Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Созутов, А. К. Шлепкин, О некоторых группах с конечной инволюцией, насыщенных конечными простыми подгруппами, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 3, 433–447

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm434>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 18:07:20

УДК 512.544

О НЕКОТОРЫХ ГРУППАХ С КОНЕЧНОЙ ИНВОЛЮЦИЕЙ, НАСЫЩЕННЫХ КОНЕЧНЫМИ ПРОСТЫМИ ПОДГРУППАМИ

А. И. Созутов, А. К. Шлепкин

В работе на основе введенного в [1] понятия насыщенности дается характеристика локально конечных простых групп $Re(P)$, $Sz(Q)$ и $L_2(P)$ с абелевой силовой 2-подгруппой в классах смешанных и периодических групп. Часть основных результатов была анонсирована в [2]. Теорема 2 работы обобщает результаты статей [3], [4].

Библиография: 26 названий.

1. Формулировки основных результатов, вспомогательные утверждения.

Напомним некоторые определения. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторое множество групп. Всякую группу L , изоморфную некоторой группе из $\mathfrak{X}$, будем называть $\mathfrak{X}$ -группой. Группа G насыщена группами из $\mathfrak{X}$, если любая ее конечная подгруппа K содержится в некоторой $\mathfrak{X}$ -группе $L \leq G$, при этом $\mathfrak{X}$ для G называется насыщающим множеством. Множество всех конечных подгрупп G , изоморфных группам из $\mathfrak{X}$, будем обозначать через $\mathfrak{F}$.

Собственная подгруппа H группы G называется сильно вложенной, если $2 \in \pi(H)$ и $2 \notin \pi(H \cap H^g)$ для любого элемента $g \in G \setminus H$. Инволюция i группы G называется конечной, если для всех $g \in G$ порядки элементов ii^g конечны [5]. Подгруппа H группы G называется сильно изолированной, если для любого неединичного элемента $h \in H$ выполняется $C_G(h) \leq H$, и бесконечно изолированной, если $C_G(h) \leq H$ для бесконечных централизаторов $C_G(h)$, содержащих инволюции [6].

Сформулируем основные результаты статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть бесконечная группа G с сильно вложенной подгруппой B и конечной инволюцией насыщена конечными простыми подгруппами и для некоторой инволюции $i \in G$ централизатор $C_G(i)$ – 2-группа. Тогда G локально конечна и изоморфна одной из групп $L_2(Q)$, $Sz(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.

ТЕОРЕМА 2. Если бесконечная периодическая группа G содержит абелеву силовскую 2-подгруппу и насыщена конечными простыми подгруппами, то она локально конечна и изоморфна одной из групп $Re(P)$, $L_2(Q)$ над подходящими локально конечными полями P , Q .

Для доказательства этих теорем нам понадобятся следующие известные результаты.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00542, и Красноярского краевого фонда науки, грант № 9F0132.

ЛЕММА 1.1 [3, теорема 1]. Пусть периодическая группа G насыщена конечными простыми неабелевыми подгруппами и некоторая силовская 2-подгруппа S из G является конечной группой диэдра. Тогда G изоморфна локально конечной простой группе $L_2(P)$, где P – локально конечное поле нечетной характеристики.

Непосредственным следствием теоремы 3.1 из [7] является

ЛЕММА 1.2. Пусть локально конечная группа G является объединением цепочки $G_1 < G_2 < G_3 < \dots$ конечных простых групп Шевалле лиевского ранга 1. Тогда G – простая группа Шевалле лиевского ранга 1 над локально конечным полем.

ЛЕММА 1.3. Если периодическая группа G обладает конечной силовской 2-подгруппой, то все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены [8].

ЛЕММА 1.4. 2-группа с единственной инволюцией либо локально циклическая, либо (обобщенная) группа кватернионов (конечная или бесконечная) [9].

ЛЕММА 1.5. Пусть i – почти регулярная конечная инволюция группы G . Тогда

1. G – локально конечная группа;
2. $[i, G]$ содержится в FC -радикале группы G ;
3. коммутант FC -радикала группы G конечен [10]; в частности, периодическая группа с почти регулярной инволюцией локально конечна и почти разрешима [9].

Из теоремы Горенштейна–Волтера [12, с. 27] и характеристик конечных простых неабелевых групп силовскими 2-подгруппами [13, с. 6–7] вытекает

ЛЕММА 1.6. Пусть G – конечная простая группа с абелевой силовской 2-подгруппой. Тогда G изоморфна одной из групп J_1 , $L_2(2^n)$, $Re(3^{2n+1})$, $L_2(q)$, где $q = 3, 5 \pmod{8}$.

ЛЕММА 1.7 (теорема Бендера). Конечная простая группа G с сильно вложенной подгруппой изоморфна одной из групп $L_2(q)$, $Sz(q)$, $U_3(q)$, где q – подходящая степень числа 2 [12]. Если, дополнительно, централизатор некоторой инволюции из G есть 2-группа, то G изоморфна $L_2(q)$ или $Sz(q)$.

Приведем описание некоторых собственных подгрупп групп $L_2(q)$ [14].

ЛЕММА 1.8. Пусть $G = L_2(q)$, где $q = p^n > 3$ – нечетное число. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. силовская p -подгруппа P группы G элементарная абелева и $B = N_G(P) = P \rtimes H$ – группа Фробениуса с ядром P и циклическим инвариантным множителем H нечетного порядка $(q - 1)/2$;
2. все инволюции в G сопряжены и силовская 2-подгруппа T группы G является группой диэдра;
3. если a – инволюция из G , то $C_G(a)$ – группа диэдра;
4. если $G = C_G(a)X$, где a – инволюция, а X – собственная подгруппа, то X сопряжена с B и $X \cap C_G(a) = 1$;
5. G порождается любыми двумя различными централизаторами инволюций;

6. если $q = 3, 5 \bmod 8$, то силовская 2-подгруппа T группы G элементарная абелева порядка 4 и $N_G(T)$ – группа Фробениуса порядка 12.

ЛЕММА 1.9. Пусть $G = L_2(q)$, где $q = 2^n > 2$, P – силовская 2-подгруппа группы G , $B = N_G(P)$. Тогда

1. P – элементарная абелева группа и любые две силовские 2-подгруппы группы G пересекаются тривиально, в частности, $C_G(a) = P$ для любой инволюции $a \in P$;
2. $B = P \rtimes H$ – группа Фробениуса с ядром P и циклическим инвариантным множителем H порядка $q - 1$, действующим транзитивно на множестве $P^\#$, в частности, все инволюции в G сопряжены;
3. $N = N_G(H) = H \rtimes \langle v \rangle$ – группа диэдра;
4. если K – подгруппа в G и K обладает нормальной подгруппой нечетного порядка, то $N_G(K)$ – группа диэдра;
5. G порождается любыми двумя силовскими 2-подгруппами.

Описание строения подгрупп в $Sz(q)$ можно найти в [14], [15].

ЛЕММА 1.10. Группа $Sz(q)$ имеет следующие максимальные подгруппы:

1. $B = P \rtimes H$ – группа Фробениуса порядка $q^2(q - 1)$ с ядром P порядка q^2 (силовская 2-подгруппа) и циклическим инвариантным множителем H (подгруппа Картана) порядка $q - 1$, транзитивно действующим на множествах неединичных элементов из $Z(P)$ и $P/Z(P)$;
2. группу диэдра порядка $2(q - 1)$ (нормализатор подгруппы Картана);
3. группу Фробениуса $\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, где $|a| = q + r + 1$, $|b| = 4$ и $r^2 = 2q$;
4. группу Фробениуса $\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, где $|a| = q - r + 1$, $|b| = 4$ и $r^2 = 2q$;
5. $Sz(s)$, где $s^t = q$ и t – простой делитель числа $2k + 1$; здесь $q = 2^{2k+1}$.

Из теоремы 3.33 [12] и результатов работ [16], [17] следует

ЛЕММА 1.11. Пусть $G = Re(q)$, где $q = 3^{2n+1} > 3$, a – инволюция из G , T – силовская 2-подгруппа в G , B – подгруппа Бореля. Тогда

1. $|G| = q^3(q - 1)(q^3 + 1)$, $|B| = q^3(q - 1)$;
2. $B = U \rtimes H = N_G(U)$, H – циклическая группа порядка $q - 1$, $N_G(H) = H \rtimes \langle v \rangle$ – группа диэдра, $|O(H)| = \frac{1}{2}|H|$, $U \rtimes O(H)$ – группа Фробениуса;
3. T – элементарная абелева группа порядка 8, $C_G(T) = T$ и $H = N_G(T) = T \rtimes (\langle b \rangle \rtimes \langle d \rangle)$, где $\langle b \rangle \rtimes \langle d \rangle$ – группа Фробениуса порядка 21;
4. $C_G(a) = \langle a \rangle \times L$, где $L \simeq L_2(q)$;
5. $G = \langle H, C_G(a) \rangle = \langle S, C_G(a) \rangle$, где S – произвольная силовская 2-подгруппа группы G , не содержащая инволюции a ;
6. все инволюции из G сопряжены в G .

Из описания максимальных подгрупп в $Re(q)$ [17] вытекает

ЛЕММА 1.12. Пусть $G = Re(q)$, где $q = 3^{2n+1} > 3$, U – силовская 3-подгруппа из G и $D < G$ – некоторая подгруппа нечетного порядка. Тогда справедливо хотя бы одно из утверждений:

1. $D \leq U \rtimes A_0 = O(B)$, где B – подгруппа Бореля, $A_0 = O(H)$ – циклическая группа порядка $(q - 1)/2$;

2. D содержится в одной из групп Фробениуса вида $A_i \ltimes \langle b_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$, с циклическими ядрами A_i порядков $(q+1)/4$, $q+1-3^{n+1}$, $q+1+3^{n+1}$ соответственно и инвариантными множителями $\langle b_i \rangle$ порядка 3.

При этом $C_G(A_0)$ и $C_G(A_1)$ содержат инволюции, а A_2 и A_3 инвертируются инволюциями.

Как известно [18] (см. также [12, с. 90–93]), имеет место следующая

ЛЕММА 1.13. Пусть $G = J_1$ – первая группа Янко, a – инволюция из G , T – силовская 2-подгруппа в G . Тогда

1. T – элементарная абелева группа порядка 8, $C_G(T) = T$ и $H = N_G(T) = T \ltimes (\langle b \rangle \ltimes \langle d \rangle)$, где $\langle b \rangle \ltimes \langle d \rangle$ – группа Фробениуса порядка 21;
2. $C_G(a) = \langle a \rangle \times L$, где $L \simeq L_2(4) \simeq L_2(5)$;
3. $G = \langle H, C_G(a) \rangle = \langle S, C_G(a) \rangle$, где S – произвольная силовская 2-подгруппа группы G , не содержащая инволюции a ;
4. все инволюции из G сопряжены в G .

Утверждения нижеследующих лемм можно найти в [5], [19], [20].

ЛЕММА 1.14. Пусть группа G содержит сильно вложенную подгруппу B и конечную инволюцию. Тогда все инволюции в G сопряжены и все инволюции из B сопряжены в B . В частности, любая пара инволюций в G порождает конечную подгруппу.

ЛЕММА 1.15. Пусть B – собственная подгруппа группы G с конечной инволюцией. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. подгруппа B сильно вложена в G ;
2. подгруппа B содержит инволюцию, $C_G(i) \leq B$ для каждой инволюции $i \in B$ и не все инволюции из G содержатся в B .

ЛЕММА 1.16. Пусть G – группа с сильно вложенной подгруппой B и конечной инволюцией. Тогда

1. между множеством инволюций из B и множеством инволюций любого правого смежного класса Bg , где $g \in G$, можно установить взаимно однозначное соответствие, при этом если i – фиксированная инволюция из B , то каждой инволюции $k \in B$ (в том числе и инволюции i) соответствует единственная инволюция $j_k \in Bg$ такая, что $g^{-1}kg = j_k i j_k$;
2. любой элемент $g \in G$ обладает представлением $g = hj$, где $h \in B$, а j – некоторая инволюция;
3. для любой инволюции $j \in G \setminus B$ в подгруппе B существует множество M_j строго вещественных относительно j элементов той же мощности, что и множество инволюций из B .

ЛЕММА 1.17. Пусть G – группа с конечной инволюцией и сильно вложенной подгруппой B , $i \in B$ и $j \in G \setminus B$ – произвольные инволюции. Пусть далее $H_j = B \cap B^j$ и T_j – подгруппа в B , порожденная всеми строго вещественными относительно j элементами из B . Тогда

1. $T_j \leq H_j$, H_j – подгруппа без инволюций, $\langle j, T_j \rangle = T_j \ltimes \langle j \rangle$ и $\langle j, H_j \rangle = H_j \ltimes \langle j \rangle$;

2. в каждом смежном классе $C_B(i) \cdot b$, где $b \in B$, существует единственный строго вещественный элемент относительно инволюции j и его порядок конечен и нечетен;
3. $B = T_j \cdot C_B(i)$, в частности, i^{T_j} – множество всех инволюций группы B ;
4. если b – неединичный строго вещественный относительно инволюции $j \in G \setminus B$ элемент из B , то $C_B(b)$ не содержит инволюций.

ЛЕММА 1.18 [6, теорема 2]. Пусть группа G содержит конечную инволюцию, сильно вложенную бесконечно изолированную подгруппу B и выполняются следующие условия:

1. централизатор $C_G(k)$ некоторой инволюции $k \in G$ не содержит бесконечных подгрупп, в которых каждый неединичный элемент почти регулярен;
2. хотя бы одно из пересечений $B \cap B^g$, где $g \in G \setminus B$, бесконечно;
3. существует элемент $b \in B$, инвертируемый некоторой инволюцией j из G , централизатор $C_G(b)$ которого не содержится в B .

Тогда все инволюции в G сопряжены, $F = \langle b^G \rangle$ – периодическая абелева подгруппа, инвертируемая каждой инволюцией из G , и $G = C_G(F)C_G(k)$.

ЛЕММА 1.19 (Лемма Бусаркина). Пусть G – группа с конечной инволюцией i . Если $C_G(i) = \langle i \rangle$, то $G = F \rtimes \langle i \rangle$, где F – периодическая абелева подгруппа из G , инволюция i инвертирует F [19, предложение 4.2].

Наконец, нам понадобится лемма, обобщающая одно предложение из [21].

ЛЕММА 1.20. Пусть G – произвольная группа и $\{L_i = F_i \rtimes \langle a \rangle \mid i \in J\}$ – некоторое множество ее фробениусовых подгрупп с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$ и ядрами F_i . Если $X = \cup F_i \subseteq N_G(X)$, то для подгрупп $B = \langle X, a \rangle$ и $T = \langle X \rangle$ справедливы следующие утверждения:

1. $B = T \rtimes \langle a \rangle$ и каждый элемент из $B \setminus T$ сопряжен в B с подходящим неединичным элементом из подгруппы $\langle a \rangle$;
2. если все подгруппы F_i , где $i \in J$, абелевы и $|a| = n < \infty$, то T – нильпотентная группа;
3. если все подгруппы F_i , где $i \in J$, абелевы периодические группы и $|a| = n < \infty$, то B – локально конечная группа Фробениуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. По условиям леммы $T \leq N_G(X)$ и для любых элементов $x \in X$ и $r \in \langle a \rangle^\#$ найдется элемент $v \in X \subseteq T$ такой, что $(rx)^v \in \langle a \rangle^\#$. Пусть теперь $t = x_1 x_2 \dots x_n$ – произвольный элемент из T , где $x_1, \dots, x_n \in X$. По индуктивному предположению мы можем считать, что $rx_1 \dots x_{n-1} = s^b$ для подходящих элементов $s \in \langle a \rangle^\#$ и $b \in T$. Так как $y = bx_n b^{-1} \in X$ по условиям леммы, то по вышедоказанному элемент $rt = s^b x_n = s^b y^b = (sy)^b$ сопряжен с некоторым неединичным элементом из $\langle a \rangle$. Следовательно, каждый элемент из $\langle a \rangle^\# T$ сопряжен в T с неединичным элементом из $\langle a \rangle$. В частности, $\langle a \rangle \cap T = 1$, так как из $1 \neq r \in \langle a \rangle \cap T$ по доказанному следует, что единица $1 = rr^{-1}$ сопряжена с неединичным элементом из $\langle a \rangle$, что невозможно. Таким образом, $r^B = r^T = rT$ для любого $r \in \langle a \rangle^\#$; ввиду условий леммы подгруппа T нормальна в B и $B = T \rtimes \langle a \rangle$. Утверждение доказано.

2. Пусть $t \in T$, $x \in X$ – произвольные элементы и $1 \leq m < n$. По условиям леммы и первому утверждению $\langle x, ta^m \rangle^v \leq F_i \lambda \langle a \rangle$ для подходящих $v \in T$ и индекса i . Отсюда следует, что $x^{ta^m} \in C_G(x)$ и $x^{B \setminus T} \subseteq C_G(x)$. Из первого утверждения также получаем $|x^t a^{-1}| = n$ и, следовательно,

$$1 = (x^t a^{-1})^n = x^t \cdot x^{ta} \cdot x^{ta^2} \cdots x^{ta^{n-1}},$$

откуда заключаем, что

$$x^t = (x^{ta} \cdot x^{ta^2} \cdots x^{ta^{n-1}})^{-1} \in C_G(x).$$

Таким образом, $x^B \subseteq C_G(x)$, $\langle x^B \rangle$ абелева подгруппа для любого $x \in X$ и по теореме Плоткина [22] подгруппа T локально нильпотентна. Так как любой элемент простого порядка из $\langle a \rangle$ по первому утверждению леммы индуцирует на T расщепляющий автоморфизм, то по теореме из [23] T – нильпотентная группа. Утверждение доказано.

3. Обозначим $\pi = \pi(\langle a \rangle)$. Ввиду условий утверждения подгруппа T порождена π' -элементами, а по утверждению 2 T – нильпотентная группа. Следовательно, T – π' -группа и из первого утверждения легко следует, что $C_T(r) = 1$ для любого $r \in \langle a \rangle^\#$. Это означает, что $(B, \langle a \rangle)$ – пара Фробениуса и B – локально конечная группа Фробениуса с инвариантным множителем $\langle a \rangle$ и ядром T . Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1. На протяжении этого раздела группа G и ее собственная подгруппа B удовлетворяют условиям теоремы 1.

ЛЕММА 2.1. Пусть v – произвольная инволюция из $G \setminus B$. Тогда

1. подгруппа $H = B \cap B^v$ абелева и инволюция v инвертирует H ;
2. подгруппа Z , порожденная всеми инволюциями из B , элементарная абелева;
3. силовская 2-подгруппа U группы B нормальна в B и либо совпадает с Z , либо является локально конечной группой периода 4, причем $Z(U) = Z$;
4. $B = U \rtimes H$ – локально конечная группа Фробениуса с ядром U и инвариантным множителем H ;
5. H – локально циклическая группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 1.14 все инволюции в G сопряжены и все инволюции из B сопряжены в B . Поэтому централизатор любой инволюции из G является 2-группой и каждая инволюция в G конечна.

1. В силу лемм 1.14, 1.16 H – группа без инволюций и $C_H(v) = 1$. Ввиду лемм 1.5, 1.19 H – периодическая абелева группа, состоящая из всех строго вещественных относительно инволюции v элементов из B . Утверждение доказано.

2. Пусть i – произвольная инволюция из B . В силу леммы 1.14 подгруппа $D = \langle i, v \rangle$ конечна и по условиям теоремы D содержится в конечной простой неабелевой подгруппе L из G . Так как $L \not\leq B$ и $i \in L \cap B$, подгруппа $L \cap B$ сильно вложена в L . Поскольку все инволюции в G сопряжены, то централизатор каждой из них является 2-группой и ввиду результата Бендера (лемма 1.7) заключаем, что L изоморфна одной из групп $L_2(Q)$, $Sz(Q)$ над конечным полем Q характеристики 2. При этом подгруппа $L \cap B$ содержит инволюцию i и совпадает с нормализатором $N_L(S)$ силовской 2-подгруппы S в L

(леммы 1.9, 1.10). Как вытекает из строения групп $L_2(Q)$ и $Sz(Q)$ (леммы 1.9, 1.10), $N_L(S) = S \rtimes \langle A \rangle$ – группа Фробениуса с неединичным циклическим инвариантным множителем $A = \langle a \rangle$, инвертируемым инволюцией v , и $L_i = \langle a, i \rangle = F_i \rtimes \langle a \rangle$ – группа Фробениуса с абелевым ядром F_i . Очевидно, что $a \in H$ и $H \leq C_G(a)$ по первому утверждению леммы. Далее, ввиду утверждения 3 леммы 1.17 множество инволюций в B совпадает с множеством i^H . Таким образом, если j – произвольная инволюция из B , то $j = i^h$ для подходящего элемента $h \in H$ и $L_j = \langle a, j \rangle = \langle a, i^h \rangle = L_i^h$ – конечная группа Фробениуса с инвариантным множителем $\langle a \rangle$ и элементарным абелевым ядром F_j . Пусть J – множество всех инволюций из B . Тогда объединение X всех ядер F_j , где $j \in J$, совпадает с J , в частности, $X \leq N_G(X)$. Применяя лемму 1.20, приходим к выводу, что подгруппа $\langle J, a \rangle = Z \rtimes \langle a \rangle$ – локально конечная группа Фробениуса с нильпотентным ядром Z . Отсюда следует, что Z – характеристическая в B нильпотентная 2-подгруппа.

Пусть K – произвольная подгруппа из Z , порожденная конечным числом инволюций. Ввиду вышесказанного K – конечная 2-группа и по условию теоремы $K < L < G$, где L – конечная простая неабелева группа. Так как $K \leq L \cap Z$ и 2-подгруппа Z нормальна в B , то $L \not\leq B$ и подгруппа $L \cap B$ сильно вложена в L . Как и выше, заключаем, что L изоморфна $L_2(Q)$ или $Sz(Q)$ над конечным полем Q характеристики 2, при этом $L \cap B$ совпадает с нормализатором $N_L(S)$ силовской 2-подгруппы S в L . Понятно, что $K \leq S$ и, учитывая строение подгруппы S (леммы 1.9, 1.10, [12, с. 166]), приходим к выводу, что K – элементарная абелева группа. Ввиду произвольности K заключаем, что и подгруппа Z элементарная абелева. Утверждение доказано.

3. Пусть теперь K – произвольная конечная 2-подгруппа из B . Снова по условиям теоремы $K < L < G$, где L – конечная простая неабелева группа, $L \cap Z \neq 1$; ввиду нормальности подгруппы Z в B и простоты L имеем $L \not\leq B$ и подгруппа $L \cap B$ сильно вложена в L . Как и выше, заключаем, что L изоморфна $L_2(Q)$ или $Sz(Q)$ над конечным полем Q характеристики 2, $L \cap B$ совпадает с нормализатором $N_L(S)$ силовской 2-подгруппы S в L , $K \leq S$ и K – либо элементарная абелева группа, либо группа периода 4, причем $Z \cap S = Z(S)$. В силу утверждения 2 леммы мы можем считать, что $K \cap Z$ может быть произвольной наперед заданной подгруппой из Z . Отсюда вытекает включение $K \leq C_B(Z)$. Более того, для любых инволюций $z, x \in Z$ выполняется равенство $C_G(z) = C_B(z) = C_B(x) = C_G(x)$. Это означает, что $C_G(Z) = C_G(z) = U$ – силовская 2-подгруппа из B периода ≤ 4 и ввиду утверждения 2 леммы либо $U = Z$, либо U/Z – элементарная абелева 2-группа, причем U нормальна в B как централизатор характеристической подгруппы Z . Утверждение доказано.

4. Пусть i – произвольная инволюция из B . По утверждениям 2, 3 леммы $C_B(i) = U$ – нормальная в B нильпотентная силовская 2-подгруппа группы G . Из утверждения 1 леммы и утверждений 3, 4 леммы 1.17 легко следует, что $B = U \rtimes H$ – локально конечная группа Фробениуса с ядром U и инвариантным множителем H .

5. Ввиду утверждений 1, 4 леммы H – периодическая абелева группа регулярных инволюций абелевой группы Z . Как хорошо известно (см., например, [14]), из этого следует локальная цикличность подгруппы H . Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть v – произвольная инволюция из $G \setminus B$. Тогда

1. подгруппа $H = B \cap B^v$ сильно изолирована в G ;
2. множество инволюций из $G \setminus B$ совпадает с v^B ;

3. группа G действует дважды транзитивно на множестве Ω всех своих подгрупп, сопряженных с B ;
4. только единичный элемент группы G оставляет на месте три различные точки из Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Из леммы 2.1 следует неравенство $m(U) \geq 2$. Покажем, что силовская 2-подгруппа U из B содержит бесконечно много инволюций. Предположим противное. Тогда ввиду леммы 2.1 B – конечная подгруппа и по условиям теоремы $B < L < G$, где L – конечная простая группа, изоморфная либо $L_2(Q)$, либо $Sz(Q)$ над полем Q характеристики 2 (лемма 1.7), поскольку централизатор каждой инволюции из G есть 2-группа (лемма 2.1). Понятно, что подгруппа L содержит централизатор $C_G(i)$ каждой своей инволюции и по лемме 1.15 L сильно вложена в G . Но тогда ее строение описывается леммой 2.1, противоречие. Следовательно, множество инволюций в B бесконечно. Ввиду леммы 2.1 выполняется условие 1 леммы 1.18, а с учетом лемм 1.16, 1.17 и условие 2 леммы 1.18. Поскольку заключение данной леммы для G неверно, то для любого элемента $t \in H^\#$ вытекает равенство $C_G(t) = H$. Последнее означает, что подгруппа H сильно изолирована в G [14].

2. Пусть j, k – произвольные различные инволюции из $G \setminus B$. Ввиду леммы 2.1 пересечения $H_j = B \cap B^j$ и $H_k = B \cap B^k$ суть дополнительные множители Фробениуса в группе B и поэтому сопряжены в B с H . Из леммы 2.1 следует, что инволюции j и k инвертируют соответственно подгруппы H_j и H_k . Из сильной изолированности подгрупп H_j и H_k (утверждение 1 леммы) вытекает, что все инволюции из $G \setminus B$, инвертирующие данные подгруппы, содержатся в $H_j \rtimes \langle j \rangle$ и $H_k \rtimes \langle k \rangle$ соответственно. Поэтому из сопряженности подгрупп H_j и H_k с H в B следует сопряженность подгрупп $H_j \rtimes \langle j \rangle$ и $H_k \rtimes \langle k \rangle$, причем с помощью некоторого элемента $u \in U$. Поскольку в $H_k \rtimes \langle k \rangle$ все инволюции сопряжены ввиду нечетности подгруппы H (лемма 2.1), то $j = k^b$ для некоторого элемента $b \in B$.

3. Из утверждения 2 леммы следует, что B действует транзитивно (сопряжениями) на множестве всех подгрупп $C_G(j)$, где j – инволюция из $G \setminus B$. Ввиду леммы 2.1 это означает, что B действует транзитивно на множестве Ω всех сопряженных с B и отличных от B подгрупп группы G . Так как $N_G(B) = N_G(U) = B$, то G , очевидно, 2-транзитивна на Ω и $B = G_\alpha$ – стабилизатор точки $\alpha = B \in \Omega$.

4. Ввиду лемм 1.16, 1.17, 1.18 и 2.1 для инволюции $k \in N_G(H)$ имеет место равенство $H = B \cap B^k$. Поскольку $U \cap N_G(B^k) = 1$ (лемма 2.1), то $H = G_{\alpha\beta}$, где $\beta = B^k \in \Omega$. Следовательно, подгруппа H совпадает со стабилизатором $G_{\alpha\beta}$ двух точек $\alpha, \beta \in \Omega$. Заметим, что $\Omega \setminus \{\alpha\} = \beta^B = \beta^{H^U} = \beta^U$. Поскольку $H \cap U = 1$, то для $1 \neq x \in U$ выполняется $\beta^x = \gamma \neq \beta$. Если $h \in H$ и $\gamma^h = \gamma$, то $\beta^{xh} = \beta^x$ и $xhx^{-1} \in H \cap xHx^{-1} = 1$. Значит, $h = 1$ и $G_{\alpha\beta\gamma} = 1$. Таким образом, $G_{\alpha\beta\gamma} = 1$ для каждой точки $\gamma \in \Omega \setminus \{\alpha, \beta\}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Подгруппа B изоморфна подгруппе Бореля либо группы $L_2(Q)$, либо группы $Sz(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что B – счетная группа. По лемме 2.1 $B = U \rtimes H$ – группа Фробениуса с периодическим локально циклическим неинвариантным множителем H . Понятно, что подгруппа H счетна. По лемме 1.17 H транзитивна на множестве инволюций из U , которое вместе с единицей составляет центр $Z = Z(U)$

группы U . Следовательно, Z – счетная группа и по лемме 4.5 [5] $Z \rtimes H$ изоморфна подгруппе Бореля группы $L_2(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2. В частности, если $U = Z$, то лемма доказана.

Пусть $U \neq Z$, x, y – произвольные элементы порядка 4 из U и K – любая конечная 2-подгруппа из B , содержащая элементы x и y . По условиям теоремы $K < L < G$, где L – конечная простая группа. Понятно, что $L \simeq Sz(q)$ и $M = B \cap L = (M \cap U) \rtimes T$ – нормализатор силовой 2-подгруппы в L . Пусть $Z_1 = Z \cap M$. Как вытекает из леммы 1.10, смежные классы xZ_1 и yZ_1 сопряжены в $B \cap L$. Отсюда выводим, что H действует транзитивно на множестве смежных классов U/Z , отличных от Z . В частности, U – счетная группа и B также счетна. Поле Q , ассоциированное с подгруппой $Z \rtimes H$, представим в виде объединения цепи конечных подполей:

$$Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \dots, \quad Q = \cup Q_i. \quad (1)$$

Ввиду доказанного выше изоморфизма группы $Z \rtimes H$ подгруппе Бореля $L_2(Q)$ цепи 1 соответствуют следующие подгруппы

$$H_1 < H_2 < H_3 < \dots, \quad H = \cup H_i, \quad H_i^v = H_i, \quad (2)$$

$$Z_1 < Z_2 < Z_3 < \dots, \quad Z = \cup Z_i, \quad (3)$$

такие, что $Z_k \rtimes H_k$ изоморфна подгруппе Бореля в $L_2(Q_k)$. Пусть B'_k – конечная подгруппа из B , содержащая подгруппу $Z_k \rtimes H_k$ и некоторый элемент порядка 4 из U . По условиям теоремы $B'_k < L < G$, где L конечна, проста и, как нетрудно убедиться, изоморфна $Sz(Q'_k)$ для подходящего поля Q'_k . Поскольку B_k содержится в подгруппе Бореля группы L , то с помощью леммы 1.10 выводим, что поле Q'_k содержит подполе Q_k , причем $Z_k \rtimes H_k$ содержится в подгруппе Бореля B_k группы $L_1 < L$, $L_1 \simeq Sz(Q_k)$. Выберем подгруппы B_k таким образом, чтобы они составляли цепочку

$$B_1 < B_2 < B_3 < \dots. \quad (4)$$

Так как объединение B^* этой цепочки содержит подгруппы H , $Z(U)$ и H действует на множестве неединичных элементов факторгруппы $U/Z(U)$ транзитивно, то $B^* = B$. Наконец, стандартными рассуждениями доказывается изоморфизм группы B и подгруппы Бореля группы $Sz(Q)$ (см., например, лемму 5.6 из [26]). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. *G изоморфна $L_2(Q)$ или $Sz(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма вытекает из лемм 2.2, 2.3 теоремы 4.1 [5] и теоремы 2 [26].

3. Доказательство теоремы 2. Пусть далее группа G удовлетворяет условиям теоремы 2.

ЛЕММА 3.1. *G – простая группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 \neq H \triangleleft G$, $a \in H^\#$ и $b \in G \setminus H$. По условиям теоремы найдутся подгруппы K и M из $\mathfrak{F}$ такие, что $\langle a \rangle < K$, $\langle b \rangle < M$. Очевидно, что $K \leq H$ и $M \cap H = 1$, в частности, в H и $G \setminus H$ найдутся инволюции i и j . В силу периодичности группы G подгруппа $R = \langle i, j \rangle$ конечна и по условиям теоремы $R < L \in \mathfrak{F}$. Так как $L \cap H \neq 1$, $L \setminus H \neq \emptyset$ и L – простая группа, получаем противоречие. Следовательно, G – простая группа и лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. *Если некоторая силовская 2-подгруппа U группы G конечна, то она элементарная абелева порядка 4 или 8.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|U| = 2^n > 8$. По условиям теоремы $U < L < G$, где L – конечная простая группа и ввиду теоремы Уолтера (лемма 1.6) $L \simeq L_2(2^n)$. По лемме 1.9 U – элементарная абелева группа. Пусть i – инволюция из U . Поскольку G бесконечна и проста (лемма 3.1), то ввиду леммы 1.5 подгруппа $C_1 = C_G(i)$ бесконечна. Предположим, что C_1 локально конечна. Тогда U строго содержится в некоторой конечной подгруппе K из C_1 . По условиям теоремы $K < L < G$, где L – конечная простая группа. По теореме Уолтера (лемма 1.6) $L \simeq L_2(2^n)$, что противоречит строению централизаторов инволюций в $L_2(2^n)$ (лемма 1.9). Следовательно, группа C_1 не локально конечна. Пусть $j \in U$ – инволюция, отличная от i . Ввиду леммы 1.5 подгруппа $C_2 = C_G(j) \cap C_1$ бесконечна. Понятно, что $U < C_2$ и если C_2 локально конечна, то, как и выше, приходим к противоречию. Следовательно, C_2 – не локально конечна. Но тогда для инволюции $k \in U \setminus \langle i, j \rangle$ подгруппа $C_3 = C_G(k) \cap C_2$ бесконечна и по тем же соображениям не локально конечна. Продолжая этот процесс, получаем, что подгруппа C_n бесконечна. Поскольку $C_n \leq C_G(U)$, приходим к выводу, что $C_G(U)$ содержит элемент нечетного порядка. Как показано выше, это невозможно. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. *Если порядок некоторой силовской 2-подгруппы U из G равен 4, то G локально конечна и изоморфна группе $L_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P нечетной характеристики.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условиям теоремы $U < L < G$, где L – конечная простая группа. Ввиду известной теоремы Бернсайда [24] подгруппа U элементарная абелева и в то же время группа диэдра. По лемме 1.1 G изоморфна группе $L_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P нечетной характеристики.

ЛЕММА 3.4. *Если некоторая силовская 2-подгруппа U из G бесконечна, то G локально конечна и изоморфна группе $L_2(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K – произвольная конечная подгруппа из U порядка > 8 . По условиям теоремы $K < L < G$, где L – конечная простая группа. Ввиду леммы 1.6 $L \simeq L_2(2^n)$ и по лемме 1.9 K – элементарная абелева группа. Следовательно, и группа U элементарная абелева.

По той же теореме Уолтера насыщающее множество $\mathfrak{F}$ для группы G может содержать только конечные простые группы из списка J_1 , $L_2(2^n)$, $Re(3^{2n+1})$, $L_2(q)$, где $q = 3, 5 \pmod{8}$. Пусть i – произвольная инволюция из U и предположим, что $i \in L < G$, где L – конечная простая группа, изоморфная J_1 или $Re(3^{2n+1})$. Ввиду лемм 1.11, 1.13 нормализатор силовской 2-подгруппы T в L имеет порядок 168 и содержит фробениусову подгруппу $K = \langle b \rangle \rtimes \langle d \rangle$ порядка 21. Пусть i, j – произвольные различные инволюции из

$N_G(T) \setminus T$. Поскольку $D = \langle i, j \rangle$ – конечная группа диэдра, подгруппа $M = TD$ конечна. По условиям теоремы $M < L < G$, L – конечная простая группа. Снова применяя лемму 1.6, заключаем, что $L \simeq L_2(2^n)$ и M – элементарная абелева 2-группа. Следовательно, все инволюции в $N_G(T)$ перестановочны и вместе с единицей составляют нормальную в $N_G(T)$ подгруппу, очевидно, совпадающую с силовой 2-подгруппой U . Следовательно, подгруппа $\langle U, K \rangle = U \rtimes K$ локально конечна и содержит конечную подгруппу $S = V \rtimes K$, $|V| = 2^m > 8$. Как и выше, $S < L < G$, где $L \simeq L_2(2^n)$. Однако последнее противоречит лемме 1.9. Полученное противоречие означает, что насыщающее множество $\mathfrak{F}$ не содержит групп, изоморфных J_1 и $Re(q)$.

Аналогичными рассуждениями доказывается, что $\mathfrak{F}$ не содержит и групп $L_2(q)$, где $q = 3, 5 \pmod{8}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ состоит из групп $L_2(q)$, где q – степень 2. В частности, $C_G(i)$ – элементарная абелева 2-группа для любой инволюции $i \in U$ и потому $C_G(i) = U$. Последнее означает, что подгруппа U сильно изолирована в G , а ее нормализатор B сильно вложен в G . Применяя теорему 1, убеждаемся в справедливости доказываемой леммы.

На основании лемм 3.2–3.4 далее считаем, что некоторая силовая 2-подгруппа в G является элементарной абелевой порядка 8.

ЛЕММА 3.5. *Все инволюции в G сопряжены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть i, j – произвольные инволюции из G . В силу периодичности группы G подгруппа $L = \langle i, j \rangle$ конечна и по условиям теоремы $L \leq M \in \mathfrak{F}$. По лемме 1.6 M изоморфна одной из групп J_1 , $L_2(4)$, $L_2(8)$, $Re(3^{2n+1})$, $L_2(q)$, где $q = 3, 5 \pmod{8}$. Ввиду лемм 1.8–1.13 все инволюции в M сопряжены. Итак, лемма верна.

ЛЕММА 3.6. *Пусть T – произвольная силовая 2-подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. T – элементарная абелева группа порядка 8, $C_G(T) = T$ и все силовые 2-подгруппы группы G сопряжены;
2. $N_G(T) = T \rtimes (\langle b \rangle \rtimes \langle d \rangle)$, где $\langle b \rangle \rtimes \langle d \rangle$ – группа Фробениуса порядка 21, $|C_T(d)| = 2$ и $T \rtimes \langle b \rangle$ – группа Фробениуса порядка 56;
3. для любой подгруппы $V < T$ порядка 4 $C_G(V) = T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Ввиду условий теоремы и леммы 1.3 все силовые 2-подгруппы в G сопряжены. Поэтому T – элементарная абелева группа порядка 8. Предположим, что $T \neq C_G(T)$ и $b \in C_G(T) \setminus T$. В силу периодичности группы G подгруппа $K = \langle b, T \rangle$ конечна. По условиям теоремы $K \leq M \in \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 1.6, включения $T \leq K$ и леммы 1.8 заключаем, что M изоморфна одной из групп J_1 , $L_2(8)$, $Re(3^{2n+1})$. Однако по леммам 1.9–1.13 $C_M(T) = T$. Следовательно, и $C_G(T) = T$. Утверждение доказано.

2. Учитывая первое утверждение леммы, заключаем, что $H = N_G(T)$ – конечная группа. Как и выше, $H \leq M \in \mathfrak{F}$ и M изоморфна одной из групп J_1 , $L_2(8)$, $Re(3^{2n+1})$. Если хотя бы одна из таких подгрупп M изоморфна J_1 или $Re(3^{2n+1})$, то утверждение вытекает из лемм 1.11, 1.13. Предположим теперь, что все группы из $\mathfrak{F}$, содержащие подгруппу H , изоморфны $L_2(8)$. В этом случае $H = T \rtimes K$ – группа Фробениуса, где K – циклическая группа порядка 7 (лемма 1.9). Если множество $\mathfrak{F}$ полностью состоит из подгрупп, изоморфных $L_2(8)$ и $L_2(4)$, то ввиду леммы 1.9 $C_G(t) = T$ для любой

инволюции $t \in T$. Но тогда по лемме 1.5 G – почти локально разрешимая группа, вопреки лемме 3.1. Следовательно, $\mathfrak{F}$ содержит также и подгруппы, изоморфные $L_2(q)$, где $q = 3, 5 \bmod 8$. Пусть M – одна из таких подгрупп и $V = T \cap M$ – силовская 2-подгруппа в M . По лемме 1.8 подгруппа $N_M(V)$ изоморфна знакопеременной группе степени 4 и содержит элемент b порядка 3. Тем же методом, что и в лемме 3.4, доказывается, что в $N_G(V)$ подгруппа T нормальна и мы можем образовать подгруппу $R = T \rtimes \langle b \rangle$. По условиям теоремы $R < L_2 \in \mathfrak{F}$, противоречие. Таким образом, утверждение 2 справедливо. Легко убедиться, что приведенные рассуждения годятся и для доказательства утверждения 3 леммы. Следовательно, лемма верна.

Введем некоторые обозначения. Пусть a и z – различные инволюции из T , $C = C_G(a)$, $C_z = C_G(z)$.

ЛЕММА 3.7. *Подгруппа $C_z = \langle a \rangle \times (B_z \rtimes \langle t \rangle)$, где $T = \langle a \rangle \times \langle z \rangle \times \langle t \rangle$ и B_z – бесконечная локально циклическая $3'$ -группа, инвертируемая инволюцией t .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $T = \langle a \rangle \times \langle z \rangle \times \langle t \rangle$, где t – инволюция. В силу леммы 3.6 $C_{C_z}(t) = T$ и по лемме 1.5 подгруппа C_z локально конечна.

Предположим, что C_z – конечная подгруппа. Тогда по лемме 1.5 подгруппа C локально конечна и почти разрешима. Пусть $R(C)$ – локально разрешимый радикал в C и $m = |C : R(C)|$. Выберем в C конечную подгруппу K порядка большего, чем $2m, |J_1|, |L_2(8)|$, содержащую подгруппу T . Ввиду условий теоремы $K < M \in \mathfrak{F}$. Учитывая включение $S < M$, порядок K и лемму 1.8, приходим к выводу, что $M \simeq Re(3^{2n+1})$. По лемме 1.11 $C \cap M = \langle a \rangle \times L$, где $L \simeq L_2(3^{2n+1})$ – простая группа, причем понятно, что $|L| > m$. Но это противоречит равенству $m = |C : R(C)|$. Следовательно, подгруппа C_z бесконечна.

Покажем, что любая конечная подгруппа V из C_z , содержащая подгруппу T , имеет вид $V = \langle a \rangle \times D_V$, где D_V – группа диэдра, не содержащая 3-элементов. Поскольку C_z локально конечна, последнее достаточно установить для подгрупп $V < C_z$, порядок которых больше, чем $|J_1|, |L_2(8)|$. Пусть $|V| > |J_1|, |L_2(8)|$. По условиям теоремы $V < M \in \mathfrak{F}$. Ввиду включения $T < M$, выбора порядка группы V и леммы 1.6 имеем $M \simeq Re(3^{2n+1})$. По лемме 1.11 $C \cap M = \langle a \rangle \times L$, где $L \simeq L_2(3^{2n+1})$. Ввиду леммы 1.8 для любой инволюции $k \in L$ подгруппа $C_L(k) = L_k$ диэдральна и не содержит 3-элементов. Если $z \in L$, то можно считать, что $z = k$ и D_V , как подгруппа из L_k , также есть группа диэдра. Если $z \notin L$, то $z = ak$, где $k \in L$. Учитывая, что $L_k = (\langle k \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle t \rangle$, где b – элемент нечетного порядка и t – инволюция из S , инвертирующая элемент b , заключаем, что подгруппа $D_1 = (\langle ak \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle t \rangle$ является группой диэдра без 3-элементов. Следовательно, $D_V = D_1 \cap V$ – группа диэдра и $V = \langle a \rangle \times D_V$.

Теперь нетрудно убедиться, что все элементы нечетных порядков из C_z вместе с единицей составляют бесконечную локально циклическую $3'$ -подгруппу B_z . При этом каждая инволюция $t \in T$, отличная от инволюций a, z, az , инвертирует подгруппу B_z . Лемма доказана.

ЛЕММА 3.8. *Подгруппа C локально конечна и $C = \langle a \rangle \times L$, где $L \simeq L_2(Q)$, Q – локально конечное поле характеристики 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как локально циклическая группа B_z из леммы 3.7 представляема в виде объединения $\cup B_i$ цепочки

$$B_1 < B_2 < B_3 < \dots \quad (5)$$

конечных циклических подгрупп B_i , причем без ограничения общности можно считать, что $|B_1| > |J_1|, |L_2(8)|$. Образует подгруппы $K_i = \langle a \rangle \times (B_i \rtimes \langle t \rangle)$, где $t \in T \setminus \{1, a, z, az\}$ (лемма 3.7). По условиям теоремы $K_i < M_i \in \mathfrak{F}$ и ввиду включения $T < M_i$ и леммы 1.6 $M_i \simeq Re(3^{2n_i+1})$. Множество $X \subseteq \mathfrak{F}$ подгрупп M_i бесконечно и $C_i = M_i \cap C = \langle a \rangle \times L_i$, причем $V_i = L_i \cap T$ – силовская 2-подгруппа в L_i .

Так как подгрупп $V_i < S$ конечное число, то T содержит четверную подгруппу V , а множество X – бесконечное подмножество Y , состоящее из подгрупп $M_{i_1} < M_{i_2} < \dots$, для которых $V = V_{i_1} = V_{i_2} < \dots$. Нетрудно убедиться, что $\cup_k B_{i_k}$ совпадает с B и аналогично $\cup_k (B_{i_k} \cap L_{i_k}) = B$. Поэтому можно считать, что уже $X = Y$ и $B_i = B_z \cap L_i$ для $i = 1, 2, \dots$. Кроме того, на основании лемм 3.7, 1.11 считаем, что $V = \langle z \rangle \times \langle t \rangle$ и $C_{L_i}(z) = B_i \rtimes \langle t \rangle$.

По лемме 1.8 инволюции z и t сопряжены в каждой из подгрупп L_i , в частности, подгруппа $C_t = C_C(t)$ сопряжена с подгруппой C_z и имеет то же строение, т.е. $C_t = \langle a \rangle \times (B_t \rtimes \langle z \rangle)$, где B_t – бесконечная локально циклическая группа, сопряженная с подгруппой B_z и инвертируемая инволюцией z (лемма 3.7). Как локально циклическая группа B_t для каждого $i = 1, 2, \dots$ содержит в точности одну подгруппу D_i порядка $|B_i|$. При этом понятно, что подгруппы D_i составляют возрастающую цепочку

$$D_1 < D_2 < D_3 < \dots, \quad (6)$$

объединение $\cup D_i$ подгрупп которой совпадает с B_t .

Очевидно, что $C_{L_i}(t) = D_i \rtimes \langle z \rangle$, а по лемме 1.8 $L_i = \langle z, t, B_i, D_i \rangle$. Поэтому из (5) и (6) следует, что подгруппы L_i составляют цепочку

$$L_1 < L_2 < L_3 < \dots. \quad (7)$$

В силу леммы 1.2 объединение $L = \cup L_i$ членов цепочки (7) изоморфно группе $L_2(Q)$ над локально конечным полем Q характеристики 3. При этом подгруппа $R = \langle a \rangle \times L$ содержит подгруппы C_z и C_t .

Предположим, что $R \neq C$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{C} = C/\langle a \rangle$. Так как силовская 2-подгруппа в C элементарная абелева, то образы $\overline{C}_z$ и $\overline{C}_t$ совпадают в $\overline{C}$ с централизаторами инволюций $\bar{z}$ и $\bar{t}$. Понятно также, что $\bar{L} \simeq L$, в $\bar{L}$ все инволюции сопряжены (лемма 1.8) и $\overline{C}_z, \overline{C}_t < \bar{L}$. Отсюда заключаем, что подгруппа $\bar{L}$ сильно вложена в $\overline{C}$ (лемма 1.15).

Пусть $\bar{k}$ – произвольная инволюция из $\overline{C} \setminus \bar{L}$. Из лемм 1.16, 1.8 следует, что $\bar{L}_{\bar{k}} = \bar{L} \cap \bar{L}^{\bar{k}} = \bar{B}$ – подгруппа Бореля в $\bar{L}$. Как вытекает из утверждения 4 леммы 1.8 и утверждения 2 леммы 1.17, $\bar{k}$ действует на $\bar{B}$ без неподвижных точек. Ввиду периодичности $\bar{B}$ это равносильно коммутативности группы $\bar{B}$. Но по лемме 1.8 $\bar{B} = \bar{P} \rtimes \bar{N}$ – группа Фробениуса, противоречие. Следовательно, $R = C$ и лемма доказана.

ЛЕММА 3.9. *Группа G локально конечна и изоморфна группе $Re(Q)$, где Q – локально конечное поле характеристики 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся рассуждениями из доказательства леммы 3.8. Понятно, что цепочке (7) подгрупп $L_i \simeq L_2(Q_i)$ соответствует цепочка конечных полей

$$Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq Q_3 \subseteq \dots, \quad (8)$$

объединение $\cup Q_i$ членов которой совпадает с бесконечным локально конечным полем Q характеристики 3. При этом подгруппы L_i определялись как нормальные дополнения к подгруппе $\langle a \rangle$ в группах $C_i = C \cap M_i = \langle a \rangle \times L_i$, а $M_i \simeq Re(Q_i)$. Ввиду включений (7) подгруппы C_i составляют цепочку

$$C_1 \leq C_2 \leq C_3 \leq \dots, \quad (9)$$

объединение членов которой совпадает с C . Покажем, что конечные подгруппы M_i также составляют цепочку

$$M_1 \leq M_2 \leq M_3 \leq \dots. \quad (10)$$

Действительно, по построению все подгруппы M_i содержат силовскую 2-подгруппу T группы G и ввиду лемм 1.11, 3.6 – ее нормализатор $N_G(T)$. По лемме 1.11 $M_i = \langle N_G(S), C_i \rangle$, а из (9) следуют и включения (10).

Пусть $M = \cup M_i$ – объединение членов цепочки (10). При этом понятно, что группа M локально конечна и изоморфна $Re(Q)$ (лемма 1.2).

Предположим, что M – собственная подгруппа в G . Ввиду леммы 1.11 все инволюции в M сопряжены, а из леммы 3.8 следует, что M содержит централизатор $C_G(a)$ каждой своей инволюции a . По лемме 1.15 подгруппа M сильно вложена в G . Пусть j – инволюция из $G \setminus M$ и $D = M \cap M^j$. По леммам 1.16, 1.17 подгруппа D не содержит инволюций. Ввиду леммы 1.12 возможны четыре случая, рассмотрим каждый из них в отдельности.

Пусть $D \leq O(B) = U \rtimes A_0$, где B – подгруппа Бореля группы M . Поскольку циклическая подгруппа $H \leq B$ содержит инволюцию, подгруппа B не действует сопряжениями транзитивно на множестве всех инволюций из M вопреки леммам 1.16, 1.17. Следовательно, $D \not\leq O(B) = U \rtimes A_0$.

Рассмотрим возможности $D \leq A_i \rtimes \langle b_i \rangle$, где $i = 1, 2, 3$ (лемма 1.12). По лемме 1.12 $C_G(A_1)$ содержит инволюцию и поэтому $A_1 \rtimes \langle b_1 \rangle$ не может действовать сопряжениями транзитивно на множестве всех инволюций из M . Значит, $i \neq 1$. А при $i = 2, 3$ в M найдется инволюция, инвертирующая A_i и перестановочная с b_i . Поэтому и для этих подгрупп $A_i \rtimes \langle b_i \rangle$ невозможно транзитивное действие на множестве всех инволюций из M . Следовательно, $D \not\leq A_i \rtimes \langle b_i \rangle$, $i = 2, 3$. Последнее означает, что $G = M$ и лемма доказана.

Лемма 3.9 завершает доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шлепкин А. К. Сопряженно бипрimitивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Третья международная конференция по алгебре (23–28 августа 1993). Сб. тезисов. Красноярск, 1993. С. 369.
- [2] Созутов А. И., Шлепкин А. К. О группах с сильно вложенной подгруппой, насыщенных конечными простыми подгруппами // Междунаро. алгебраич. семинар, посвященный 70-летию каф. высшей алгебры МГУ (10–12 февраля 1999 г.). Тез. докл. М.: МГУ, 1999. С. 53.
- [3] Шлепкин А. К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами // Матем. труды. 1998. Т. 1. № 1. С. 129–138.
- [4] Шлепкин А. К., Васильева О. В. О периодических группах с абелевой силовой 2-подгруппой порядка 8, насыщенных конечными простыми подгруппами // Вестник КрасГАУ (сдана в печать)..
- [5] Созутов А. И. О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой // Алгебра и логика. 2000. Т. 39. № 5. С. 602–617.
- [6] Созутов А. И. Два признака непростоты группы с сильно вложенной подгруппой и конечной инволюцией // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 3. С. 443–453.
- [7] Беляев В. В. Локально конечные группы Шевалле // Исследования по теории групп. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. С. 39–50.
- [8] Шунков В. П. О некотором обобщении теоремы Фробениуса на периодические группы // Алгебра и логика. 1967. Т. 6. № 3. С. 113–124; О теории периодических групп // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 6. С. 1236–1237.
- [9] Шунков В. П. Об одном классе p -групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9. № 4. С. 484–496.
- [10] Беляев В. В. Группы с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. № 5. С. 531–535.
- [11] Шунков В. П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11. № 4. С. 470–494.
- [12] Горенштейн Д. Конечные простые группы. М.: Мир, 1985.
- [13] Мазуров В. Д. Конечные группы // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. 1976. Т. 14. С. 5–56.
- [14] Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М. Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968.
- [15] Suzuki M. On a class of doubly transitive groups. I // Ann. Math. 1962. V. 75. № 1. P. 105–145; II // Ann. Math. 1964. V. 79. № 3. P. 514–589.
- [16] Нужин Я. Н. О строении групп лиева типа ранга 1 // Матем. заметки. 1984. Т. 36. № 2. С. 149–150.
- [17] Левчук В. М., Нужин Я. Н. О строении групп Ри // Алгебра и логика. 1985. Т. 24. № 1. С. 26–41.
- [18] Сыскин С. А. Абстрактные свойства простых спорадических групп // УМН. 1980. Т. 35. № 5. С. 181–212.
- [19] Шунков В. П. Mr -группы. М.: Наука, 1990.
- [20] Шунков В. П. О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: ВО Наука, 1992.
- [21] Измайлов А. Н. Характеризация групп $SL_2(K)$ и $Sz(K)$ над локально конечным полем характеристики 2 // Алгебра и логика. 1985. Т. 24. № 2. С. 127–172.
- [22] Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.
- [23] Хухро Е. И. Нильпотентные группы и их автоморфизмы простого порядка. Фрайбург, 1992.
- [24] Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962.
- [25] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1977.
- [26] Созутов А. И., Сучков Н. М. О бесконечных группах с заданной сильно изолированной 2-подгруппой // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 2. С. 272–285.