Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юрко, Обратные задачи для дифференциальных операторов произвольных порядков на деревьях, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 1, 139–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4340>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 13:19:46

Обратные задачи для дифференциальных операторов произвольных порядков на деревьях

В. А. Юрко

Исследуются обратные спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных операторов произвольных порядков на компактных деревьях. В качестве основных спектральных характеристик вводятся и изучаются так называемые матрицы Вейля, которые являются обобщением функции Вейля (m -функции) для классического оператора Штурма–Лиувилля. Получена конструктивная процедура решения обратной задачи по матрицам Вейля и доказана единственность решения. Рассматривается также восстановление дифференциальных уравнений по дискретным спектральным характеристикам.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Исследуются обыкновенные дифференциальные операторы произвольных порядков на компактных деревьях (т.е. на графах без циклов) с краевыми условиями в граничных вершинах и с условиями склейки во внутренних вершинах. Краевые задачи на графах (сетях, деревьях) часто встречаются в естествознании и технике (см. [1]). Большинство работ по спектральной теории на графах посвящено так называемым прямым задачам изучения свойств спектра и корневых функций. Обратные спектральные задачи (которые состоят в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам), в силу их нелинейности, являются менее исследованными. Несколько работ посвящено обратным задачам для операторов Штурма–Лиувилля на графах (см. краткий обзор в [2]). Обратные задачи для дифференциальных операторов высших порядков на графах еще не исследовались. Отметим, что обратные спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка и высших порядков на интервале изучались многими авторами (см. монографии [2]–[4] и литературу в них).

В данной статье исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов произвольного порядка на компактных деревьях. В качестве основных спектральных характеристик вводятся и изучаются так называемые матрицы Вейля, которые являются обобщением функции Вейля (m -функции) для классического оператора Штурма–Лиувилля и обобщением матрицы Вейля для дифференциальных операторов высших порядков на интервале (см. [5]). Показано, что задание матриц Вейля однозначно определяет коэффициенты дифференциального

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00003) и ННС (грант № 07-01-92000-ННС-а).

уравнения на дереве. Получена конструктивная процедура решения обратной задачи по заданным матрицам Вейля. Для исследования этой обратной задачи мы развиваем идеи метода спектральных отображений [5]. Полученные результаты являются естественным обобщением известных результатов по обратным задачам для дифференциальных операторов на интервале. Отметим, что результаты и методы теории обратных спектральных задач могут быть полезны и при исследовании обратных задач для уравнений с частными производными (см. [5]). По поводу обратных задач для уравнений с частными производными см. монографии [6]–[11] и литературу в них.

2. Матрицы Вейля. Рассмотрим компактное связное дерево T в $\mathbb{R}^m$ с корнем v_0 , множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_r\}$. Предположим, что длина каждого ребра равна 1 (из доказательств следует, что результаты остаются верными и для произвольных длин ребер). Вершина называется *граничной*, если она принадлежит только одному ребру. Такое ребро называется *граничным*. Все остальные вершины и ребра называются *внутренними*. Без ограничения общности считаем, что v_0 является граничной вершиной.

Для двух точек $a, b \in T$ будем писать $a \leq b$, если a лежит на единственном простом пути, соединяющем корень v_0 с b ; пусть $|b|$ обозначает длину этого пути. Будем писать $a < b$, если $a \leq b$ и $a \neq b$. Отношение $<$ определяет частичную упорядоченность на T . Если $a < b$, то обозначим $[a, b] := \{z \in T : a \leq z \leq b\}$. В частности, если $e = [v, w]$ – ребро, то мы будем называть v его начальной точкой, w – его конечной точкой, и будем говорить, что e выходит из v и заканчивается в w .

Для любой $v \in V$ число $|v|$ является целым неотрицательным числом, которое называется *порядком* v . Для $e \in \mathcal{E}$ его порядок определяется как порядок его конечной точки. Число $\sigma := \max_{j=\overline{1,r}} |v_j|$ называется *высотой* дерева T . Пусть $V^{(\mu)} := \{v \in V : |v| = \mu\}$, $\mu = \overline{0, \sigma}$, – множество вершин порядка μ , и пусть $\mathcal{E}^{(\mu)} := \{e \in \mathcal{E} : e = [v, w], v \in V^{(\mu-1)}, w \in V^{(\mu)}\}$, $\mu = \overline{1, \sigma}$, – множество ребер порядка μ .

Каждое ребро $e \in \mathcal{E}$ рассматривается как отрезок $[0, 1]$ и параметризуется параметром $x \in [0, 1]$. Для нас удобно выбрать следующую ориентацию на каждом ребре $e = [v, w] \in \mathcal{E}$: если $z = z(x) \in e$, то $z(0) = w$, $z(1) = v$, т.е. $x = 0$ соответствует конечной точке w , а $x = 1$ соответствует начальной точке v . Для определенности занумеруем вершины v_j следующим образом: $\Gamma := \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ – граничные вершины, $v_{p+1} \in V^{(1)}$, а v_j , $j > p + 1$, занумерованы в порядке возрастания $|v_j|$. Аналогично занумеруем ребра, а именно: $e_j = [v_{j_k}, v_j]$, $j = \overline{1, r}$, $j_k < j$. В частности, $E := \{e_1, \dots, e_{p+1}\}$ – множество граничных ребер, $e_{p+1} = [v_0, v_{p+1}]$. Ясно, что $e_j \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ тогда и только тогда, когда $v_j \in V^{(\mu)}$.

Пусть μ_{sj} – число ребер между вершинами v_j и v_s . Обозначим $\sigma_s := \max_j \mu_{sj}$. Ясно, что $0 \leq \mu_{sj} \leq \sigma_s$, $\mu_{ss} = 0$, $\mu_{sj} = \mu_{js}$.

Зафиксируем v_s . Будем называть μ_{sj} порядком v_j относительно v_s . Пусть $V_s^{(\mu)} := \{v_j : \mu_{sj} = \mu\}$ – множество вершин порядка μ относительно v_s .

Зафиксируем v_s и e_j . Пусть ε_{sj} – максимальный порядок концов e_j относительно v_s . Число ε_{sj} называется *порядком* e_j *относительно* v_s . Ясно, что $\varepsilon_{ss} = 1$, $1 \leq \varepsilon_{sj} \leq \sigma_s$. Через $\mathcal{E}_s^{(\mu)} := \{e_j : \varepsilon_{sj} = \mu\}$ обозначим множество ребер порядка μ относительно v_s . Пусть v_{sj}^+ , v_{sj}^- – концы ребра e_j такие, что порядок v_{sj}^+ относительно v_s больше порядка v_{sj}^- . Будем называть v_{sj}^+ (v_{sj}^-) *дальним* (*ближним*) *концом* e_j относительно v_s .

Интегрируемая функция Y на T может быть представлена как $Y(x) = \{y_j(x)\}_{j \in J}$, $x \in [0, 1]$, где $J := \{j : j = \overline{1, r}\}$, и функция $y_j(x)$ определена на ребре e_j .

Зафиксируем $n \geq 2$. Пусть $q_\nu(x) = \{q_{\nu j}(x)\}_{j=\overline{1, r}}$, $\nu = \overline{0, n-2}$, – интегрируемые комплекснозначные функции на T . Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение n -го порядка на T :

$$y_j^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-2} q_{\nu j}(x) y_j^{(\nu)}(x) = \lambda y_j(x), \quad j = \overline{1, r}, \quad (1)$$

где λ – спектральный параметр, и $y_j^{(\nu)}(x) \in AC[0, 1]$, $j = \overline{1, r}$, $\nu = \overline{0, n-1}$. Обозначим $q = \{q_\nu\}_{\nu=\overline{0, n-2}}$ – множество коэффициентов уравнения (1); q называется *потенциалом*.

Для каждой внутренней вершины v_m , $m = \overline{p+1, r}$, мы обозначим через $R(v_m) := \{e \in \mathcal{E} : e = [v_m, w], w \in V\}$ – множество ребер, выходящих из v_m , и через $R^+(v_m)$ – множество ребер, примыкающих к v_m . Пусть $R_m := \{j : e_j \in R(v_m)\}$, и пусть ω_m – число ребер, выходящих из v_m . Если $R_m = \{\alpha_{jm}\}_{j=\overline{1, \omega_m}}$, то положим $e_{(jm)} := e_{\alpha_{jm}}$, $y_{(jm)} := y_{\alpha_{jm}}$.

Рассмотрим линейные формы

$$U_{j\nu m}(Y) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \gamma_{j\nu\mu m} y_{(jm)}^{(\mu)}(1), \quad m = \overline{p+1, r}, \quad j = \overline{1, \omega_m}, \quad \nu = \overline{0, n-1},$$

где $\gamma_{j\nu\mu m}$ – комплексные числа, и $\gamma_{j\nu m} := \gamma_{j\nu\mu m} \neq 0$. Линейные формы $U_{j\nu m}$ будут использоваться в условиях склейки во внутренней вершине v_m для решений уравнения (1).

Пусть $\Psi_{sk}(x, \lambda) = \{\psi_{skj}(x, \lambda)\}_{j=\overline{1, r}}$, $s = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, n}$, – решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} y_s^{(\nu-1)}(0) &= \delta_{k\nu}, & \nu &= \overline{1, k}, \\ y_j^{(\xi-1)}(\delta_{j,p+1}) &= 0, & \xi &= \overline{1, n-k}, \quad j = \overline{1, p+1} \setminus s, \end{aligned} \quad (2)$$

и условиям склейки в каждой внутренней вершине v_m , $m = \overline{p+1, r}$:

$$\begin{aligned} U_{j\nu m}(Y) + y_m^{(\nu)}(0) &= 0, & j &= \overline{1, \omega_m}, \quad \nu = \overline{0, k-1}, \\ \sum_{j=1}^{\omega_m} U_{j\nu m}(Y) + y_m^{(\nu)}(0) &= 0, & \nu &= \overline{k, n-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее $\delta_{k\nu}$ – символ Кронекера. Решение Ψ_{sk} называется *решением Вейля* порядка k относительно граничной вершины v_s . Введем матрицу

$$M_s(\lambda) = [M_{sk\nu}(\lambda)]_{k, \nu=\overline{1, n}}, \quad s = \overline{1, p},$$

где $M_{sk\nu}(\lambda) := \psi_{sk s}^{(\nu-1)}(0, \lambda)$. Из определения ψ_{skj} следует, что $M_{sk\nu}(\lambda) = \delta_{k\nu}$ при $k \geq \nu$, и $\det M_s(\lambda) \equiv 1$. Матрица $M_s(\lambda)$ называется *матрицей Вейля* относительно граничной вершины v_s . Через $M = \{M_s\}_{s=\overline{1, p}}$ обозначим множество матриц Вейля. Обратная задача ставится следующим образом.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА 1. Дано M , построить q на T .

Отметим, что понятие матриц Вейля M является обобщением понятия функции Вейля (m -функции) для классического оператора Штурма–Лиувилля и обобщением понятия матрицы Вейля, введенной в [2], [5] для дифференциальных операторов высших порядков на интервале. Таким образом, обратная задача 1 является обобщением хорошо известных обратных задач для дифференциальных операторов на интервале.

В разделе 3 изучаются свойства решений Вейля. Раздел 4 посвящен решению вспомогательных обратных задач восстановления потенциала на фиксированном граничном ребре. В разделе 5 вводятся матрицы Вейля для внутренних вершин. В разделе 6 исследуется обратная задача 1. Для этой обратной задачи получена конструктивная процедура решения и доказана его единственность. Важной частью алгоритма решения обратной задачи 1 является выполняемая для каждой внутренней вершины T так называемая “возвратная процедура”, которая связана с временным псевдообрезанием соответствующей части дерева и (что важно) с последующим его восстановлением. В конце статьи мы рассматриваем также обратные задачи восстановления уравнения (1) на T по дискретным спектральным характеристикам.

3. Свойства решений Вейля. Пусть $\lambda = \rho^n$. Тогда ρ -плоскость может быть разбита на секторы S раствора π/n ($\arg \rho \in (\nu\pi/n, (\nu+1)\pi/n$), $\nu = \overline{0, 2n-1}$), в каждом из которых корни $R_1, R_2, \dots, R_n$ уравнения $R^n - 1 = 0$ можно занумеровать так, чтобы

$$\operatorname{Re}(\rho R_1) < \operatorname{Re}(\rho R_2) < \dots < \operatorname{Re}(\rho R_n), \quad \rho \in S. \quad (4)$$

Пусть $\rho^* := 2n \max_{\nu, j} \|q_{\nu j}\|_{L(0,1)}$. Известно (см. [12; гл. 1]), что при каждом фиксированном $j = \overline{1, r}$ на ребре e_j существует фундаментальная система решений уравнения (1) $\{E_{kj}(x, \rho)\}_{k=\overline{1, n}}$ со свойствами

- 1) в каждом секторе S со свойством (4) функции $E_{kj}^{(\nu-1)}(x, \rho)$, $k, \nu = \overline{1, n}$, аналитичны по $\rho \in S$, $|\rho| > \rho^*$, и непрерывны при $x \in [0, 1]$, $\rho \in \overline{S}$, $|\rho| \geq \rho^*$;
- 2) при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{S}$,

$$E_{kj}^{(\nu-1)}(x, \rho) = (\rho R_k)^{\nu-1} \exp(\rho R_k x) [1], \quad (5)$$

где $k, \nu = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, r}$, $[1] = 1 + O(\rho^{-1})$.

Для существования и “регулярного поведения” решений Вейля и матриц Вейля нужны некоторые ограничения на коэффициенты $\gamma_{j\nu m}$ из условий склейки. Например, при $n = r = m = 2$, $p = s = k = 1$, $q = 0$, $\gamma_{102} = -\gamma_{112}$, $\gamma_{1102} = 0$, соответствующие решение Вейля и матрица Вейля не существуют. Для того, чтобы сформулировать условия регулярности склейки, введем числа $d(k, s, m)$, $m = \overline{p+1, r}$, $s = \overline{0, \omega_m}$, $k = \overline{1, n-1}$, следующим образом: $d(k, s, m) = \det[d_{j\nu}(k, s, m)]_{j, \nu = \overline{1, \omega_m+1}}$, где $d_{j\nu}(k, s, m)$ – матрицы вида

$$\begin{aligned} d_{j\nu}(k, 0, m) &= [\delta_{j\nu} \gamma_{j, \mu-1, m} R_{n-k+\xi}^{\mu-1}]_{\mu, \xi = \overline{1, k}}, & j, \nu &= \overline{1, \omega_m}, \\ d_{j, \omega_m+1}(k, 0, m) &= [R_{\xi}^{\mu-1}]_{\mu = \overline{1, k}; \xi = \overline{1, n-k}}, & j &= \overline{1, \omega_m}, \\ d_{\omega_m+1, \nu}(k, 0, m) &= [\gamma_{\nu, k+\mu-1, m} R_{n-k+\xi}^{k+\mu-1}]_{\mu = \overline{1, n-k}; \xi = \overline{1, k}}, & \nu &= \overline{1, \omega_m}, \\ d_{\omega_m+1, \omega_m+1}(k, 0, m) &= [R_{\xi}^{k+\mu-1}]_{\mu, \xi = \overline{1, n-k}}, \\ d_{j, \omega_m}(k, \omega_m, m) &= [\delta_{j, \omega_m} \gamma_{\omega_m, \mu-1, m} R_{k+\xi}^{\mu-1}]_{\mu = \overline{1, k}; \xi = \overline{1, n-k}}, & j &= \overline{1, \omega_m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{j,\omega_m+1}(k, \omega_m, m) &= [R_\xi^{\mu-1}]_{\mu, \xi=\overline{1, k}}, & j &= \overline{1, \omega_m}, \\
d_{\omega_m+1, \omega_m}(k, \omega_m, m) &= [\gamma_{\omega_m, k+\mu-1, m} R_{k+\xi}^{k+\mu-1}]_{\mu, \xi=\overline{1, n-k}}, \\
d_{\omega_m+1, \omega_m+1}(k, \omega_m, m) &= [R_\xi^{k+\mu-1}]_{\mu=\overline{1, n-k}, \xi=\overline{1, k}},
\end{aligned}$$

и $d_{j\nu}(k, \omega_m, m) = d_{j\nu}(k, 0, m)$ при $j = \overline{1, \omega_m + 1}$, $\nu = \overline{1, \omega_m - 1}$. Числа $d(k, s, m)$, $s = \overline{1, \omega_m - 1}$, получаются из $d(k, \omega_m, m)$ сменой мест $\gamma_{s\nu m}$ и $\gamma_{\omega_m, \nu m}$. Предположим, что

$$\begin{aligned}
d(k, 0, m) &\neq 0 & \text{при } m &= \overline{p+2, r}, \quad k = \overline{1, n-1}, \\
d(k, s, m) &\neq 0 & \text{при } m &= \overline{p+1, r}, \quad s = \overline{1, \omega_m}, \quad k = \overline{1, n-1}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Условия (6) называются *условиями регулярности склейки*. Дифференциальные операторы на T , которые не удовлетворяют условиям регулярности склейки (6), обладают качественно другими свойствами при постановке и исследовании обратных задач, и не рассматриваются в данной статье; они требуют отдельного исследования. Отметим, что (6) является обобщением условия регулярности склейки для операторов Штурма–Лиувилля на графах. В частности, для так называемых стандартных условий склейки (см. [1], [2]) (6) очевидно удовлетворяется.

Будем теперь исследовать асимптотическое поведение решений Вейля. Обозначим

$$\omega_k := \Omega_{k-1} \Omega_k^{-1}, \quad \Omega_k := \det[R_\xi^{\nu-1}]_{\xi, \nu=\overline{1, k}}, \quad \Omega_0 := 1, \quad k = \overline{1, n}.$$

ЛЕММА 1. Фиксируем $j = \overline{1, r}$, $k = \overline{1, n-1}$ и сектор S со свойством (4).

1) Пусть $y_j(x, \rho)$ – решение уравнения (1) на ребре e_j при условиях

$$y_j(0) = \dots = y_j^{(n-k-1)}(0) = 0. \tag{7}$$

Тогда при $x \in (0, 1]$, $\nu = \overline{0, n-1}$, $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$

$$y_j^{(\nu)}(x, \rho) = \sum_{\mu=n-k+1}^n A_{\mu j}(\rho) (\rho R_\mu)^\nu \exp(\rho R_\mu x) [1], \tag{8}$$

где коэффициенты $A_{\mu j}(\rho)$ не зависят от x . Здесь и ниже предполагаем, что $\arg \rho = \text{const}$, когда $|\rho| \rightarrow \infty$.

2) Пусть $y_j(x, \rho)$ – решение уравнения (1) на ребре e_j при условиях

$$y_j(1) = \dots = y_j^{(n-k-1)}(1) = 0.$$

Тогда при $x \in [0, 1)$, $\nu = \overline{0, n-1}$, $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$

$$y_j^{(\nu)}(x, \rho) = \sum_{\mu=1}^k B_{\mu j}(\rho) (\rho R_\mu)^\nu \exp(\rho R_\mu x) [1], \tag{9}$$

где коэффициенты $B_{\mu j}(\rho)$ не зависят от x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя фундаментальную систему $\{E_{\mu j}(x, \rho)\}_{\mu=\overline{1, n}}$ решений, можно записать

$$y_j(x, \rho) = \sum_{\mu=1}^n A_{\mu j}(\rho) E_{\mu j}(x, \rho). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (7), получим линейную алгебраическую систему относительно коэффициентов $\{A_{\mu j}(\rho)\}_{\mu=\overline{1, n-k}}$ ($A_{n-k+1, j}(\rho), \dots, A_{n, j}(\rho)$ рассматриваются как параметры). Определитель $A(\rho)$ этой системы имеет асимптотику $A(\rho) = \Omega_{n-k} + O(\rho^{-1})$ при $|\rho| \rightarrow \infty$. Решая систему по формулам Крамера и учитывая (5), находим

$$A_{\xi j}(\rho) = \sum_{\mu=n-k+1}^n (a_{\xi j \mu} + O(\rho^{-1})) A_{\mu j}(\rho), \quad \xi = \overline{1, n-k}, \quad (11)$$

где $a_{\xi j \mu}$ – константы. Подставляя (11) в (10) и используя (5), приходим к (8). Соотношения (9) доказываются аналогично.

ЛЕММА 2. Фиксируем $t = \overline{p+1, r}$, $k = \overline{1, n-1}$ и сектор S со свойством (4). Пусть $Y = \{y_j\}_{j \in J}$ – решение уравнения (1) на T , удовлетворяющее условиям склейки (3). Если при $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$

$$y_{(jm)}^{(\nu)}(x, \rho) = \sum_{\mu=n-k+1}^n A_{\mu j}(\rho) (\rho R_{\mu})^{\nu} \exp(\rho R_{\mu} x) [1], \quad (12)$$

$$x \in (0, 1], \quad \nu = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{1, \omega_m},$$

то при $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$

$$y_m^{(\nu)}(x, \rho) = \sum_{\mu=n-k+1}^n A_{\mu}(\rho) (\rho R_{\mu})^{\nu} \exp(\rho R_{\mu} x) [1], \quad x \in (0, 1], \quad \nu = \overline{0, n-1}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя фундаментальную систему $\{E_{\mu m}(x, \rho)\}_{\mu=\overline{1, n}}$ решений и учитывая (5), имеем

$$y_m^{(\nu)}(x, \rho) = \sum_{\mu=1}^n A_{\mu}(\rho) (\rho R_{\mu})^{\nu} \exp(\rho R_{\mu} x) [1], \quad x \in [0, 1], \quad \nu = \overline{0, n-1}. \quad (14)$$

Подставляя (12) и (14) в (3), получаем линейную алгебраическую систему σ_{k0m} порядка $k\omega_m + n - k$ относительно $\{A_{\mu}(\rho)\}_{\mu=\overline{1, n-k}}$ и $\{A_{\mu j}(\rho)\}_{\mu=\overline{n-k+1, n}, j=\overline{1, \omega_m}}$ ($\{A_{\mu}(\rho)\}_{\mu=\overline{n-k+1, n}}$ рассматриваются как параметры). Определитель $D_{k0m}(\rho)$ системы σ_{k0m} имеет асимптотику

$$D_{k0m}(\rho) = d(k, 0, m) \exp(\rho \omega_m (R_{n-k+1} + \dots + R_n)) [1], \quad \rho \in S, \quad |\rho| \rightarrow \infty.$$

Решая систему σ_{k0m} по формулам Крамера, получаем

$$A_{\mu}(\rho) = \sum_{\xi=n-k+1}^n (a_{\xi m \mu}^0 + O(\rho^{-1})) A_{\xi}(\rho), \quad \mu = \overline{1, n-k}, \quad (15)$$

где $a_{\xi m \mu}^0$ – константы. Подставляя (15) в (14), приходим к (13).

Следующая лемма доказывается аналогично.

ЛЕММА 3. Фиксируем $t = \overline{p+1, r}$, $k = \overline{1, n-1}$, $s = \overline{1, \omega_m}$, и сектор S со свойством (4). Пусть $Y = \{y_j\}_{j \in J}$ – решение уравнения (1) на T , удовлетворяющее

условиям склейки (3). Если при $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$

$$y_{(jm)}^{(\nu)}(x, \rho) = \sum_{\mu=n-k+1}^n A_{\mu j}(\rho)(\rho R_{\mu})^{\nu} \exp(\rho R_{\mu} x)[1],$$

$$x \in (0, 1], \quad \nu = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{1, \omega_m} \setminus s,$$

$$y_m^{(\nu)}(x, \rho) = \sum_{\mu=1}^k A_{\mu}(\rho)(\rho R_{\mu})^{\nu} \exp(\rho R_{\mu} x)[1], \quad x \in [0, 1), \quad \nu = \overline{0, n-1},$$

то при $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$

$$y_{(sm)}^{(\nu)}(x, \rho) = \sum_{\mu=1}^k A_{\mu s}(\rho)(\rho R_{\mu})^{\nu} \exp(\rho R_{\mu} x)[1], \quad x \in [0, 1), \quad \nu = \overline{0, n-1}. \quad (16)$$

ЛЕММА 4. Фиксируем сектор S со свойством (4). При $x \in (0, 1)$, $k, \nu = \overline{1, n}$, $s = \overline{1, p}$ верна следующая асимптотическая формула:

$$\psi_{sks}^{(\nu-1)}(x, \lambda) = \frac{\omega_k}{\rho^{k-1}} (\rho R_k)^{\nu-1} \exp(\rho R_k x)[1], \quad \rho \in S, \quad |\rho| \rightarrow \infty. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $s = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, n-1}$. Покажем, что при $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$

$$\psi_{skj}^{(\nu-1)}(x, \lambda) = \sum_{\mu=n-k+1}^n A_{\mu j}(\rho)(\rho R_{\mu})^{\nu-1} \exp(\rho R_{\mu} x)[1], \quad x \in (0, 1), \quad \nu = \overline{1, n}, \quad (18)$$

если $v_j = v_{sj}^+$, и

$$\psi_{skj}^{(\nu-1)}(x, \lambda) = \sum_{\mu=1}^k A_{\mu j}(\rho)(\rho R_{\mu})^{\nu-1} \exp(\rho R_{\mu} x)[1], \quad x \in [0, 1), \quad \nu = \overline{1, n}, \quad (19)$$

если $v_j = v_{sj}^-$. Разобьем все ребра $\{e_j\}_{j \in J}$ на классы $\mathcal{E}_s^{(\mu)}$, $\mu = 1, \dots, \sigma_s$. Докажем (18), (19) индукцией по $\mu = \sigma_s, \sigma_{s-1}, \dots, 1$.

1) Пусть $\mu = \sigma_s$, $e_j \in \mathcal{E}_s^{(\sigma_s)}$. Тогда e_j – граничное ребро, и в силу (2) имеем

$$\psi_{skj}^{(\nu-1)}(\delta_{j,p+1}, \lambda) = 0, \quad \nu = \overline{1, n-k}, \quad j = \overline{1, p+1} \setminus s. \quad (20)$$

Ясно, что $v_j = v_{sj}^+$, если $j = \overline{1, p} \setminus s$, и $v_j = v_{sj}^-$, если $j = p+1$. Применяя лемму 1, приходим к (18), (19).

2) Фиксируем $\mu < \sigma_s$. Предположим, что (18), (19) доказаны для всех $e_j \in \mathcal{E}_s^{(\mu+1)} \cup \dots \cup \mathcal{E}_s^{(\sigma_k)}$. Пусть теперь $e_j \in \mathcal{E}_s^{(\mu)}$. Обозначим $R_{sj} := \{\xi : e_{\xi} \in R^+(v_{sj}^+) \setminus e_j\}$. Тогда $R^+(v_{sj}^+) \setminus e_j := \{e_{\xi}\}_{\xi \in R_{sj}}$. Ясно, что $e_{\xi} \in \mathcal{E}_s^{(\mu+1)}$ для всех $\xi \in R_{sj}$.

Случай 1. Если $v_j = v_{sj}^+$, то по предположению индукции (18) верно для всех $\xi \in R_{sj}$, т.е.

$$\psi_{sk\xi}^{(\nu-1)}(x, \lambda) = \sum_{\mu=n-k+1}^n A_{\mu\xi}(\rho)(\rho R_{\mu})^{\nu-1} \exp(\rho R_{\mu} x)[1], \quad (21)$$

$$x \in (0, 1], \quad \nu = \overline{1, n}, \quad \rho \in S, \quad |\rho| \rightarrow \infty.$$

Применяя лемму 2, приходим к (18) для ребра e_j .

Случай 2. Если $v_j = v_{sj}^-$, то существует $\eta \in R_{sj}$ такое, что

$$\psi_{sk\eta}^{(\nu-1)}(x, \lambda) = \sum_{\mu=1}^k A_{\mu\eta}(\rho)(\rho R_\mu)^{\nu-1} \exp(\rho R_\mu x)[1],$$

$$x \in [0, 1), \quad \nu = \overline{1, n}, \quad \rho \in S, \quad |\rho| \rightarrow \infty,$$

и (21) верно для всех $\xi \in R_{sj}$, $s \neq \eta$. Применяя лемму 3, приходим к (19). Таким образом, (18), (19) доказаны.

Так как $e_s \in \mathcal{E}_s^{(1)}$, $v_s = v_{ss}^-$, из (19) следует, что при $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$

$$\psi_{sks}^{(\nu-1)}(x, \lambda) = \sum_{\mu=1}^k A_{\mu s}(\rho)(\rho R_\mu)^{\nu-1} \exp(\rho R_\mu x)[1], \quad x \in [0, 1), \quad \nu, k = \overline{1, n}. \quad (22)$$

Согласно (2) имеем

$$\psi_{sks}^{(\nu-1)}(0, \lambda) = \delta_{k\nu}, \quad \nu = \overline{1, k}. \quad (23)$$

Подставляя (22) в (23), получаем линейную алгебраическую систему относительно коэффициентов $\{A_{\mu s}(\rho)\}_{\mu=\overline{1, k}}$. Определитель $D_{sk}(\rho)$ этой системы имеет вид $D_{sk}(\rho) = \Omega_k[1]$. Решая систему по формулам Крамера, получаем

$$A_{\mu s}(\rho) = (a_{\mu s}^0 + O(\rho^{-1}))\rho^{1-k}[1], \quad a_{\mu k}^0 = \omega_k.$$

Вместе с (22) это дает (17). Лемма 4 доказана.

Аналогично можно получить, что при $\rho \in S$, $|\rho| \rightarrow \infty$, $s = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, n-1}$, $\mu = \overline{k+1, n}$

$$M_{sk\mu}(\lambda) = m_{k\mu}^0 \rho^{\mu-k}[1],$$

где $m_{k\mu}^0 = (\det[R_\eta^{\xi-1}]_{\eta, \xi=\overline{1, k}})^{-1} \det[R_\eta^{\xi-1}]_{\eta=\overline{1, k}, \xi=\overline{1, k-1}, \mu}$.

Пусть $\{C_{\mu j}(x, \lambda)\}_{\mu=\overline{1, n}}$, $j = \overline{1, r}$, – фундаментальная система решений уравнения (1) на ребре e_j при начальных условиях $C_{\mu j}^{(\nu-1)}(0, \lambda) = \delta_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = \overline{1, n}$. При каждом фиксированном $x \in [0, 1]$ функции $C_{\mu j}^{(\nu-1)}(x, \lambda)$, $\mu, \nu = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, r}$, являются целыми по λ порядка $1/n$. Кроме того,

$$\det[C_{\mu j}^{(\nu-1)}(x, \lambda)]_{\mu, \nu=\overline{1, n}} \equiv 1. \quad (24)$$

Используя фундаментальную систему решений $\{C_{\mu j}(x, \lambda)\}_{\mu=\overline{1, n}}$, можно записать

$$\psi_{skj}(x, \lambda) = \sum_{\mu=1}^n M_{skj\mu}(\lambda) C_{\mu j}(x, \lambda), \quad s = \overline{1, p}, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, r}, \quad (25)$$

где коэффициенты $M_{skj\mu}(\lambda)$ не зависят от x . В частности, $M_{sk s\mu}(\lambda) = M_{sk\mu}(\lambda)$, и

$$\psi_{sks}(x, \lambda) = C_{ks}(x, \lambda) + \sum_{\mu=k+1}^n M_{sk\mu}(\lambda) C_{\mu s}(x, \lambda). \quad (26)$$

Из (24) и (26) вытекает, что

$$\det[\psi_{sks}^{(\nu-1)}(x, \lambda)]_{k, \nu=\overline{1, n}} \equiv 1. \quad (27)$$

Подставляя представление (25) в (20), (23) и (3) при $Y = \Psi_{sk}$, получим линейную алгебраическую систему относительно $M_{skj\mu}(\lambda)$. Решая эту систему по формулам Крамера, получаем

$$M_{skj\mu}(\lambda) = \Delta_{skj\mu}(\lambda)(\Delta_{sk}(\lambda))^{-1},$$

где функции $\Delta_{skj\mu}(\lambda)$ и $\Delta_{sk}(\lambda)$ являются целыми по λ порядка $1/n$. Таким образом, функции $M_{skj\mu}(\lambda)$ являются мероморфными по λ и, следовательно, решения Вейля и матрицы Вейля являются мероморфными по λ . В частности,

$$M_{sk\mu}(\lambda) = \Delta_{sk\mu}(\lambda)(\Delta_{sk}(\lambda))^{-1}, \quad k < \mu, \quad (28)$$

где $\Delta_{sk\mu}(\lambda) = \Delta_{sk\mu}(\lambda)$, $\Delta_{sk}(\lambda) = \Delta_{skk}(\lambda)$. Нули $\Lambda_{sk\mu} := \{\lambda_{lsk\mu}\}_{l \geq 1}$ функции $\Delta_{sk\mu}(\lambda)$ совпадают с собственными значениями краевой задачи $L_{sk\mu}$ для уравнения (1) с условиями склейки (3) и с краевыми условиями

$$\begin{aligned} y_s^{(\nu-1)}(0) &= 0, & \nu &= \overline{1, k-1}, \mu, \\ y_j^{(\xi-1)}(\delta_{j,p+1}) &= 0, & \xi &= \overline{1, n-k}, \quad j = \overline{1, p+1} \setminus s. \end{aligned}$$

Задача $Z_k(T, v_0, \{a_\nu\}_{\nu=\overline{1, k}})$. Зафиксируем $k = \overline{1, n-1}$. Пусть a_ν , $\nu = \overline{1, k}$, – комплексные числа. Через $\varphi_k = \{\varphi_{kj}\}_{j \in J}$ обозначим решение уравнения (1) на T , удовлетворяющее условиям склейки (3) и следующим краевым условиям:

$$(\varphi_k^{(\nu-1)})|_{v_0} = a_\nu, \quad \nu = \overline{1, k}, \quad (\varphi_k^{(\xi-1)})|_{v_j} = 0, \quad v_j \in \Gamma \setminus v_0, \quad \xi = \overline{1, n-k}. \quad (29)$$

Обозначим $m_{kj\mu}(\lambda) = \varphi_{kj}^{(\mu-1)}(0, \lambda)$, $j \in J$, $\mu = \overline{1, n}$. Тогда

$$\varphi_{kj}(x, \lambda) = \sum_{\mu=1}^n m_{kj\mu}(\lambda) C_{\mu j}(x, \lambda). \quad (30)$$

Матрица $m_{kj\mu}(\lambda)$, $j \in J$, $\mu = \overline{1, n}$, называется *матрицей перехода* для T относительно v_0 и $\{a_\nu\}$. Подставляя (30) в (29) и (3) при $Y = \varphi_k$, получаем линейную алгебраическую систему относительно $m_{kj\mu}(\lambda)$, $j \in J$, $\mu = \overline{1, n}$. Определитель этой системы есть $\Delta_{sk}(\lambda)$. Решая эту систему по формулам Крамера, находим матрицу перехода $m_{kj\mu}(\lambda)$, $j \in J$, $\mu = \overline{1, n}$, для T относительно v_0 и $\{a_\nu\}$. Алгебраическая задача вычисления матрицы перехода $m_{kj\mu}(\lambda)$, $j \in J$, $\mu = \overline{1, n}$, по формулам Крамера называется *задачей* $Z_k(T, v_0, \{a_\nu\}_{\nu=\overline{1, k}})$. Эта задача будет использоваться ниже при описании процедуры решения обратной задачи.

4. Локальные обратные задачи. В этом разделе мы рассмотрим вспомогательные обратные задачи восстановления дифференциального уравнения на каждом фиксированном граничном ребре. Зафиксируем $s = \overline{1, p}$ и рассмотрим следующую обратную задачу на ребре e_s , которая называется *задачей* IP(s): дана матрица Вейля M_s ; построить функции $q_{\nu s}$, $\nu = \overline{0, n-2}$, на ребре e_s .

Докажем теорему единственности решения обратной задачи IP(s). Для этого наряду с q рассмотрим потенциал $\tilde{q}$. Везде в дальнейшем, если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к q , то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{q}$.

ТЕОРЕМА 1. *Зафиксируем $s = \overline{1, p}$. Если $M_s = \widetilde{M}_s$, то $q_{\nu s} = \widetilde{q}_{\nu s}$, $\nu = \overline{0, n-2}$. Таким образом, задание матрицы Вейля M_s однозначно определяет потенциал на ребре e_s .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\psi_s(x, \lambda) := [\psi_{sks}^{(\nu-1)}(x, \lambda)]_{\nu, k=\overline{1, n}}, \quad C_s(x, \lambda) := [C_{ks}^{(\nu-1)}(x, \lambda)]_{\nu, k=\overline{1, n}}.$$

Тогда соотношение (26) может быть записано в виде

$$\psi_s(x, \lambda) = C_s(x, \lambda) M_s^T(\lambda), \quad (31)$$

где T – знак транспонирования. Согласно (24) и (27)

$$\det \psi_s(x, \lambda) = \det C_s(x, \lambda) \equiv 1. \quad (32)$$

Определим матрицу $\mathcal{P}_s(x, \lambda) = [\mathcal{P}_{sjk}(x, \lambda)]_{j, k=\overline{1, n}}$ по формуле

$$\mathcal{P}_s(x, \lambda) = \psi_s(x, \lambda) (\widetilde{\psi}_s(x, \lambda))^{-1}.$$

Учитывая (32), вычисляем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{sjk}(x, \lambda) &= \det [\widetilde{\psi}_{s\nu s}^{(n-1)}(x, \lambda), \dots, \widetilde{\psi}_{s\nu s}^{(k)}(x, \lambda), \\ &\quad \psi_{s\nu s}^{(j-1)}(x, \lambda), \widetilde{\psi}_{s\nu s}^{(k-2)}(x, \lambda), \dots, \widetilde{\psi}_{s\nu s}(x, \lambda)]_{\nu=\overline{1, n}} \\ &= \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+k-n-1} \psi_{s\nu s}^{(j-1)}(x, \lambda) \det [\widetilde{\psi}_{sns}^{(\xi)}(x, \lambda), \dots, \widetilde{\psi}_{s, \nu+1, s}^{(\xi)}(x, \lambda), \\ &\quad \widetilde{\psi}_{s, \nu-1, s}^{(\xi)}(x, \lambda), \dots, \widetilde{\psi}_{s1s}^{(\xi)}(x, \lambda)]_{\xi=\overline{0, n-1} \setminus k-1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Из (33) и леммы 4 вытекает, что при $x \in (0, 1)$, $k = \overline{1, n}$, $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\arg \lambda = \theta \neq 0, \pi$, имеем

$$\mathcal{P}_{s1k}(x, \lambda) - \delta_{1k} = O(\rho^{-1}). \quad (34)$$

Преобразуем матрицу $\mathcal{P}_s(x, \lambda)$. Для этого воспользуемся (31):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_s(x, \lambda) &= \psi_s(x, \lambda) (\widetilde{\psi}_s(x, \lambda))^{-1} \\ &= C_s(x, \lambda) M_s^T(\lambda) (\widetilde{M}_s^T(\lambda))^{-1} (\widetilde{C}_s(x, \lambda))^{-1} = C_s(x, \lambda) (\widetilde{C}_s(x, \lambda))^{-1}. \end{aligned}$$

В силу (32) заключаем, что при каждом фиксированном x матрица-функция $\mathcal{P}_s(x, \lambda)$ является целой аналитической функцией по λ порядка $1/n$. Вместе с (34) это дает $\mathcal{P}_{s11}(x, \lambda) \equiv 1$, $\mathcal{P}_{s1k}(x, \lambda) \equiv 0$, $k = \overline{2, n}$. Так как $\mathcal{P}_s(x, \lambda) \widetilde{\psi}_s(x, \lambda) = \psi_s(x, \lambda)$, то $\psi_{sks}(x, \lambda) \equiv \widetilde{\psi}_{sks}(x, \lambda)$ при всех x, λ, k и, следовательно, $q_{\nu s} = \widetilde{q}_{\nu s}$, $\nu = \overline{0, n-2}$.

Используя метод спектральных отображений, можно получить конструктивную процедуру решения обратной задачи IP(s). Она может быть получена теми же рассуждениями, что и для дифференциальных операторов n -го порядка на интервале (подробности см. в [2; гл. 3]).

5. Матрицы Вейля для внутренних вершин. Зафиксируем $v_m \notin \Gamma$. Обозначим $T_m^0 := \{z \in T : v_m < z\}$, $T_m := T \setminus T_m^0$. Ясно, что T_m – дерево с корнем v_0 . Пусть Γ_m – множество граничных вершин T_m , и пусть E_m – множество граничных ребер T_m . Обозначим $J_m := \{j : e_j \in T_m\}$. Если $Y = \{y_j\}_{j \in J}$ – функция на T , то $\{Y\}_m := \{y_j\}_{j \in J_m}$ – функция на T_m .

Зафиксируем $v_m \notin \Gamma$, $k = \overline{1, n-1}$. Пусть $\Psi_{mk}(x, \lambda) = \{\psi_{mkj}(x, \lambda)\}_{j \in J_m}$ – решение уравнения (1) на T_m , удовлетворяющее (3) и краевым условиям

$$\begin{aligned} (\Psi_{mk}^{(\nu-1)})|_{v_m} &= \delta_{\nu k}, & \nu &= \overline{1, k}, \\ (\Psi_{mk}^{(\xi-1)})|_{v_j} &= 0, & v_j &\in \Gamma_m \setminus v_m, \quad \xi = \overline{1, n-k}. \end{aligned} \quad (35)$$

Из (35) следует, что функция Ψ_{mk} является решением Вейля для (1) на T_m относительно внутренней вершины v_m . Введем матрицу

$$M_m(\lambda) = [M_{mk\nu}(\lambda)]_{k, \nu = \overline{1, n}},$$

где $M_{mk\nu}(\lambda) := \psi_{mkm}^{(\nu-1)}(0, \lambda)$. Тогда $M_{mk\nu}(\lambda) = \delta_{k\nu}$ при $k \geq \nu$, и $\det M_m(\lambda) \equiv 1$. Матрица $M_m(\lambda)$ называется *матрицей Вейля* для T_m относительно внутренней вершины v_m .

ЛЕММА 5. *Зафиксируем $v_m \notin \Gamma$ и $k = \overline{1, n-1}$. Пусть $e_s = [v_m, v_s] \in R(v_m)$. Тогда*

$$M_{m1\nu}(\lambda) = \frac{\psi_{s1m}^{(\nu-1)}(0, \lambda)}{\psi_{s1m}(0, \lambda)}, \quad \nu = \overline{2, n}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} M_{mk\nu}(\lambda) &= \frac{\det[\psi_{s\mu m}(0, \lambda), \dots, \psi_{s\mu m}^{(k-2)}(0, \lambda), \psi_{s\mu m}^{(\nu-1)}(0, \lambda)]_{\mu=\overline{1, k}}}{\det[\psi_{s\mu m}^{(\xi-1)}(0, \lambda)]_{\xi, \mu=\overline{1, k}}}, \\ k &= \overline{2, n-1}, \quad \nu = \overline{k+1, n}. \end{aligned} \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$z_{m1j}(x, \lambda) := \frac{\psi_{s1j}(x, \lambda)}{\psi_{s1m}(1, \lambda)}, \quad j \in J_m.$$

Функция $z_{m1j}(x, \lambda)$ является решением уравнения (1) на ребре e_j , и $z_{m1j}(x, \lambda)$ удовлетворяет тем же граничным условиям, что и $\psi_{m1j}(x, \lambda)$; следовательно, $z_{m1j}(x, \lambda) \equiv \psi_{m1j}(x, \lambda)$. Таким образом,

$$\psi_{m1j}(x, \lambda) = \frac{\psi_{s1j}(x, \lambda)}{\psi_{s1m}(0, \lambda)}, \quad j \in J_m. \quad (38)$$

Аналогично вычисляем

$$\begin{aligned} \psi_{mkj}(x, \lambda) &= \frac{\det[\psi_{s\mu m}(0, \lambda), \dots, \psi_{s\mu m}^{(k-2)}(0, \lambda), \psi_{s\mu j}(x, \lambda)]_{\mu=\overline{1, k}}}{\det[\psi_{s\mu m}^{(\xi-1)}(0, \lambda)]_{\xi, \mu=\overline{1, k}}}, \\ k &= \overline{2, n-1}, \quad j \in J_m. \end{aligned} \quad (39)$$

Так как $M_{mk\nu}(\lambda) := \psi_{mkm}^{(\nu-1)}(0, \lambda)$, из (38), (39) вытекает, что верны (36), (37).

Используя фундаментальную систему решений $\{C_{\mu j}(x, \lambda)\}_{\mu=\overline{1, n}}$, получаем, что (25) верно для $s = \overline{1, r}$, $k = \overline{1, n}$, $j \in J_s$, где $J_s := J$, $s = \overline{1, p}$, и коэффициенты $M_{skj\mu}(\lambda)$ не зависят от x . В частности, $M_{sk s\mu}(\lambda) = M_{sk\mu}(\lambda)$, и (26) верно для $s = \overline{1, r}$, $k = \overline{1, n}$. Поэтому получаем

$$\psi_{skj}^{(\nu-1)}(1, \lambda) = \sum_{\mu=1}^n M_{skj\mu}(\lambda) C_{\mu j}^{(\nu-1)}(1, \lambda), \quad j \in J_s, \quad k, \nu = \overline{1, n}, \quad s = \overline{1, r}, \quad (40)$$

$$\psi_{sks}^{(\nu-1)}(1, \lambda) = C_{ks}^{(\nu-1)}(1, \lambda) + \sum_{\mu=k+1}^n M_{sk\mu}(\lambda) C_{\mu s}^{(\nu-1)}(1, \lambda), \quad (41)$$

$$k, \nu = \overline{1, n}, \quad s = \overline{1, r}.$$

Кроме того, согласно (3) имеем при $m = \overline{p+1, r}$

$$U_{j\nu m}(\Psi_{sk}) + \psi_{skm}^{(\nu)}(0, \lambda) = 0, \quad j = \overline{1, \omega_m}, \quad \nu = \overline{0, k-1}, \quad (42)$$

$$\sum_{j=1}^{\omega_m} U_{j\nu m}(\Psi_{sk}) + \psi_{skm}^{(\nu)}(0, \lambda) = 0, \quad \nu = \overline{k, n-1}. \quad (43)$$

6. Решение обратной задачи 1. В этом разделе мы получим конструктивную процедуру решения обратной задачи 1 и докажем его единственность. Пусть дано множество $M = \{M_s\}_{s=\overline{1, p}}$ для уравнения (1). Процедура решения обратной задачи 1 состоит в реализации так называемых A_ξ -процедур последовательно для $\xi = \sigma, \sigma-1, \dots, 1$, где σ – высота дерева T . Опишем A_ξ -процедуры. Для удобства читателей опишем отдельно A_σ -процедуру как первый шаг решения.

A_σ -ПРОЦЕДУРА. 1) Для каждого ребра $e_s \in \mathcal{E}^{(\sigma)}$ (ясно, что e_s – граничное ребро) решаем локальную обратную задачу IP(s) и находим коэффициенты $q_{\nu s}(x)$, $x \in [0, 1]$, $\nu = \overline{0, n-2}$, уравнения (1) на ребре e_s .

2) Для каждого ребра $e_s \in \mathcal{E}^{(\sigma)}$ строим $C_{\mu s}(x, \lambda)$, $x \in [0, 1]$, $\mu = \overline{1, n}$, и вычисляем функции

$$\psi_{sks}^{(\nu-1)}(1, \lambda), \quad k, \nu = \overline{1, n}, \quad (44)$$

по (41).

3) *Возвратная процедура.* Для каждой фиксированной $v_m \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$, $k = \overline{1, n}$, и для всех $e_i, e_s \in R(v_m)$, $i \neq s$, выполняем следующие операции.

(i) Используя (44) и условия склейки (42) в v_m , получаем

$$\psi_{ski}^{(\nu-1)}(1, \lambda) = a_{skiv}(\lambda), \quad \nu = \overline{1, k}, \quad (45)$$

где $a_{skiv}(\lambda)$ строятся как линейные комбинации функций (44) при $\nu = \overline{1, k}$.

(ii) Рассмотрим дерево $T_i^1 := \{e_i\}$, которое состоит из ребра e_i . Решая алгебраическую задачу $Z_k(T_i^1, v_m, \{a_{skiv}(\lambda)\}_{\nu=\overline{1, k}})$, вычисляем $\{M_{ski\mu}(\lambda)\}$, $\mu = \overline{1, n}$.

4) Для каждой фиксированной $v_m \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$, и для всех $e_j, e_s \in R(v_m)$, $j \neq s$, строим функции

$$\psi_{skj}^{(\nu-1)}(1, \lambda), \quad k, \nu = \overline{1, n}, \quad (46)$$

по (40). Далее, используя (44), (46) и условия склейки (42), (43), находим

$$\psi_{skm}^{(\nu-1)}(0, \lambda), \quad k, \nu = \overline{1, n}.$$

5) Для каждой фиксированной $v_m \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$, вычисляем матрицу Вейля $M_m(\lambda)$ согласно (36), (37).

Выполним теперь A_ξ -процедуры для $\xi = \overline{1, \sigma-1}$ по индукции. Зафиксируем $\xi = \overline{1, \sigma-1}$ и предположим, что $A_{\sigma-}, \dots, A_{\xi+1}$ -процедуры уже выполнены. Выполним A_ξ -процедуру.

A_ξ -ПРОЦЕДУРА. Для каждой $v_s \in V^{(\xi)}$ матрица Вейля $M_s(\lambda)$ задана. В самом деле, если $v_s \in V^{(\xi)} \cap \Gamma$, то $M_s(\lambda)$ задана априори, а если $v_s \in V^{(\xi)} \setminus \Gamma$, то $M_s(\lambda)$ вычислена на предыдущих шагах согласно $A_{\sigma-}, \dots, A_{\xi+1}$ -процедурам.

1) Для каждого ребра $e_s \in \mathcal{E}^{(\xi)}$ решаем локальную обратную задачу IP(s) и находим коэффициенты $q_{\nu s}(x)$, $x \in [0, 1]$, $\nu = \overline{0, n-2}$, уравнения (1) на ребре e_s . Если $\xi = 1$, то обратная задача 1 решена, и мы останавливаем наши вычисления. Если $\xi > 1$, то переходим к следующему шагу.

2) Для каждого ребра $e_s \in \mathcal{E}^{(\xi)}$ строим $C_{\mu s}(x, \lambda)$, $x \in [0, 1]$, $\mu = \overline{1, n}$, и вычисляем функции (44) по (41).

3) *Возвратная процедура.* Для каждой фиксированной $v_m \in V^{(\xi-1)} \setminus \Gamma$, $k = \overline{1, n}$, и для всех $e_i, e_s \in R(v_m)$, $i \neq s$, выполняем следующие операции.

(i) Используя (44) и условия склейки (42) в v_m , получаем (45), где $a_{skiv}(\lambda)$ строятся как линейные комбинации функций (44) при $\nu = \overline{1, k}$.

(ii) Рассмотрим дерево $T_i^1 := T_i^0 \cup \{e_i\}$ с корнем v_m . Решая алгебраическую задачу $Z_k(T_i^1, v_m, \{a_{skiv}(\lambda)\}_{\nu=\overline{1, k}})$, вычисляем матрицу перехода $\{M_{skj\mu}(\lambda)\}$, $\mu = \overline{1, n}$, $j \in J_{i1}$, где $J_{i1} := \{j : e_j \in T_i^1\}$.

4) Для каждой фиксированной $v_m \in V^{(\xi-1)} \setminus \Gamma$ и для всех $e_j, e_s \in R(v_m)$, $j \neq s$, строим функции (46) по (40). Далее, используя (44), (46) и условия склейки (42), (43), находим функции $\psi_{skm}^{(\nu-1)}(0, \lambda)$, $k, \nu = \overline{1, n}$.

5) Для каждой фиксированной $v_m \in V^{(\xi-1)} \setminus \Gamma$ вычисляем матрицу Вейля $M_m(\lambda)$ по (36), (37).

Таким образом, мы получили решение обратной задачи 1 и доказали его единственность, т.е. справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Задание матриц Вейля $M = \{M_s\}_{s=\overline{1, p}}$ однозначно определяет потенциал q на T . Решение обратной задачи 1 может быть получено последовательным выполнением $A_{\sigma-}, A_{\sigma-1-}, \dots, A_1$ -процедур.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1 (Обратная задача по системе спектров). Через $\Lambda := \{\Lambda_{sk\mu}\}$, $s = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, n-1}$, $\mu = \overline{k, n}$, обозначим множество спектров краевых задач $L_{sk\mu}$. Обратная задача ставится следующим образом: дано множество спектров Λ , построить q на T .

Эта обратная задача является обобщением классической обратной задачи восстановления операторов Штурма–Лиувилля на интервале по двум спектрам (см. [2]–[5]) и обобщением обратной задачи восстановления дифференциальных операторов высших порядков на интервале по спектрам (см. [5]). Используя (28), факторизационную теорему Адамара и асимптотику $M_{sk\mu}(\lambda)$, можно показать, что задание Λ однозначно определяет M . Таким образом, решение обратной задачи по спектрам может быть сведено к решению обратной задачи 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 (Обратная задача по спектральным данным). Возможно также рассмотреть обратную задачу по другим дискретным спектральным характеристикам, а именно, по так называемым спектральным данным, которые описывают главные части рядов Лорана для матриц Вейля в окрестностях их полюсов. Для простоты пусть все полюсы простые. Обозначим $\alpha_{lsk\mu} = \text{Res}_{\lambda=\lambda_{lsk}} M_{sk\mu}(\lambda)$, где $\lambda_{lsk} := \lambda_{lskk}$. Данные $\Lambda_1 := \{\lambda_{lsk}, \alpha_{lsk\mu}\}$, $l \geq 1$, $s = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, n-1}$, $\mu = \overline{k+1, n}$ называются *спектральными данными*. Обратная задача формулируется следующим образом: *даны спектральные данные Λ_1 , построить потенциал q на T .*

Эта обратная задача является обобщением классической обратной задачи восстановления операторов Штурма–Лиувилля на интервале (см. [2]–[5]). Известным методом (см., например, [5]) можно получить, что задание Λ_1 однозначно определяет M . Таким образом, решение обратной задачи по спектральным данным может быть сведено к решению обратной задачи 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, М., 2004.
- [2] В. А. Юрко, *Введение в теорию обратных спектральных задач*, Физматлит, М., 2007.
- [3] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова Думка, Киев, 1977.
- [4] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984.
- [5] V. A. Yurko, *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 2002.
- [6] A. L. Bukhgeim, *Introduction to the Theory of Inverse Problems*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 2000.
- [7] A. M. Denisov, *Elements of the theory of inverse problems*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 1999.
- [8] S. I. Kabanikhin, A. D. Satybaev, M. A. Shishlenin, *Direct Methods of Solving Multi-dimensional Inverse Hyperbolic Problems*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 2005.
- [9] M. M. Lavrentiev, A. V. Avdeev, M. M. Lavrentiev Jr., V. I. Priimenko, *Inverse Problems of Mathematical Physics*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 2003.
- [10] A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **231**, Marcel Dekker, New York, 2000.
- [11] В. Г. Романов, *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984.
- [12] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.

В. А. Юрко

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: yurkova@info.sgu.ru

Поступило

19.04.2007