-1}(I_n))} \leq c(n), \quad I_n = (-n, n). \quad (29)$$

Из (23), (27), (29), компактности вложения $H^2(I_n)$ в $H^1(I_n)$ и известной теоремы вложения функциональных пространств “эволюционного типа” (см., например, [12]) следует, что множество функций $\{v_h(t, x)\}$ предкомпактно в пространстве $L_2(-1, -1/n; H^1(I_n))$. С помощью диагонального процесса по расширяющейся системе прямоугольников $Q_n = (-1, -1/n) \times I_n$ выделяем последовательность $h_k \rightarrow +0$ такую, что для любого n при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{array}{lll}
 v_{h_k}(t, x) \rightarrow v(t, x) & \text{в} & L_2(-1, -1/n; H^1(I_n)), \\
 v_{h_k x x}(t, x) \rightarrow v_{xx}(t, x) & \text{слабо в} & L_2(Q_n), \\
 v_{h_k t}(t, x) \rightarrow v_t(t, x) & \text{слабо в} & L_2(-1, -1/n; H^{-1}(I_n)).
 \end{array}$$

Положим

$$u(t, x) \equiv v(t, x) - g(t, x).$$

Нетрудно видеть, что функция u является обобщенным решением задачи (4), (5) в смысле определения 1 и обладает свойствами (12), (13) и (15).

Установим свойство (14). Прежде всего заметим, что из (23), (25) и (28) следует, что для любого $\alpha \geq 3/2$

$$\|(1 + x_+^{2\alpha} + |\widetilde{x}|)^{1/2} v(t, \cdot)\|_{L_2}^2 \leq \|(1 + x_+^{2\alpha} + |\widetilde{x}|)^{1/2} v_0\|_{L_2}^2 + c(t + 1),$$

что в сочетании со слабой непрерывностью приводит к тому, что

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} \|(1 + x_+^{2\alpha} + |x|)^{1/2} (u(t, x) - u_0(x))\|_{L_2} = 0 \quad (30)$$

(более подробно аналогичные рассуждения проведены, например, в [11]). Далее, из равенства (26) следует, что для любого $\alpha \geq 3/2$

$$\begin{aligned} & \|(1 + x_+^{2\alpha})^{1/2} v_x(t, \cdot)\|_{L_2}^2 \\ & \leq \|(1 + x_+^{2\alpha})^{1/2} v_{0x}\|_{L_2}^2 + c(t + 1) + \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} (1 + x_+^{2\alpha}) |v^3(t, x) - v_0^3(x)| dx, \end{aligned}$$

откуда с учетом уже полученного свойства (30) и слабой непрерывности выведем (14).

Перейдем к свойству (16). Чтобы его установить индукцией по l докажем, что для любых $t_0 \in (0, 1 - \delta)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\alpha \geq 3/2$

$$\begin{aligned} & \|(x - x_0)_+^\alpha D_x^l v_h\|_{L_\infty(-1+t_0, -\delta; L_2)} \\ & + \|(x - x_0)_+^{\alpha-1/2} D_x^{l+1} v_h\|_{L_2((-1+t_0, -\delta) \times \mathbb{R})} \leq c(\delta^{-1}, t_0^{-1}, x_0, \alpha, l). \end{aligned} \quad (31)$$

Пусть $l \geq 2$. Положим $\rho(x) \equiv (x - x_0)_+^{2\alpha}$, $\nu(t) \equiv \eta(2(t + 1)/t_0 - 1)$, где $\eta(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ такая функция, что $\eta \geq 0$, $\eta' \geq 0$, $\eta(t) = 0$ при $t \leq 0$, $\eta(t) = 1$ при $t \geq 1$ (т.е. функция типа “срезки”). Продифференцируем уравнение (20) l раз по x , умножим получившееся равенство на $2D_x^l v_h(t, x)\rho(x)\nu(t)$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} (D_x^l v_h)^2 \rho \nu dx - \int_{\mathbb{R}} (D_x^l v_h)^2 \rho \nu' dx + 3 \int_{\mathbb{R}} (D_x^{l+1} v_h)^2 \rho' \nu dx \\ & - \int_{\mathbb{R}} (D_x^l v_h)^2 \rho''' \nu dx + 2 \int_{\mathbb{R}} D_x^l (v_h v_{hx}) D_x^l v_h \rho \nu dx \\ & - 2 \int_{\mathbb{R}} D_x^{l+1} (g_h v_h) D_x^l v_h \rho \nu dx + 2 \int_{\mathbb{R}} D_x^l f D_x^l v_h \rho \nu dx = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Слагаемое $\int_{\mathbb{R}} (D_x^l v_h)^2 \rho \nu' dx$ оценивается исходя из индуктивного предположения. В интеграле от нелинейного члена

$$2 \int_{\mathbb{R}} v_h D_x^{l+1} v_h D_x^l v_h \rho \nu dx = - \int_{\mathbb{R}} (v_{hx} \rho + v_h \rho') (D_x^l v_h)^2 \nu dx,$$

причем в силу (25) и (27)

$$\left\| \sup_{x \geq x_0} (|v_{hx}| + |v_h|) \right\|_{L_4(-1, -\delta)} \leq c(\delta^{-1}, x_0).$$

Кроме того, при $2 \leq j \leq l-1$ в силу индуктивного предположения

$$\int_{\mathbb{R}} |D_x^j v_h D_x^{l+1-j} v_h D_x^l v_h| \rho \nu dx \leq \int_{\mathbb{R}} (D_x^l v_h)^2 \rho \nu dx + c(\delta^{-1}, t_0^{-1}, x_0, \alpha).$$

Интеграл, содержащий g_h , оценивается с использованием неравенств (19) и индуктивного предположения. Таким образом, из равенства (32) следует оценка (31). Теорема доказана.

В случае начального условия (6) удалось установить также единственность построенного решения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено условие (6). Тогда для любого $\delta \in (0, 1)$ обобщенное решение задачи (4), (5) в полосе Π_δ в смысле определения 1 единственно в классе функций таких, что для некоторого $\alpha > 1/2$

$$(1 + x_+)^{\alpha} \left(u(t, x) + \frac{u_0(x)}{t} \right) \in L_{\infty}(-1, -\delta; H^1), \quad (33)$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} \|(1 + x_+)^{\alpha} (u(t, x) - u_0(x))\|_{L_2} = 0. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(t, x)$ и $\tilde{u}(t, x)$ суть два решения одной задачи (4), (5) в полосе Π_δ . Положим

$$\begin{aligned} v(t, x) &\equiv u(t, x) + g(t, x), & \tilde{v}(t, x) &\equiv \tilde{u}(t, x) + g(t, x), \\ w(t, x) &\equiv u(t, x) - \tilde{u}(t, x) = v(t, x) - \tilde{v}(t, x). \end{aligned}$$

Тогда в силу (11) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Pi_\delta)$ справедливо равенство

$$\iint_{\Pi_\delta} \left[w(\varphi_t + \varphi_{xxx}) + \frac{1}{2}(v^2 - \tilde{v}^2)\varphi_x - gw\varphi_x \right] dx dt = 0. \quad (35)$$

Кроме того, в силу (34)

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} \|(1 + x_+)^{\alpha} w(t, x)\|_{L_2} = 0. \quad (36)$$

Выбирая в (35) в качестве пробной функции φ соответствующее ядро усреднения, находим, что при достаточно малых h для $t \in (-1, -\delta)$

$$w_t^h + w_{xxx}^h + (v_x w + \tilde{v} w_x)^h - (gw)_x^h = 0 \quad (37)$$

(усреднение проводится как по x , так и по t). Заметим, что согласно (33)

$$(1 + x_+)^{\alpha} (v_x w + \tilde{v} w_x), (1 + x_+)^{\alpha-1} (gw)_x \in L_{\infty}(-1, -\delta; L_2). \quad (38)$$

Пусть $\rho(x) \in C^3(\mathbb{R})$ – некоторая функция такая, что $\rho(x) = (1 + x)^{2\alpha-1}$ при $x \geq 0$, $\rho(x) = \exp x$ при $x \leq -1$ и $\rho(x) > 0$, $\rho'(x) > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Умножив (37) на $2w^h(t, x)\rho(x)$ и проинтегрировав, получим, что для любых $-1 < t_0 < t < -\delta$ при достаточно малых h

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} (w^h(t, x))^2 \rho dx + 3 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} (w_x^h)^2 \rho' dx d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} (w^h(t_0, x))^2 \rho dx + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} (w^h)^2 \rho''' dx d\tau \\ &\quad - 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} (v_x w + \tilde{v} w_x)^h w^h \rho dx d\tau + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}} (gw)_x^h w^h \rho dx d\tau. \end{aligned} \quad (39)$$

Перейдя в (39) к пределу сначала при $h \rightarrow 0$, а потом при $t_0 \rightarrow -1$, получим с учетом (36) и (38), что для почти всех $t \in (-1, -\delta)$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} w^2(t, x) \rho dx + 3 \int_{-1}^t \int_{\mathbb{R}} w_x^2 \rho' dx d\tau \\ &= \int_{-1}^t \int_{\mathbb{R}} w^2 \rho''' dx d\tau - 2 \int_{-1}^t \int_{\mathbb{R}} (v_x w + \tilde{v} w_x) w \rho dx d\tau + 2 \int_{-1}^t \int_{\mathbb{R}} (g w)_x w \rho dx d\tau. \end{aligned} \quad (40)$$

Положим $\gamma(x) \equiv (\rho(x)/\rho'(x))^{1/2}$. Тогда очевидно, что $\gamma(x) \leq c(1+x)^{1/2}$ при $x \geq 0$, $\gamma(x) \leq c$ при $x \leq 0$. Используя интерполяционное неравенство (10), находим, что

$$\begin{aligned} \left| 2 \int_{-1}^t \int_{\mathbb{R}} v_x w^2 \rho dx d\tau \right| &\leq c \sup_{\tau \in (-1, -\delta)} \left(\int_{\mathbb{R}} v_x^2 \gamma dx \right)^{1/2} \int_{-1}^t \sup_{x \in \mathbb{R}} |w(\rho \rho')^{1/4}| \left(\int_{\mathbb{R}} w^2 \rho dx \right)^{1/2} d\tau \\ &\leq c_1 \int_{-1}^t \left[\int_{\mathbb{R}} |D_x(w(\rho \rho')^{1/4}) \cdot w(\rho \rho')^{1/4}| dx \int_{\mathbb{R}} w^2 \rho dx \right]^{1/2} d\tau \\ &\leq c_2 \int_{-1}^t \left[\left(\int_{\mathbb{R}} w_x^2 \rho' dx \right)^{1/4} \left(\int_{\mathbb{R}} w^2 \rho dx \right)^{3/4} + \int_{\mathbb{R}} w^2 \rho dx \right] d\tau \\ &\leq \int_{-1}^t \int_{\mathbb{R}} w_x^2 \rho' dx d\tau + c_3 \int_{-1}^t \int_{\mathbb{R}} w^2 \rho dx d\tau. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается

$$2 \int_{-1}^t \int_{\mathbb{R}} \tilde{v} w_x w \rho dx d\tau = - \int_{-1}^t \int_{\mathbb{R}} (\tilde{v} \rho)_x w^2 dx d\tau.$$

Наконец, поскольку в случае условия (6) для любого $x \in \mathbb{R}$

$$|\psi(x) \rho'(x)| \leq c \rho(x),$$

то

$$\left| 2 \int_{-1}^t \int_{\mathbb{R}} (g w)_x w \rho dx d\tau \right| = \left| \int_{-1}^t \int_{\mathbb{R}} (g_x \rho - g \rho') w^2 dx d\tau \right| \leq c \int_{-1}^t \int_{\mathbb{R}} w^2 \rho dx d\tau.$$

Таким образом, из равенства (40) получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}} w^2(t, x) \rho dx \leq c \int_{-1}^t \int_{\mathbb{R}} w^2 \rho dx d\tau$$

и, следовательно, $w \equiv 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $u(t, x)$ является решением задачи (4), (5) при условиях (6) или (7) в полосе Π , то для любого $T > 0$ функция

$$\bar{u}(t, x) \equiv T^{-2/3} u\left(\frac{t}{T}, \frac{x}{T^{1/3}}\right)$$

в полосе $(-T, 0) \times \mathbb{R}$ является, очевидно, решением задачи Коши

$$\bar{u}_t + \bar{u}_{xxx} + \bar{u} \bar{u}_x = 0, \quad \bar{u}(-T, 0) = -\frac{x}{T} \theta(\pm x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Никакие свойства построенных решений при $t \rightarrow 0 - 0$ в работе не устанавливаются.

Автор искренне благодарен Б. И. Сулейманову за постановку задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Ильин, Д. И. Неудачин, “О влиянии малой диссипации на решения гиперболической системы, имеющей слабый разрыв”, *Докл. РАН*, **351**:5 (1996), 583–585.
- [2] Д. И. Неудачин, “О влиянии малой диссипации на решение задачи о безударном сжатии плоского слоя газа”, *ЖВМ и МФ*, **39**:2 (1999), 332–340.
- [3] С. В. Захаров, А. М. Ильин, “От слабого разрыва к градиентной катастрофе”, *Матем. сб.*, **192**:10 (2001), 3–18.
- [4] С. В. Захаров, “Зарождение ударной волны в одной задаче Коши для уравнения Бюргера”, *ЖВМ и МФ*, **44**:3 (2004), 536–542.
- [5] A. Menikoff, “The existence of unbounded solutions of the Korteweg–de Vries equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **25**:4 (1972), 407–432.
- [6] И. Н. Бондарева, “Уравнение Кортевега–де Фриза в классах растущих функций с заданной асимптотикой при $|x| \rightarrow \infty$ ”, *Матем. сб.*, **122**:2 (1983), 131–141.
- [7] И. Н. Бондарева, М. А. Шубин, “О единственности решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза в классах растущих функций”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1985, № 3, 35–38.
- [8] И. Н. Бондарева, М. А. Шубин, “Уравнения типа Кортевега–де Фриза в классах растущих функций”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **14** (1989), 45–56.
- [9] С. Е. Kenig, G. Ponce, L. Vega, “Global solutions for the KdV equation with unbounded data”, *J. Differential Equations*, **139**:2 (1997), 339–364.
- [10] Х. Гаевский, К. Грогер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.
- [11] А. В. Фаминский, “Задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **13** (1988), 56–105.
- [12] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.

А. В. Фаминский

Российский университет дружбы народов

E-mail: afaminskii@sci.pfu.edu.ru

Поступило

31.05.2006