Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Мироков, О некоторых свойствах модулярного многочлена для лямбда-функции, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 2, 237–255

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4342>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 07:44:15

О некоторых свойствах модулярного многочлена для лямбда-функции

В. Д. Мироков

В данной статье доказывается существование модулярных многочленов для лямбда-функции и дается асимптотическая формула для максимума модулей их коэффициентов.

Библиография: 6 названий.

1. Введение

Нулевыми тета-значениями или тета-константами называются функции комплексного переменного τ , $\text{Im } \tau > 0$, определяемые рядами

$$\theta_2(\tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}, \quad \theta_3(\tau) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}, \quad \theta_4(\tau) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2},$$

где $q = e^{\pi i \tau}$. Верхнюю комплексную полуплоскость $\tau \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \tau > 0$, мы для краткости будем обозначать буквой $\mathcal{H}$. Функция

$$j(\tau) = 256 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}, \quad \text{где } \lambda = \lambda(\tau) = \frac{\theta_2^4(\tau)}{\theta_3^4(\tau)} = 16q(1 - 8q + 44q^2 + \dots), \quad (1)$$

модулярна относительно группы $SL(2, \mathbb{Z})$ и порождает поле всех таких функций.

Для каждого $n > 0$ будем обозначать

$$\psi(n) = n \cdot \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Известно, что существует единственный неприводимый многочлен с целыми коэффициентами $\Phi_n(X, Y)$, имеющий степень в точности $\psi(n)$ и по X , и по Y , с коэффициентом 1 при $X^{\psi(n)}$, такой, что выполняется тождество

$$\Phi_n(j(n\tau), j(\tau)) = 0. \quad (2)$$

Эти многочлены называются *модулярными*. Коэффициенты Φ_n быстро возрастают с ростом n . Впервые оценку величины коэффициентов многочлена Φ_n доказал

в 1974 г. Малер [1]. Для ненулевого многочлена P от нескольких переменных определим $h(P)$ как логарифм максимума модулей коэффициентов этого многочлена. В 1984 г. Коэн в работе [2] установила асимптотику

$$h(\Phi_n) = 6\psi(n) \log n - 12\psi(n)\kappa(n) + O(\psi(n)), \quad (3)$$

где

$$\kappa(n) = \sum_{p|n} p^{-1} \log p = O(\log \log n).$$

Здесь и далее символом $\Gamma(N)$ обозначается группа, состоящая из целочисленных (2×2) -матриц с определителем 1, удовлетворяющих сравнению

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N}.$$

Функция λ модулярна относительно группы $\Gamma(2)$ и порождает поле всех таких функций. Данная статья посвящена получению результата, аналогичного (2) и (3), для лямбда-функции, но только в случае, когда n нечетно.

Существование неприводимого многочлена, связывающего функции $\lambda(\tau)$ и $\lambda(n\tau)$ над полем $\mathbb{Q}$, следует из тождеств (1) и (2). Набросок доказательства некоторых свойств этого многочлена можно найти в работе Гринспена [3].

Во второй части приводится доказательство существования многочленов $P_n(X, Y)$ с целыми коэффициентами, с коэффициентом 1 при $X^{\psi(n)}$, таких, что выполняются равенства

$$P_n(16\lambda(n\tau), 16\lambda(\tau)) = 0, \quad \deg_X P_n = \deg_Y P_n = \psi(n).$$

В третьей части устанавливается основной результат данной работы: асимптотика

$$h(P_n) = \psi(n) \log n - 2\psi(n)\kappa(n) + O(\psi(n)).$$

В п. 3.1 непосредственно используются свойства модулярных функций для представления $h(P_n)$ в виде некоторой суммы. Вычисление этой суммы производится в следующем пункте. Многочисленные рассуждения, не связанные напрямую с модулярными функциями, делают этот пункт самым сложным в работе. Последний пункт – применение простого интерполяционного утверждения для окончания доказательства.

2. Существование многочлена

ТЕОРЕМА 1. *Для каждого нечетного $n > 2$ существует многочлен $P_n(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]$, $\deg_X P = \psi(n)$, такой, что*

$$P_n(16\lambda(n\tau), 16\lambda(\tau)) = 0. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n > 2$ – нечетное число. Группа $\Gamma(2)$ действует умножением слева на множестве целочисленных (2×2) -матриц.

ЛЕММА 1. *Относительно указанного действия совокупность целочисленных (2×2) -матриц с определителем n , имеющих взаимно простые в совокупности*

элементы и сравнимых с единичной матрицей по модулю 2, разбивается на $\psi(n)$ классов эквивалентности. Каждый класс содержит единственную матрицу вида

$$\begin{pmatrix} u & 2v \\ 0 & w \end{pmatrix}, \quad (u, v, w) = 1, \quad uw = n, \quad 0 \leq v < w. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

– матрица с целыми взаимно простыми в совокупности элементами определителя n , сравнимая с единичной матрицей по модулю 2. Обозначим (a, c) – наибольший делитель чисел a, c и положим

$$r = -\frac{c}{(a, c)}, \quad s = \frac{a}{(a, c)}.$$

Поскольку a нечетно и c четно, заключаем, что r четно и s нечетно. Кроме того, эти числа взаимно просты и $ra + sc = 0$. Существуют целые числа p, q , для которых выполняется равенство $ps - rq = 1$. При этом число q можно выбрать четным. Тогда p нечетно. Имеем включение

$$\beta = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \Gamma(2).$$

Тогда

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} u & t \\ 0 & w \end{pmatrix},$$

причем t четно, u, w нечетны. Умножив в случае необходимости все числа p, q, r, s на -1 , можно добиться выполнения условия $u > 0, w > 0$. Пусть теперь $t/2 = wk + v$, $0 \leq v < w$ и

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & -2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(2).$$

Тогда

$$\gamma\beta\alpha = \begin{pmatrix} u & 2v \\ 0 & w \end{pmatrix} \in \Gamma(2),$$

и эта матрица удовлетворяет условиям (5).

Предположим теперь, что две матрицы вида (5)

$$\chi = \begin{pmatrix} u & 2v \\ 0 & w \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \xi = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

принадлежат одной орбите. Тогда $\xi = \eta\chi$, где

$$\eta = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \Gamma(2).$$

Приравнивая соответствующие элементы матриц ξ и $\eta\chi$, находим $r = 0, p > 0, s > 0$. Сравнивая определители, получаем $ps = 1$ и, значит, $p = s = 1$. Пользуясь

теперь последним из условий (5) на матрицы χ , ξ , получаем неравенства $0 \leq b < d$, $0 \leq b - (q/2)d < d$, из которых следует $q = 0$, так что $\chi = \xi$.

Количество орбит в точности равно количеству троек целых чисел u, v, w , удовлетворяющих условиям (5). Тот факт, что это количество равно $\psi(n)$, хорошо известен, например, [4; с. 53]. Лемма доказана.

Перенумеруем матрицы (5), обозначим их $\alpha_1, \dots, \alpha_{\psi(n)}$. При этом будем считать, что

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим также

$$\lambda_\nu(\tau) = \lambda\left(\frac{u_\nu\tau + 2v_\nu}{w_\nu}\right), \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} u_\nu & v_\nu \\ 0 & w_\nu \end{pmatrix} = \alpha_\nu, \quad \nu = 1, \dots, \psi(n).$$

Покажем, что преобразования верхней комплексной полуплоскости, соответствующие матрицам из группы $\Gamma(2)$, действуя на аргумент τ , переставляют функции λ_ν . Для этого удобно ввести некоторое обозначение. Пусть $f(\tau)$ – функция, голоморфная на верхней комплексной полуплоскости $\mathcal{H}$ и

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

– матрица с целыми элементами и определителем $ad - bc > 0$. Будем обозначать

$$f_\alpha(\tau) = \frac{(ad - bc)^2}{(c\tau + d)^2} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right).$$

Укажем некоторые свойства введенного обозначения:

1) непосредственным вычислением легко проверяется тождество

$$(f_\alpha(\tau))_\beta = f_{\alpha\beta}(\tau),$$

справедливое для любых двух матриц указанного вида;

2) справедливы равенства

$$\lambda_\nu(\tau) = \frac{(\theta_2^4(\tau))_{\alpha_\nu}}{(\theta_3^4(\tau))_{\alpha_\nu}}, \quad \nu = 1, \dots, \psi(n).$$

В дальнейшем мы будем использовать тождества

$$\begin{aligned} \theta_2^4(\tau + 1) &= -\theta_2^4(\tau), & \theta_3^4(\tau + 1) &= \theta_4^4(\tau), & \theta_4^4(\tau + 1) &= \theta_3^4(\tau), \\ \theta_2^4\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= -\tau^2\theta_4^4(\tau), & \theta_3^4\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= -\tau^2\theta_3^4(\tau), & \theta_4^4\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= -\tau^2\theta_2^4(\tau). \end{aligned} \quad (6)$$

Из них, в частности, следует, что функции $\theta_2^4(\tau)$, $\theta_3^4(\tau)$ и $\theta_4^4(\tau)$ являются модулярными формами веса 2 относительно группы $\Gamma(2)$. Используя эти свойства, а также равенство $\theta_2^4(\tau) + \theta_4^4(\tau) = \theta_3^4(\tau)$, можно получить преобразования для функции $\lambda(\tau)$:

$$\begin{aligned} \lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= 1 - \lambda(\tau), & \lambda\left(-1 - \frac{1}{\tau}\right) &= 1 - \frac{1}{\lambda(\tau)}, & \lambda(\tau + 1) &= \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau) - 1}, \\ \lambda\left(\frac{\tau}{\tau + 1}\right) &= \frac{1}{\lambda(\tau)}, & \lambda\left(\frac{1}{1 - \tau}\right) &= \frac{1}{1 - \lambda(\tau)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть

$$\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

– произвольная матрица из группы $\Gamma(2)$ и ν – произвольный индекс из промежутка $1 \leq \nu \leq \psi(n)$. Тогда по лемме 1 существуют матрицы α_μ и

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \Gamma(2)$$

такие, что

$$\alpha_\nu \beta = \tilde{\beta} \alpha_\mu. \quad (8)$$

Теперь с помощью приведенных выше свойств находим

$$\lambda_\nu \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) = \frac{(\theta_2^4(\tau))_{\alpha_\nu \beta}}{(\theta_3^4(\tau))_{\alpha_\nu \beta}} = \frac{(\theta_2^4(\tau))_{\tilde{\beta} \alpha_\mu}}{(\theta_3^4(\tau))_{\tilde{\beta} \alpha_\mu}} = \frac{((\theta_2^4(\tau))_{\tilde{\beta}})_{\alpha_\mu}}{((\theta_3^4(\tau))_{\tilde{\beta}})_{\alpha_\mu}} = \frac{(\theta_2^4(\tau))_{\alpha_\mu}}{(\theta_3^4(\tau))_{\alpha_\mu}} = \lambda_\mu(\tau). \quad (9)$$

Очевидно, что при одной и той же матрице β различным индексам ν соответствуют в равенстве (8) различные индексы μ . Это доказывает, что группа дробно-линейных преобразований верхней комплексной полуплоскости, соответствующая матрицам из $\Gamma(2)$, переставляет функции λ_ν . Но тогда коэффициенты $a_k(\tau)$ многочлена от переменной X

$$\prod_{i=1}^{\psi(n)} (X - 16\lambda_{\nu_i}(\tau)) = X^{\psi(n)} + a_1(\tau)X^{\psi(n)-1} + \dots + a_{\psi(n)-1}(\tau)X + a_{\psi(n)}(\tau) \quad (10)$$

суть функции, аналитические в верхней комплексной полуплоскости и не меняющиеся под действием группы $\Gamma(2)$.

Из разложения (1) следует, что коэффициенты $a_k(\tau)$ раскладываются в ряды по неотрицательным степеням функции $e^{\pi i \tau / n}$. Учитывая же, что они периодичны с периодом 2, заключаем, что разложения в действительности содержат только степени функции $q = e^{\pi i \tau}$. Коэффициенты этих рядов принадлежат полю $\mathbb{Q}(e^{2\pi i / n})$.

Рассмотрим действие группы Галуа этого поля на коэффициенты рядов $\lambda_\nu(\tau)$. Любой автоморфизм σ поля $\mathbb{Q}(e^{2\pi i / n})$ можно представить как $e^{2\pi i / n} \rightarrow e^{2\pi i k / n}$, где $(k, n) = 1$. Пусть $b_{j,\nu} = b_j e^{\pi i v_\nu / w_\nu}$ – коэффициент с номером j в разложении $\lambda_\nu(\tau)$, где $b_j \in \mathbb{Z}$ – коэффициент с номером j в разложении $\lambda(\tau)$. Тогда $\sigma(b_{j,\nu}) = b_j e^{\pi i 2v_\nu k / w_\nu}$. Поскольку $(k, w_\nu) = (k, n) = 1$, то найдется такое μ , что $v_\nu k \equiv v_\mu \pmod{w_\nu}$. Отсюда получаем, что $\sigma(b_{j,\nu}) = b_{j,\mu}$. То есть любой автоморфизм поля $\mathbb{Q}(e^{2\pi i / n})$ переставляет сомножители в произведении (10), поэтому коэффициенты разложений $a_k(\tau)$ в действительности являются рациональными числами. Учитывая же, что ряд для $\lambda(\tau)$ имеет целые коэффициенты, заключаем, что коэффициенты разложений $a_k(\tau)$ суть целые алгебраические числа, так что $a_k(\tau) \in \mathbb{Z}[[q]]$.

Покажем, что $a_k(\tau)$ модулярны относительно группы $\Gamma(2)$. Для этого осталось проверить, что $a_k(\tau)$ имеют полюса только конечного порядка. Как известно [4; с. 248], фундаментальная область группы $\Gamma(2)$ состоит из точек $\tau \in \mathcal{H}$, удовлетворяющих неравенствам $-1 \leq \operatorname{Re} \tau < 1$, $|2\tau + 1| > 1$, $|2\tau - 1| > 1$, а также точек $-1, 0$ и $i\infty$.

В этой области функция $\lambda(\tau)$ имеет полюс только в точке $\tau = -1$ [5; с. 274]. Таким образом, все полюса лежат на прямой $\text{Im } \tau = 0$. Отсюда получаем, что $\lambda_\nu(\tau)$ может иметь полюса только в точках $\tau = 0, -1, \infty$.

Для исследования поведения функций $\lambda_\nu(\tau)$ в точке 0 введем переменную $\rho = -1/\tau$ и обозначим буквой β соответствующую матрицу:

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из (6) следует равенство

$$\frac{(\theta_2^4(\tau))_\beta}{(\theta_3^4(\tau))_\beta} = \frac{\theta_4^4(\tau)}{\theta_3^4(\tau)} = 1 - \frac{\theta_2^4(\tau)}{\theta_3^4(\tau)}.$$

Пусть ν – целое число из промежутка $1 \leq \nu \leq \psi(n)$. Согласно лемме 1 существует матрица $\gamma \in \Gamma(2)$ и индекс μ из того же промежутка, для которых

$$\beta\alpha_\nu\beta = \gamma\alpha_\mu \quad \text{или} \quad \alpha_\nu\beta = \beta\gamma\alpha_\mu.$$

Проведем вычисления, подобные (9):

$$\begin{aligned} \lambda_\nu(\tau) &= \lambda_\nu\left(-\frac{1}{\rho}\right) = \frac{(\theta_2^4(\rho))_{\alpha_\nu\beta}}{(\theta_3^4(\rho))_{\alpha_\nu\beta}} \\ &= \frac{(\theta_2^4(\rho))_{\beta\gamma\alpha_\mu}}{(\theta_3^4(\rho))_{\beta\gamma\alpha_\mu}} = 1 - \frac{((\theta_2^4(\rho))_\gamma)_{\alpha_\mu}}{((\theta_3^4(\rho))_\gamma)_{\alpha_\mu}} = 1 - \frac{(\theta_2^4(\tau))_{\alpha_\mu}}{(\theta_3^4(\tau))_{\alpha_\mu}} = 1 - \lambda_\mu(\tau). \end{aligned}$$

Это равенство означает, что все функции λ_μ , а вместе с ними и коэффициенты $a_k(\tau)$ ограничены в точке $\tau = 0$.

Для исследования поведения функций $\lambda_\nu(\tau)$ в точке -1 введем переменную $\rho = -\tau/(\tau - 1)$ и обозначим буквой β матрицу соответствующего преобразования от переменной τ к переменной ρ , а именно,

$$\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(2).$$

Отсюда и из (6) следует равенство

$$\frac{(\theta_2^4(\rho))_\beta}{(\theta_3^4(\rho))_\beta} = \frac{(\theta_2^4(\rho))_{\beta^{-1}}}{(\theta_3^4(\rho))_{\beta^{-1}}} = \frac{\theta_3^4(\rho)}{\theta_2^4(\rho)}.$$

Пусть ν – целое число из промежутка $1 \leq \nu \leq \psi(n)$. Согласно лемме 1 существует матрица

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \Gamma(2)$$

и индекс μ из того же промежутка, для которых

$$\beta\alpha_\nu\beta = \tilde{\beta}\alpha_\mu \quad \text{или} \quad \alpha_\nu\beta = \beta^{-1}\tilde{\beta}\alpha_\mu.$$

Теперь подобно (9) находим

$$\lambda_\nu(\tau) = \lambda_\nu\left(\frac{-\rho}{\rho-1}\right) = \frac{(\theta_2^4(\rho))_{\alpha_\nu\beta}}{(\theta_3^4(\rho))_{\alpha_\nu\beta}} = \frac{(\theta_2^4(\rho))_{\beta^{-1}\tilde{\beta}\alpha_\mu}}{(\theta_3^4(\rho))_{\beta^{-1}\tilde{\beta}\alpha_\mu}} = \frac{(\theta_3^4(\rho))_{\tilde{\beta}\alpha_\mu}}{(\theta_2^4(\rho))_{\tilde{\beta}\alpha_\mu}} = \frac{(\theta_3^4(\rho))_{\alpha_\mu}}{(\theta_2^4(\rho))_{\alpha_\mu}} = \lambda_\mu^{-1}(\rho). \quad (11)$$

Получаем, что функции $\lambda_\nu(\tau)$ в некоторой окрестности точки $\tau = -1$ в фундаментальной области могут быть представлены степенными рядами от $q_\rho = e^{\pi i \rho/n}$. При этом разложение $\lambda_\nu(\tau)$ начинается со степени $-u_\mu^2$. Но тогда и $a_k(\tau)$ раскладываются в ряды по степеням q_ρ , причем отрицательных степеней в этих разложениях будет лишь конечное количество.

Доказанные факты означают, что $a_k(\tau)$ при любом k есть модулярная функция относительно группы $\Gamma(2)$. В частности, разложение $a_k(\tau)$ по степеням q_ρ будет содержать только степени кратные n , т.е. будет рядом по степеням функции $e^{\pi i \rho}$. Справедливо разложение

$$\lambda(\tau) = \lambda\left(\frac{-\rho}{\rho-1}\right) = \frac{1}{\lambda(\rho)} = \frac{1}{16} q_\rho^{-n} (1 + 8q_\rho^n + \dots). \quad (12)$$

Учитывая, что все полюса функции $a_k(\tau)$, так же как и функции $\lambda(\tau)$, в фундаментальной области исчерпываются единственной точкой $\tau = -1$, заключаем, что для некоторого многочлена $R_k \in \mathbb{C}[y]$ модулярная относительно $\Gamma(2)$ функция $a_k(\tau) - R_k(16\lambda(\tau))$ не имеет полюсов в фундаментальной области и, более того, обращается в нуль в точке $\tau = -1$. Это означает, что $a_k(\tau) = R_k(16\lambda(\tau))$.

Из равенств (11) следует, что коэффициенты разложений $16\lambda_\nu$, а значит, и $a_k(\tau)$ по степеням q_ρ суть целые алгебраические числа из поля $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$. Из (12) следует, что все коэффициенты разложения функции $16\lambda(\tau)$ суть целые числа, а старший коэффициент равен 1. Поэтому все коэффициенты многочлена $R_k(Y)$ лежат в кольце $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$. Теперь, пользуясь тем, что $a_k(\tau)$ и $\lambda(\tau)$ раскладываются в ряды по степеням $q = e^{\pi i \tau}$ с коэффициентами из $\mathbb{Q}$, заключаем, что $R_k(Y) \in \mathbb{Q}[Y]$. Но тогда $R_k(Y) \in \mathbb{Z}[Y]$.

По доказанному многочлен

$$P_n(X, Y) = X^{\psi(n)} + R_1(Y)X^{\psi(n)-1} + \dots + R_{\psi(n)-1}(Y)X + R_{\psi(n)}(Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]$$

удовлетворяет условию (4). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $P_n(X, Y)$ — многочлен из теоремы 1, то выполняется тождество

$$P_n(X, 16\lambda(\tau)) = \prod_{\nu=1}^{\psi(n)} (X - 16\lambda_\nu(\tau)).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Многочлен $P_n(X, 16\lambda)$ неприводим над полем $\mathbb{C}(\lambda)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Имеет место равенство

$$P_n(X, 16\lambda) = P_n(16\lambda, X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 1 выполнено $P_n(16\lambda(\tau/n), 16\lambda(\tau)) = 0$ и, следовательно, $P_n(16\lambda(\tau), 16\lambda(n\tau)) = 0$. В таком случае $16\lambda(n\tau)$ является корнем многочлена $P_n(16\lambda(\tau), X)$ и также является корнем многочлена $P_n(X, 16\lambda(\tau))$.

Поскольку это верно для всех τ и многочлен $P_n(X, 16\lambda)$ неприводим, то $P_n(X, 16\lambda)$ делит $P_n(16\lambda, X)$, т.е.

$$P_n(16\lambda, X) = g(X, 16\lambda)P_n(X, 16\lambda).$$

Далее,

$$P_n(16\lambda, X) = g(X, 16\lambda)g(16\lambda, X)P_n(16\lambda, X),$$

тогда

$$g(X, 16\lambda)g(16\lambda, X) = 1,$$

откуда $g(X, 16\lambda) = \pm 1$. Если предположим, что $g(X, 16\lambda) = -1$, то получим

$$P_n(16\lambda, 16\lambda) = -P_n(16\lambda, 16\lambda),$$

и тогда функция 16λ должна являться корнем $P_n(X, 16\lambda)$. Но многочлен $P_n(X, 16\lambda)$ неприводим и, стало быть, это невозможно. Тогда $g(X, 16\lambda) = 1$, и получаем утверждение следствия.

3. Оценка коэффициентов

3.1. Подготовительные леммы.

ТЕОРЕМА 2. *Для каждого нечетного $n > 2$ выполняется асимптотическая формула*

$$h(P_n) = \psi(n) \log n - 2\psi(n)\kappa(n) + O(\psi(n)).$$

Доказательству теоремы 2 посвящены пп. 3.1–3.3.

Для любого комплексного числа y обозначим $P_{n,y} = P_{n,y}(x)$ как полином $P_n(x, y)$, рассматриваемый только по первой переменной.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Для каждого нечетного $n > 2$ и любого действительного числа y , удовлетворяющего оценке $4 \leq y \leq 8$, выполнено*

$$h(P_{n,y}) = \psi(n) \log n - 2\psi(n)\kappa(n) + O(\psi(n)).$$

Перед тем как перейти к доказательству этого утверждения, докажем две леммы.

ЛЕММА 2. *Для любого нечетного $n > 2$ и любого комплексного числа z с положительной мнимой частью имеем*

$$h(P_{n,y}) = \sum_{w|n} S_w + O(\psi(n)),$$

где $y = 16\lambda(z)$ и

$$S_w = \sum_{\substack{v=0 \\ (u,v,w)=1}}^{w-1} \log \max \left(1, \left| 16\lambda \left(\frac{uz + 2v}{w} \right) \right| \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что для любых комплексных чисел $z_1, \dots, z_m$ высота $e^{h(P)}$ многочлена

$$P = (x - z_1) \cdots (x - z_m),$$

находится между $2^{-m}M$ и 2^mM , где $M = \prod_{i=1}^m \max(1, |z_i|)$. Поскольку корни этого многочлена $z_i = 16\lambda_i(\tau)$, где $16\lambda(\tau) = y$, применяя это утверждение к многочлену $P_{n,y}$, получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 3. Для действительных чисел ξ, η с условием $\eta \geq 1/2$ и числа $z = \xi + i\eta$ имеем

$$\begin{aligned} \log \max(1, |16\lambda(z)|) &= O(1), & \log \max(1, |1 - 16\lambda(z)|) &= O(1), \\ \log \max\left(1, \left| \frac{16}{1 - \lambda(z)} \right| \right) &= O(1), & \log \max\left(1, \left| 1 - \frac{16}{1 - \lambda(z)} \right| \right) &= O(1), \\ \log \max\left(1, \left| \frac{16}{\lambda(z)} \right| \right) &= \pi\eta + O(1), & \log \max\left(1, \left| 1 - \frac{16}{\lambda(z)} \right| \right) &= \pi\eta + O(1). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция λ периодична с периодом 2, поэтому можно считать, что $-1 \leq \xi \leq 1$. Таким образом, рассматриваемая область $\mathcal{H}$ целиком находится внутри фундаментальной области для группы преобразований $\Gamma(2)$. Поведение функции λ в этой области хорошо известно, [5; с. 274]. При $\eta \rightarrow \infty$, $\lambda(z) \rightarrow 0$ единственный полюс находится в точке $z = -1$, поэтому функция $\lambda(z)$ ограничена на рассматриваемой области и, значит, выполнено первое равенство. Аналогичные рассуждения верны и для $1/(1 - \lambda(z))$. Единственный полюс этой функции находится в точке $z = 0$, которая также не входит в рассматриваемую область, поэтому данная функция также ограничена. Для функции $\lambda^{-1}(z)$ доказательство несколько сложнее. При $\eta \rightarrow \infty$ имеем $|e^{\pi iz} \lambda^{-1}(z)| \rightarrow 1/16$. Следовательно, существует такое $\eta_0 \geq 1/2$, что для любого $\eta > \eta_0$ выполнено $1/32 \leq |e^{\pi iz} \lambda^{-1}(z)| \leq 1/8$. Прологифицировав неравенства, получаем утверждение леммы для $\eta > \eta_0$. Рассмотрим множество $1/2 \leq \eta \leq \eta_0$, $-1 \leq \xi \leq 1$. На нем функция $\log \max(1, |16\lambda^{-1}(z)|) - \pi\eta$ непрерывна, а значит, ограничена на нем.

Три другие равенства доказываются аналогично. Лемма 3 доказана.

Перейдем к доказательству утверждения 1 (этому доказательству посвящена оставшаяся часть этого пункта и весь следующий пункт). Зафиксируем действительное y на отрезке $4 \leq y \leq 8 = 16\lambda(i)$. Функция $\lambda(i\eta)$ монотонно убывает при возрастании η . Поэтому существует единственное $\eta \geq 1$ такое, что $y = 16\lambda(i\eta)$, и из определения y имеем $\eta \in [\lambda^{-1}(1/2)/i, \lambda^{-1}(1/4)/i]$, т.е. $\eta = O(1)$. По лемме 2 получаем

$$h(P_{n,y}) = \sum_{w|n} S_w + O(\psi(n)).$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $w < (n\eta)^{1/2}$. В этом случае применима лемма 3, поскольку $(ui\eta + 2v)/w$ имеет мнимую часть

$$\frac{u\eta}{w} = \frac{n\eta}{w^2} > 1.$$

Отсюда получаем, что

$$\log \max\left(1, \left| 16\lambda\left(\frac{ui\eta + 2v}{w}\right) \right| \right) = O(1).$$

Учитывая (5) и суммируя по v , находим $S_w = O(w)$.

Случай 2: $w \geq (n\eta)^{1/2}$. Теперь мнимая часть $z(v) = (ui\eta + 2v)/w$ может быть меньше $1/2$. Для того чтобы применять лемму 3, необходимо найти точку, эквивалентную $z(v)$ относительно модулярного преобразования. Обозначим

$$N = [w(n\eta)^{-1/2}] \geq 1 \quad \text{и} \quad I_N = \left[\frac{1}{N+1}, 2 + \frac{1}{N+1} \right).$$

Поскольку $2v/w < 2$ и функция λ периодична с периодом 2, то

$$S_w = \sum_{\substack{v, 2v/w \in [0, 2) \\ (u, v, w) = 1}} \log \max \left(1, \left| \lambda \left(\frac{ui\eta + 2v}{w} \right) \right| \right) = \sum_{\substack{v, 2v/w \in I_N \\ (u, v, w) = 1}} \log \max \left(1, \left| \lambda \left(\frac{ui\eta + 2v}{w} \right) \right| \right).$$

ЛЕММА 4. Можно представить полуинтервал I_N в виде

$$I_N = \bigcup_{k=1}^N \bigcup_{\substack{h=1 \\ (h, k)=1}}^{2k} I_N \left(\frac{h}{k} \right),$$

где $I_N(h/k)$ непересекающиеся полуинтервалы $[\rho_1, \rho_2)$, содержащие h/k , и выполнено

$$\frac{1}{2Nk} \leq \frac{h}{k} - \rho_1 \leq \frac{1}{(N+1)k}, \quad \frac{1}{2Nk} \leq \rho_2 - \frac{h}{k} \leq \frac{1}{(N+1)k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ряды Фарея порядка N : имеем дроби

$$0 = f_0 < f_1 < \dots < f_K = 1.$$

Добавим к ним дроби из отрезка $[1, 2]$:

$$1 = f_K < f_1 + 1 = f_{K+1} < \dots < f_K + 1 = f_{2K}$$

и медианты μ_i , удовлетворяющие $f_{i-1} < \mu_i < f_i$, $1 \leq i \leq 2K$. Если $h = 2$, $k = 1$, положим

$$I_N \left(\frac{h}{k} \right) = \left[2 - \frac{1}{N+1}, 2 + \frac{1}{N+1} \right).$$

В остальных случаях имеем $h/k = f_i$ для некоторого i . Определим

$$I_N \left(\frac{h}{k} \right) = [\mu_i, \mu_{i+1}).$$

Утверждение леммы следует из свойств рядов Фарея.

Таким образом, получаем представление

$$S_w = \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{h=1 \\ (h, k)=1}}^{2k} \sum_{\substack{2v/w \in I_N(h/k) \\ (u, v, w)=1}} \log \max(1, |\lambda(z(v))|).$$

Для чисел h, k найдем числа r, s такие, что $rk - sh = 1$, и положим модулярное преобразование

$$\Lambda = \begin{pmatrix} s & -r \\ k & -h \end{pmatrix}.$$

Прямые вычисления дают

$$\operatorname{Im}(\Lambda(z(v))) = \frac{\operatorname{Im}(z(v))}{|kz(v) - h|^2} = \frac{u\eta/w}{|(2v/w)k - h + (ku\eta/w)i|^2} = \frac{n\eta w^{-2}k^{-2}}{(n\eta w^{-2})^2 + (2v/w - h/k)^2}.$$

Из леммы 4 получаем, что для $2v/w \in I_N(h/k)$ выполнено

$$\left| \frac{2v}{w} - \frac{h}{k} \right| \leq \frac{1}{(N+1)k} \leq (n\eta)^{1/2} w^{-1} k^{-1},$$

и поскольку $k \leq N \leq (n\eta)^{-1/2} w$, также выполнено

$$\frac{n\eta}{w^2} \leq (n\eta)^{1/2} w^{-1} k^{-1}.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{Im}(\Lambda(z(v))) \geq 1/2$.

Фактор-группа преобразований $\Gamma/\Gamma(2)$ хорошо известна [4; с. 248]. Она состоит из шести классов:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & E &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & F &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда и из преобразований (7) получаем равенства

$$\begin{aligned} \lambda(z(v)) &= \lambda(\Lambda(z(v))), & \text{если } \Lambda &\equiv A \pmod{2}, \\ \lambda(z(v)) &= (1 - \lambda)(\Lambda(z(v))), & \text{если } \Lambda &\equiv B \pmod{2}, \\ \lambda(z(v)) &= \frac{\lambda}{\lambda - 1}(\Lambda(z(v))), & \text{если } \Lambda &\equiv C \pmod{2}, \\ \lambda(z(v)) &= \frac{1}{\lambda}(\Lambda(z(v))), & \text{если } \Lambda &\equiv D \pmod{2}, \\ \lambda(z(v)) &= \frac{1}{1 - \lambda}(\Lambda(z(v))), & \text{если } \Lambda &\equiv E \pmod{2}, \\ \lambda(z(v)) &= \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)(\Lambda(z(v))), & \text{если } \Lambda &\equiv F \pmod{2}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3, получаем

$$\begin{aligned} &\log \max(1, |16\lambda(z(v))|) \\ &= \begin{cases} \pi \frac{n\eta w^{-2}k^{-2}}{(n\eta w^{-2})^2 + (2v/w - h/k)^2} + O(1), & \text{если } h \equiv k \equiv 1 \pmod{2}, \\ O(1) & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку $I_N \in [0, 3)$, выполнено

$$\sum_{k=1}^N \sum_{\substack{h=1 \\ (h,k)=1}}^{2k} \sum_{\substack{2v/w \in I_N(h/k) \\ (u,v,w)=1}} 1 \leq \sum_{\substack{v \\ 2v/w \in [0,3)}} 1 \leq 3w.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S_w &= S'_w + O(w) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1 \pmod{2}}}^N \sum_{\substack{h=1 \\ (h,k)=1 \\ h \equiv 1 \pmod{2}}}^{2k} \sum_{\substack{2v/w \in I_N(h/k) \\ (u,v,w)=1}} \pi \frac{n\eta w^{-2} k^{-2}}{(n\eta w^{-2})^2 + (2v/w - h/k)^2} + O(w) \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1 \pmod{2}}}^N \sum_{\substack{h=1 \\ (h,k)=1 \\ h \equiv 1 \pmod{2}}}^k \sum_{\substack{v/w \in I_N(h/k) \\ (u,v,w)=1}} \pi \frac{n\eta w^{-2} k^{-2}}{(n\eta w^{-2})^2 + (v/w - h/k)^2} + O(w). \end{aligned}$$

3.2. Леммы суммирования. Будем в дальнейшем обозначать

$$g_{h,k}(x) = \pi \frac{n\eta w^{-2} k^{-2}}{(n\eta w^{-2})^2 + (x - h/k)^2}.$$

ЛЕММА 5. Для действительных $\rho_1 < \rho_2$ обозначим $I = [\rho_1, \rho_2)$, и пусть $g = g(x)$ непрерывная положительная функция такая, что интеграл

$$L_I(g) = \int_{-\infty}^{\rho_1} g(x) dx + \int_{\rho_2}^{\infty} g(x) dx < \infty.$$

Пусть g возрастает для $x < \rho_1$ и убывает для $x \geq \rho_2$. Обозначим

$$M_I(g) = g(\rho_1) + g(\rho_2).$$

Тогда для натуральных w , e выполняется

$$\sum_{\substack{v/w \in I \\ (v,e)=1}} g\left(\frac{v}{w}\right) = \sum_{f|e} \mu(f) \sum_{c=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{cf}{w}\right) + O(we^{-1}\sigma(e)L_I(g)) + O(\tau(e)M_I(g)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. доказательство леммы 4 [2].

Напомним, что ранее было введено обозначение $e = (u, w)$.

ЛЕММА 6. Для натуральных h , k , удовлетворяющих $h \leq k \leq N$, $(h, k) = 1$, выполнено

$$\sum_{\substack{v/w \in I_N(h/k) \\ (v,e)=1}} g_{h,k}\left(\frac{v}{w}\right) = k^{-2} \sum_{f|e} \mu(f) F_f\left(\frac{wh}{fk}\right) + O(n^{1/2}\sigma(e)e^{-1}k^{-1}),$$

где

$$F_f(\theta) = \pi^2 w f^{-1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|\nu|n\eta/(wf)} e^{2\pi i \nu \theta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим предыдущую лемму, положив $g = g_{h,k}(x)$ и $I = I_N(h/k)$. Для оценки $L_I(g)$ и $M_I(g)$ воспользуемся тем, что

$$g(x) \leq \pi n \eta w^{-2} k^{-2} \left(x - \frac{h}{k}\right)^2.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\int_{-\infty}^{\rho_1} g(x) dx \leq \pi n \eta w^{-2} k^{-2} \left(\frac{h}{k} - \rho_1 \right)^{-1},$$

правая часть которого по лемме 4 не превышает

$$\pi n \eta w^{-2} k^{-2} 2Nk \leq 2\pi(n\eta)^{1/2} w^{-2} k^{-1}.$$

Аналогично оценивается интеграл $\int_{\rho_2}^{\infty} g(x) dx$, и поэтому $L_I(g) = O(n^{1/2} w^{-1} k^{-1})$. Также

$$g(\rho_1) \leq \pi n \eta w^{-2} k^{-2} \left(\frac{h}{k} - \rho_1 \right)^{-2} \leq \pi n \eta w^{-2} k^{-2} 4N^2 k^2 \leq 4\pi,$$

и аналогично $g(\rho_2) \leq 4\pi$, поэтому $M_I(g) = O(1)$.

Поскольку $k \leq N \leq w n^{-1/2}$ и $e \leq n/w$,

$$\tau(e) \leq \sigma(e) \leq n\sigma(e)/(ew) \leq \sigma(e)n^{1/2}e^{-1}k^{-1}.$$

Поэтому из леммы 5 следует равенство

$$\sum_{\substack{v/w \in I_N(h/k) \\ (v,e)=1}} g\left(\frac{v}{w}\right) = \sum_{f|e} \mu(f) \sum_{c=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{cf}{w}\right) + O(\sigma(e)n^{1/2}e^{-1}k^{-1}).$$

Сделаем замену $\theta = wh/(fk)$, $t = n\eta/(wf) > 0$ в формуле

$$\sum_{c=-\infty}^{\infty} (t^2 + (c - \theta)^2)^{-1} = \pi t^{-1} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|\nu|t} e^{2\pi i \nu \theta}, \quad t > 0,$$

находим

$$\sum_{c=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{cf}{w}\right) = k^{-2} F_f\left(\frac{wh}{fk}\right),$$

что заканчивает доказательство леммы.

ЛЕММА 7. Пусть $F = F(\theta) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} e^{2\pi i \nu \theta}$ – ряд Фурье со свойством $a_{\nu} = a_{-\nu}$, и пусть для любого $m \geq 1$ выполнено

$$T_m(F) = |a_0| + m^{-1} \sigma(m) \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{\infty} |\nu|^{-1} \sigma(|\nu|) |a_{\nu}| < \infty,$$

тогда для любого $N \geq 1$ выполнено

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1(2)}}^N \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv 1(2) \\ (h,k)=1}}^k k^{-2} F\left(\frac{mh}{k}\right) = 2\pi^{-2} a_0 \log N + O(T_m(F)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемую сумму можно заменить на

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} C_N(m\nu),$$

где

$$C_N(l) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1 \pmod{2}}}^N k^{-2} c_k(l), \quad c_k(l) = \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv 1 \pmod{2} \\ (h,k)=1}}^k e^{2\pi i l h/k}.$$

Поскольку $c_k(0) = \phi(k)/2$, член при $\nu = 0$ дает

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1 \pmod{2}}}^N k^{-2} \frac{\phi(k)}{2}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Имеет место оценка*

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1 \pmod{2}}}^N k^{-2} \phi(k) = 4\pi^{-2} \log N + O(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1 \pmod{2}}}^N k^{-2} \phi(k) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1 \pmod{2}}}^N \sum_{d|k} d^{-1} \mu(d) \\ &= \sum_{\substack{d=1 \\ d \equiv 1 \pmod{2}}}^N d^{-1} \mu(d) \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1 \pmod{2} \\ d|k}}^N k^{-1} = \sum_{\substack{d=1 \\ d \equiv 1 \pmod{2}}}^N d^{-2} \mu(d) \sum_{\substack{r=1 \\ r \equiv 1 \pmod{2}}}^{[N/d]} r^{-1}. \end{aligned}$$

Внутренняя сумма оценивается

$$\sum_{r=1}^{[N/d]} r^{-1} = \frac{\log N - \log d}{2} + O(1).$$

Оценим внешнюю сумму. Имеем

$$\sum_{\substack{d=1 \\ d \equiv 1 \pmod{2}}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \prod_{p \neq 2} \sum_{k=0}^{\infty} \mu(p^k) p^{-2k} = \prod_{p \neq 2} (1 - p^{-2}) = \frac{\prod_p (1 - p^{-2})}{1 - 2^{-2}} = \frac{4}{3} \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{8}{\pi^2}.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{\substack{d=1 \\ d \equiv 1 \pmod{2}}}^N \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{8}{\pi^2} - \sum_{\substack{d=N+1 \\ d \equiv 1 \pmod{2}}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}.$$

Оценим последнюю сумму:

$$\left| \sum_{\substack{d=N+1 \\ d \equiv 1 (2)}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| \leq \sum_{d=N+1}^{\infty} \frac{1}{d^2} \leq \sum_{d=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{d-1} - \frac{1}{d} \right) = O(N^{-1}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1 (2)}}^N k^{-2} \phi(k) &= \sum_{\substack{d=1 \\ d \equiv 1 (2)}}^N d^{-2} \mu(d) \left(\frac{\log N - \log d}{2} + O(1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \log N \sum_{\substack{d=1 \\ d \equiv 1 (2)}}^N d^{-2} \mu(d) + O(1) = \frac{4}{\pi^2} \log N + O(1). \end{aligned}$$

Утверждение 2 доказано.

Вернемся к доказательству леммы 7. Отсюда имеем, что

$$C_N(0) = 2\pi^{-2} a_0 \log N + O(1).$$

Для оценки других членов суммы рассмотрим

$$\begin{aligned} C_N(l) + C_N(-l) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1 (2)}}^N k^{-2} (c_k(l) + c_k(-l)), \\ c_k(l) + c_k(-l) &= \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv 1 (2) \\ (h,k)=1}}^k e^{2\pi i l h/k} + e^{-2\pi i l h/k} = \sum_{\substack{h=1 \\ (h,k)=1}}^k e^{2\pi i l h/k}. \end{aligned}$$

Точное значение последней суммы хорошо известно (см. [6; теорема 272, с. 238]): $\mu(k') \phi(k) / \phi(k')$, где $k' = k/(k, l)$. Отсюда следует, что $|c_k(l) + c_k(-l)| \leq (k, l)$ и

$$|C_N(l) + C_N(-l)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} (k, l) \leq \sum_{d|l} d \sum_{m=1}^{\infty} (md^{-2}) = O\left(\frac{\sigma(|l|)}{|l|}\right).$$

Наконец, поскольку $\sigma(m|\nu|) \leq \sigma(m)\sigma(|\nu|)$ и $a_\nu = a_{-\nu}$, получаем, что

$$\sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{\infty} a_\nu C_N(m\nu) = O(T_m(F)).$$

Отсюда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 8. *Выполняется равенство*

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1 (2)}}^N \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv 1 (2) \\ (h,k)=1}}^k k^{-2} F_f \left(\frac{wh}{fk} \right) = wf^{-1} \log \left(\frac{w^2}{n} \right) + O\left(\frac{w}{f}\right) + O\left(\sigma\left(\frac{w}{f}\right) e^{-2\pi n/wf}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся предыдущей леммой с $F = F_f(\theta)$ и $m = w/f$, чтобы получить искомую сумму

$$2wf^{-1} \log N + O(T_m(F)).$$

В данном случае

$$T_m(F) = \frac{\pi^2 w}{f} + \pi^2 \sigma\left(\frac{w}{f}\right) \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{\infty} |\nu|^{-1} \sigma(|\nu|) X^{|\nu|},$$

где $X = e^{-2\pi n\eta/wf}$. Поскольку $f \mid e$ и $e \mid (n/w)$, выполнено $wf \leq n$, и поэтому

$$X \leq e^{-2\pi\eta} \leq e^{-2\pi}.$$

Обозначая

$$T = \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{\infty} |\nu|^{-1} \sigma(|\nu|) e^{-2\pi(|\nu|-1)},$$

получаем

$$T_m(F) \leq \frac{\pi^2 w}{f} + \pi^2 \sigma\left(\frac{d}{f}\right) TX,$$

следовательно,

$$T_m(F) = O\left(\frac{w}{f}\right) + O\left(\sigma\left(\frac{w}{f}\right) e^{-2\pi n/wf}\right).$$

И поскольку

$$\log N = \log(w(n\eta)^{-1/2}) + O(1) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{w^2}{n}\right) + O(1),$$

получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 9. *Выполняется равенство*

$$S'_w = we^{-1} \phi(e) \log\left(\frac{w^2}{n}\right) + O\left(\sigma\left(\frac{w}{e}\right)\right) + O\left(\frac{w\sigma(e)}{e}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим

$$E_1 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1(2)}}^N \frac{\phi(k)}{k} \leq \frac{N}{2} \leq \frac{d\eta^{-1/2}}{2},$$

$$E_2 = \sum_{f|e} \sigma\left(\frac{w}{f}\right) e^{-2\pi n/wf} = \sum_{f|e} \sigma\left(\frac{wf}{e}\right) e^{-2\pi nf/we}.$$

Учитывая $\sigma(wf/e) \leq \sigma(f)\sigma(w/e)$, получаем, что

$$E_2 \leq \sigma\left(\frac{w}{e}\right) \sum_{f=1}^{\infty} \sigma(f) X^f,$$

где $X = e^{-2\pi n/we} \leq e^{-2\pi}$. Следовательно,

$$E_2 = O\left(\sigma\left(\frac{w}{e}\right)\right).$$

По определению S'_w есть

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1(2)}}^N \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv 1(2)}}^k \sum_{\substack{v/w \in I_N(h/k) \\ (u,v,w)=1}} \pi \frac{n\eta w^{-2} k^{-2}}{(n\eta w^{-2})^2 + (v/w - h/k)^2}.$$

Применив лемму 6 и оценку для E_1 , получаем

$$\sum_{f|e} \mu(f) \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1(2)}}^N \sum_{\substack{h=1 \\ h \equiv 1(2)}}^k k^{-2} F_f\left(\frac{wh}{fk}\right) + O\left(\frac{d\sigma(e)}{e}\right).$$

Наконец, используя лемму 8 и оценку для E_2 , получаем утверждение леммы.

Для окончания доказательства утверждения 1 необходимы еще несколько оценок. Воспользуемся равенством $\psi(n) = \sum_{w|n} w\phi(e)/e$ [4; с. 53]. Отсюда получаем, что

$$\sigma(n) \leq \sum_{w|n} \frac{w\sigma(e)}{e} = O(\psi(n)) \quad \text{и} \quad \sum_{w|n} \sigma\left(\frac{w}{e}\right) = O(\psi(n)).$$

Из этих оценок и доказанных лемм следует, что

$$h(P_{n,y}) = \sum_{\substack{w|n \\ w \geq (n\eta)^{1/2}}} we^{-1} \phi(e) \log\left(\frac{w^2}{n}\right) + O(\psi(n)).$$

Поскольку можно оценить $\tau(n) = O(n^{1/4})$, получаем равенство

$$h(P_{n,y}) = \sum_{w|n} we^{-1} \phi(e) \log\left(\frac{w^2}{n}\right) + O(\psi(n)).$$

ЛЕММА 10. *Выполняется*

$$\sum_{w|n} we^{-1} \phi(e) \log\left(\frac{n}{w}\right) = \psi(n)(\kappa(n) + O(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. доказательство леммы A1 [2].

ЛЕММА 11. *Выполняется*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \kappa(n) / \log \log n = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. доказательство леммы A3 [2].

Запишем $w^2/n = n(n/w)^{-2}$ и воспользуемся леммой 10. Получим

$$h(P_{n,y}) = \psi(n) \log(n) - 2\psi(n)\kappa(n) + O(\psi(n)).$$

Утверждение 1 доказано.

3.3. Окончание доказательства теоремы. Завершим доказательство теоремы 2, используя простой интерполяционный результат.

ЛЕММА 12. *Существует абсолютная константа $c > 0$ такая, что выполнено*

$$|h(P) - \log \sup_{4 \leq y \leq 8} |P(y)| \leq cD$$

для всех целых $D \geq 1$ и всех отличных от нуля многочленов $P(y)$ с комплексными коэффициентами и степени не выше D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\|P\| = \sup_{4 \leq y \leq 8} |P(y)|.$$

Оценим

$$\|P\| \leq (D+1)8^D e^{h(P)},$$

следовательно,

$$\log \|P\| - h(P) \leq \log((D+1)8^D).$$

Для противоположного неравенства воспользуемся интерполяционной формулой Лагранжа

$$P(y) = \sum_{d=0}^D P(y_d) \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq d}}^D \frac{y - y_r}{y_d - y_r},$$

где

$$y_d = 4 \left(1 + \frac{d}{D} \right), \quad 0 \leq d \leq D.$$

Абсолютные величины коэффициентов многочлена $\prod_{\substack{r=0 \\ r \neq d}}^D (y - y_r)$ не превосходят

$$2^D \cdot 4^D \left(\frac{D+1}{D} \right) \cdots \left(\frac{2D}{D} \right) = 2^D \cdot 4^D \cdot \frac{(2D)!}{D^D \cdot D!}$$

и поэтому

$$\left| \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq d}}^D (y_d - y_r) \right| = 4^D \left(\frac{d}{D} \right) \cdots \left(\frac{1}{D} \right) \left(\frac{1}{D} \right) \cdots \left(\frac{D-d}{D} \right) = 4^D d! \frac{(D-d)!}{D^D}.$$

Отсюда получаем, что максимум модулей не превосходит

$$\left(\|P\| 2^D \frac{(2D)!}{(D!)^2} \right) \sum_{d=0}^D \binom{d}{D} \leq 2^{4D} \|P\|.$$

Или, другими словами,

$$h(P) - \log \|P\| \leq 4 \log 2 \cdot D.$$

Лемма 12 доказана.

Доопределим высоту нулевого многочлена как $-\infty$. Вернемся к многочлену P_n .

$$P_n(x, y) = x^{\psi(n)} + R_1(y)x^{\psi(n)-1} + \dots + R_{\psi(n)}(y),$$

где $R_d(y)$ – многочлены только от переменной y . Очевидно, что

$$h(P_n) = \max_{1 \leq d \leq \psi(n)} h(R_d).$$

Так как степень любого $R_d(y)$ не превосходит $\psi(n)$, применив лемму 12, получаем

$$h(P_n) = \max_{1 \leq d \leq \psi(n)} \log \sup_{4 \leq y \leq 8} |R_d(y)|.$$

Но

$$\max_{1 \leq d \leq \psi(n)} \log \sup_{4 \leq y \leq 8} |R_d(y)| = \sup_{4 \leq y \leq 8} \log \max_{1 \leq d \leq \psi(n)} |R_d(y)|.$$

По определению высота многочлена $P_{n,y}$

$$h(P_{n,y}) = \log \max_{1 \leq d \leq \psi(n)} |R_d(y)|.$$

С другой стороны оценка этой величины не зависит от y . Отсюда получаем утверждение теоремы.

В заключение вводной части хотелось бы выразить глубокую благодарность профессору Ю. В. Нестеренко за ценные комментарии и предложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Mahler, “On the coefficients of transformation polynomials for the modular function”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **10** (1974), 197–218.
- [2] P. Cohen, “On the coefficients of the transformation polynomials for the elliptic modular function”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **95**:3 (1984), 389–402.
- [3] P. Grinspan, “A measure of simultaneous approximation for quasi-modular functions”, *Ramanujan J.*, **5**:1 (2001), 21–45.
- [4] С. Ленг, *Эллиптические функции*, Наука, М., 1984.
- [5] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Физико-математическая библиотека инженера, Гостехиздат, М.–Л., 1948.
- [6] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1979.

В. Д. Мироков

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

20.12.2007

Исправленный вариант

24.11.2008