Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Акопян, О пересечении параллелепипедов в $\mathbb{R}^d$,
Матем. заметки, 2008, том 83, выпуск 1, 153–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4341>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 12:07:19

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О пересечении параллелепипедов в $\mathbb{R}^d$

А. В. Акопян

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^d$ дано семейство $\mathcal{B}$ состоящее из параллелепипедов с ребрами параллельными осям координат. Обозначим через $\nu(\mathcal{B})$ максимальное количество попарно непересекающихся параллелепипедов из $\mathcal{B}$, а через $\tau(\mathcal{B})$ – минимальное количество точек, обладающих тем свойством, что каждый параллелепипед из $\mathcal{B}$ содержит хотя бы одну из них. Пусть $f(n, d)$ – максимальное $\tau(\mathcal{B})$, для всех $\mathcal{B}$, удовлетворяющих условию $\nu(\mathcal{B}) \leq n$.

Задача о нахождении $f(n, d)$ была поставлена в книге [1]. В ней же была получена верхняя оценка $f(n, 2) \leq (n(n-1))/2$. Первая нетривиальная нижняя оценка была получена в работе [2], а именно $1.5n \leq f(n, 2)$. В [3] было показано, что при фиксированном d :

$$f(n, d) \leq (1 + o(1))n \log_2^{d-1} n.$$

В статье [4] уточнена эта верхняя оценка на $f(n, d)$. При фиксированном d

$$f(n, d) \leq n \log_2^{d-1} n + d - \frac{1}{2} n \log_2^{d-2} n = (1 + o(1))n \log_2^{d-1} n.$$

Кроме того доказаны следующие нижние оценки:

$$f(n, 2) \geq \left\lceil \frac{5n}{3} \right\rceil, \quad f(2, 3) = 4, \quad f(2, 4) = 5, \quad f(2, d) \geq \frac{c' d^{1/2}}{\log d} \text{ для некоторого } c'.$$

Основываясь на идеях [4] мы уменьшим верхнюю оценку в ≈ 1.057 раз, а именно покажем следующее:

$$f(n, d) < (\log_{\sqrt[3]{9}} 2 + o(1))n \log_2^{d-1} n.$$

Для удобства, положим $f(0, d) = 0$. В статье [4] доказано следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого $n \geq 2$ и $d \geq 2$ верно неравенство

$$f(n, d) \leq \min_{0 \leq k \leq n-2} \{f(k, d) + f(n-k-1, d)\} + f(n, d-1).$$

Сразу приведем одно простое следствие из этого предложения. Оно нам понадобится для оценки $f(n, d)$ при $d \geq 3$.

ЛЕММА 1. Для любого $n \geq 1$ и $d \geq 2$ верно неравенство

$$f(n, d) \leq n + \log_2 n \cdot f(n, d-1).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00648).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство будем проводить индукцией по n . Для $n = 1$ это утверждение очевидно. Пусть оно доказано для всех $n' < n$. Заметим, что в силу предложения 1 и предположения индукции

$$\begin{aligned} f(n, d) &\leq f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil, d\right) + f\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, d\right) + f(n, d-1) \\ &= f(n, d-1) + 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, d\right) \leq f(n, d-1) + 2\log_2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, d-1\right) + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Заметим, что $f(l, d) + f(m, d) \leq f(l + m, d)$, поэтому $2f(\lfloor n/2 \rfloor, d-1) \leq f(n, d-1)$. Следовательно,

$$f(n, d) \leq n + \left(\log_2 \frac{n}{2} + 1\right)f(n, d-1) = n + \log_2 n \cdot f(n, d-1).$$

Следующая лемма необходима для доказательства оценки при $d = 2$.

ЛЕММА 2. Пусть для семейства $\mathcal{B}$, состоящего из прямоугольников в $\mathbb{R}^2$, существуют две прямые l_1 и l_2 , параллельные оси абсцисс, такие, что каждый прямоугольник из $\mathcal{B}$ пересекает хотя бы одну из них. Тогда

$$\tau(\mathcal{B}) \leq \left\lfloor \frac{3\nu(\mathcal{B})}{2} \right\rfloor.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем наше утверждение индукцией по $\nu(\mathcal{B})$ с шагом 2. В [1] показано, что $f(1, 2) = 1$ и $f(2, 2) = 3$, это будет базой индукции. Пусть для всех семейств $\mathcal{B}$ с $\nu(\mathcal{B}) \leq n-2$ утверждение доказано. Докажем его и для $\mathcal{B}$ таких, что $\nu(\mathcal{B}) = n$. Пусть $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_i \mid i \in I\}$ такое, что $\nu(\mathcal{B}) = n$. Можно считать, что

$$\mathcal{B}_i = [l_{i,x}; r_{i,x}] \times [l_{i,y}; r_{i,y}].$$

Для любого x построим разбиение $\mathcal{B}$ на три части следующим образом:

$$\mathcal{B}^-(x) = \{\mathcal{B}_i \mid r_{i,x} < x\}, \quad \mathcal{B}^+(x) = \{\mathcal{B}_i \mid l_{i,x} > x\}, \quad \mathcal{B}^0(x) = \mathcal{B} \setminus (\mathcal{B}^-(x) \cup \mathcal{B}^+(x)).$$

Пусть $a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \nu(\mathcal{B}^-(x)) \leq 1\}$. В силу определения найдется прямоугольник $\mathcal{B}_a \in \mathcal{B}^0(a)$ такой, что $r_{a,x} = a$, и существует прямоугольник из $\mathcal{B}^-(a)$, не пересекающийся с ним. Поэтому $\nu(\mathcal{B}^+(a)) \leq n-2$, а значит, по предположению индукции $\tau(\mathcal{B}^+(a)) \leq \lfloor (3(n-2))/2 \rfloor$. Заметим, что поскольку в $\mathcal{B}^-(a)$ все прямоугольники пересекаются, $\tau(\mathcal{B}^-(a)) = 1$. Кроме того, $\tau(\mathcal{B}^0(a)) \leq 2$, а именно, каждый прямоугольник из $\mathcal{B}^0(a)$ содержит хотя бы одну из точек пересечения прямой $x = a$ с l_1 и l_2 . Поэтому

$$\tau(\mathcal{B}) \leq \tau(\mathcal{B}^-(a)) + \tau(\mathcal{B}^+(a)) + \tau(\mathcal{B}^0(a)) \leq 1 + \left\lfloor \frac{3(\nu(\mathcal{B}) - 2)}{2} \right\rfloor + 2 = \left\lfloor \frac{3\nu(\mathcal{B})}{2} \right\rfloor.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Оценка в лемме 2 точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем пример семейства $\mathcal{B}$, на котором достигается равенство. Для $n = 1$ в качестве семейства $\mathcal{B}$ можно взять просто один прямоугольник пересекающий хотя бы одну из прямых l_1 и l_2 . Для $n = 2$ можно взять стандартный пример $\mathcal{B}$ с $\nu(\mathcal{B}) = 2$ и $\tau(\mathcal{B}) = 3$ (рис. 1); обозначим это семейство через $\mathcal{B}^2$.

Для построения примера в случае произвольного n достаточно взять $\lfloor n/2 \rfloor$ попарно непересекающихся копий семейства $\mathcal{B}^2$, отличающихся переносом вдоль оси абсцисс. В случае нечетного n к получившемуся семейству необходимо добавить прямоугольник, пересекающий любую из прямых l_1 и l_2 и не пересекающий ни одного прямоугольника уже построенной системы.

Рис. 1

Используя лемму 2 докажем следующее предложение, аналогичное предложению 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любых $n \geq 2$

$$f(n, 2) \leq \min_{k+l+m=n-2} \{f(k, 2) + f(l, 2) + f(m, 2)\} + \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем такое $\mathcal{B}$, что $\nu(\mathcal{B}) = n$. Как и в доказательстве леммы 2, будем считать, что семейство $\mathcal{B}$ состоит из прямоугольников $\mathcal{B}_i = [l_{i,x}; r_{i,x}] \times [l_{i,y}; r_{i,y}]$.

Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $x_1 \leq x_2$, построим разбиение $\mathcal{B}$ на четыре части:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^-(x_1, x_2) &= \{\mathcal{B}_i \mid r_{i,x} < x_1\}, & \mathcal{B}^\pm(x_1, x_2) &= \{\mathcal{B}_i \mid l_{i,x} > x_1 \text{ и } r_{i,x} < x_2\}, \\ \mathcal{B}^+(x_1, x_2) &= \{\mathcal{B}_i \mid l_{i,x} > x_2\}, & \mathcal{B}^0(x_1, x_2) &= \mathcal{B} \setminus (\mathcal{B}^-(x_1, x_2) \cup \mathcal{B}^\pm(x_1, x_2) \cup \mathcal{B}^+(x_1, x_2)). \end{aligned}$$

Теперь для произвольных k, l и m , удовлетворяющих условию $k+l+m = n-2$, возьмем $a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \nu(\mathcal{B}^-(x)) \leq k\}$ и $b = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \nu(\mathcal{B}^+(x)) \leq m\}$. Будем считать, что $a \leq b$, иначе $\nu(\mathcal{B}) \leq k+m < n$. Легко понять, что семейство $\{\mathcal{B}_i \mid r_{i,x} \leq a\}$ содержит $k+1$ непересекающихся прямоугольников, поэтому $\nu(\mathcal{B}^\pm(a, b) \cup \mathcal{B}^+(a, b)) \leq n-k-1 = l+m+1$. Аналогично $\{\mathcal{B}_i \mid l_{i,x} \geq b\}$ содержит хотя бы $m+1$ непересекающихся прямоугольников, поэтому $\nu(\mathcal{B}^\pm(a, b)) \leq n-k-1-m-1 = l$. Таким образом, $\tau(\mathcal{B}^-(a, b)) \leq f(k, 2)$, $\tau(\mathcal{B}^\pm(a, b)) \leq f(l, 2)$, $\tau(\mathcal{B}^+(a, b)) \leq f(m, 2)$, а в силу леммы 2, $\tau(\mathcal{B}^0(a, b)) \leq \lceil 3n/2 \rceil$. Получаем

$$\begin{aligned} \tau(\mathcal{B}) &\leq \tau(\mathcal{B}^-(a, b)) + \tau(\mathcal{B}^\pm(a, b)) + \tau(\mathcal{B}^+(a, b)) + \tau(\mathcal{B}^0(a, b)) \\ &\leq f(k, 2) + f(l, 2) + f(m, 2) + \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

Применяя это предложение для $n = 5$ получаем, что $f(5, 2) \leq 10$, что на 1 меньше чем оценка полученная с помощью предложения 1. Теперь покажем, почему функцию $f(n, 2)$ можно оценить сверху следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $h(n) = n \log_{\sqrt[3]{9}} n + n$. Тогда

$$f(n, 2) \leq h(n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $h(1) = f(1, 2)$ и $h(2) \approx 3.892789 > 3 = f(2, 2)$. Для больших n докажем утверждение воспользовавшись индукцией. По предложению 2

$$f(n, 2) \leq 3f\left(\left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil, 2\right) + \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil.$$

Поскольку функция $h(n)$ монотонно возрастает при $n > e^{-1}$, и $\lceil (n-2)/3 \rceil \leq n/3$, получаем

$$3f\left(\left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil, 2\right) + \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil \leq 3h\left(\frac{n}{3}\right) + \frac{3n}{2} = n \log_{\sqrt[3]{9}} \frac{n}{3} + 3 \frac{n}{2} + \frac{3n}{2} = h(n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что при $n \geq 5$, $f(n, 2) < n \log_{\sqrt[3]{9}} n$. Для $n < 15$ это можно показать непосредственно подсчитав $h(n)$ и оценив $f(n, 2)$ с помощью предложения 2, а при больших n воспользоваться индукцией из доказательства предложения 3.

Пользуясь результатом предложения 3 и леммой 1 докажем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При любом фиксированном $d \geq 2$ верна следующая оценка:

$$f(n, d) < (\log_{\sqrt[3]{9}} 2 + o(1))n \log_2^{d-1} n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $d = 2$ утверждение непосредственно следует из предложения 3. Докажем его для большего d , считая что для $d - 1$ оценка уже доказана. В силу леммы 1

$$\begin{aligned} f(n, d) &\leq n + \log_2 n \cdot f(n, d - 1) \\ &\leq n + \log_2 n \cdot (\log_{\sqrt[3]{9}} 2 + o(1))n \log_2^{d-2} n = (\log_{\sqrt[3]{9}} 2 + o(1))n \log_2^{d-1} n. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Хадвигер, Г. Дебруннер, *Комбинаторная геометрия плоскости*, Наука, М., 1965.
 [2] A. Gyáfrás, J. Lehel, *Discrete Math.*, **55**:2 (1985), 167–180. [3] G. Károlyi, *Period. Math. Hungar.*, **23**:2 (1991), 105–107. [4] D. G. Fon-Der-Flaass, A. V. Kostochka, *Discrete Math.*, **120**:1–3 (1993), 269–275.

А. В. Акопян

Московский государственный
 университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: akopjan@gmail.com

Поступило

18.06.2007

Исправленный вариант

26.06.2007