Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Уразаева, В. Е. Федоров, О корректности задачи
прогноз-управления для некоторых систем уравнений,
Матем. заметки, 2009, том 85, выпуск 3, 440–450

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4345>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:01:07

О корректности задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений

А. В. Уразаева, В. Е. Федоров

Рассматривается обратная задача для уравнений соболевского типа и их приложений к линеаризованным системам Навье–Стокса и системам фазового поля. Получены условия корректной разрешимости для этих систем.

Библиография: 19 названий.

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ – банаховы пространства, $L: \mathcal{U} \rightarrow F$ – линейный непрерывный оператор ($L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$), $\ker L \neq \{0\}$, оператор $M: \operatorname{dom} M \rightarrow \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathcal{U}$ ($M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$), $f: [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$, $q \in \mathcal{F}$, функция $\mu: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию. Рассмотрим задачу нахождения пары $(u(\cdot), q)$ из соотношений

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + qf(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$Pu(0) = u_0 \in \operatorname{dom} M_1, \quad (2)$$

$$\int_0^T u(t) d\mu(t) = u_T \in \operatorname{dom} M. \quad (3)$$

Она относится к классу так называемых обратных задач или задач для дифференциальных уравнений с неопределенными коэффициентами, которые возникают во многих областях науки при попытке описать внутренние характеристики среды, в которой протекают некоторые процессы, по результатам наблюдений над этими процессами в доступной для измерений области [1], [2]. Задачу (1)–(3) можно отнести к подклассу задач прогноз-управления [3], подразумевающих нахождение такого управляющего воздействия q на систему, чтобы на заданном промежутке времени состояние системы удовлетворяло, вообще говоря, нелокальному по времени требованию (3), которое можно считать условием наблюдения. Поскольку в условии (3) содержится интеграл Стильтеса, частным его случаем является, например, условие финального наблюдения $u(T) = u_T$, которое означает требование приведения управляемой системы в состояние u_T в момент времени T .

В последнее время активно развивается теория обратных задач для различных неклассических уравнений математической физики [4], [5]. Уравнение (1), в частности, есть абстрактная форма уравнений или систем уравнений в частных производных, не разрешенных относительно производной по времени, и поэтому тоже является неклассическим.

Задача (1)–(3) исследовалась в [6] в случаях существования аналитической полугруппы и аналитической в плоскости группы (см. [7]–[10]) однородного уравнения (1). В случае существования сильно непрерывной полугруппы этого уравнения задача (1)–(3) рассмотрена в [11]. В этих работах получены условия корректности задачи. Оператор P в условии (2) является единицей соответствующей полугруппы или группы, а M_1 – сужение оператора M на образ проектора P . Там же показано, что использование вместо условия (2) классического условия Коши $u(0) = u_0 \in \text{dom } M$ в задаче (1)–(3) приводит к тому, что данные u_0 и u_T не могут быть взяты произвольными, а должны быть согласованы между собой.

Полученные абстрактные результаты в [6] использованы при исследовании обратных задач для класса уравнений в частных производных с дифференциальными по пространственным переменным операторами L , M , включающего в себя многие уравнения теории фильтрации, например, уравнение фильтрации жидкости в трещиноватой среде [12], уравнение эволюции свободной поверхности фильтрующейся жидкости [13]. (См. по этому поводу [14].)

К уравнению вида (1) редуцируются также многие системы уравнений в частных производных, в которых не присутствуют некоторые из производных по времени от неизвестных функций. Такие системы с финальным наблюдением и с интегральным наблюдением (3), использующим абсолютно непрерывную функцию μ , исследовались, например, в работах [15], [16]. В работе [11] исследована обратная задача для имеющей такой вид линеаризованной системы уравнений фазового поля, описывающей в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода [17]. При этом на параметры системы накладываются условия, по сути исключающие возможность существования M -присоединенных векторов оператора L [7]–[10].

Данная работа посвящена исследованию задачи прогноз-наблюдения для некоторых систем уравнений в частных производных, не разрешенных относительно производной по времени, в рамках абстрактной задачи (1)–(3). А именно, рассмотрены обратные задачи для линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса с более общим, чем в [15], [16], условием переопределения (3), а также для линеаризованной системы уравнений фазового поля без упомянутых выше ограничений на ее параметры.

1. Обратная задача в банаховых пространствах. Приведем полученные ранее в [6], [8], [9] результаты, на которые будем опираться в дальнейшем. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \rho^L(M) &= \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})\}, & \sigma^L(M) &= \mathbb{C} \setminus \rho^L(M); \\ R_\mu^L(M) &= (\mu L - M)^{-1} L, & L_\mu^L(M) &= L(\mu L - M)^{-1}, \\ R_{(\mu,p)}^L(M) &= \prod_{k=0}^p (\mu_k L - M)^{-1} L, & L_{(\mu,p)}^L(M) &= \prod_{k=0}^p L(\mu_k L - M)^{-1}, \\ \mathcal{U}^0 &= \ker R_{(\mu,p)}^L(M), & \mathcal{F}^0 &= \ker L_{(\mu,p)}^L(M), \\ \mathcal{U}^1 &= \overline{\text{im} R_{(\mu,p)}^L(M)}, & \mathcal{F}^1 &= \overline{\text{im} L_{(\mu,p)}^L(M)}. \end{aligned}$$

Верхняя черта означает замыкание множества в норме пространства $\mathcal{U}$ или $\mathcal{F}$ соответственно. Через L_k (M_k), $k = 0, 1$, будем обозначать сужение оператора L (M) на подпространство $\mathcal{U}^k$ ($\text{dom } M_k = \mathcal{U}^k \cap \text{dom } M$).

Оператор M называется *сильно* (L, p) -секториальным, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R} \exists \theta \in (\pi/2, \pi)$

$$S_{a,\theta}^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \mu \neq a\} \subset \rho^L(M);$$

(ii) $\exists K > 0 \forall \mu_k \in S_{a,\theta}^L(M), k = 0, \dots, p,$

$$\max\{\|R_{(\mu,p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(U)}, \|L_{(\mu,p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(F)}\} \leq \frac{K}{\prod_{k=0}^p |\mu_k - a|};$$

(iii) существует плотный в $\mathcal{F}$ линейал $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ такой, что

$$\begin{aligned} \|M(\lambda L - M)^{-1} L_{(\mu,p)}^L(M) f\|_{\mathcal{F}} &\leq \frac{\text{const}(f)}{|\lambda - a| \prod_{k=0}^p |\mu_k - a|} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}; \\ \|R_{(\mu,p)}^L(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(F;U)} &\leq \frac{K}{|\lambda - a| \prod_{k=0}^p |\mu_k - a|} \end{aligned}$$

при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in S_{a,\theta}^L(M)$.

ТЕОРЕМА 1 [8], [9]. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален. Тогда

- (i) $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1, \mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$;
- (ii) $L_k \in \mathcal{L}(U^k; \mathcal{F}^k), M_k \in \mathcal{GL}(U^k; \mathcal{F}^k), k = 0, 1$;
- (iii) существуют $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(F^0; \mathcal{U}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(F^1; \mathcal{U}^1)$;
- (iv) оператор $H = M_0^{-1} L_0$ нильпотентен степени не больше p .

Проектор вдоль $\mathcal{U}^0$ на $\mathcal{U}^1$ (вдоль $\mathcal{F}^0$ на $\mathcal{F}^1$) обозначим через $P(Q)$.

Назовем $q \in \mathcal{F}$ решением задачи (1)–(3), если соответствующее решение $u \in C^1([0, T]; \mathcal{U})$ уравнения (1) удовлетворяет условиям (2) и (3). Задачу (1)–(3) назовем *корректной*, если для всех $u_0 \in \text{dom } M_1, u_T \in \text{dom } M$ существует ее единственное решение, при некотором $C > 0$ удовлетворяющее условию

$$\|q\|_{\mathcal{F}} \leq C(\|u_0\|_{\mathcal{U}} + \|Mu_0\|_{\mathcal{F}} + \|u_T\|_{\mathcal{U}} + \|Mu_T\|_{\mathcal{F}}).$$

Обозначим $\chi(z) = \int_0^T d\mu(t) \int_0^t e^{z(t-s)} f(s) ds$.

ТЕОРЕМА 2 [6]. Пусть оператор M сильно (L, p) -секториален, функция $f \in C^{p+1}([0, T], \mathbb{R}), \mu: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию. Тогда задача (1)–(3) корректна в том и только в том случае, когда $\chi(z) \neq 0$ для любого $z \in \sigma^L(M)$,

$$\int_0^T f(t) d\mu(t) \neq 0, \quad \int_0^T f(t) d\mu(t) \neq f(0) \left(\lim_{t \rightarrow 0+} \mu(t) - \mu(0) \right).$$

При этом

$$(I - Q)q = M_0 \sum_{k=0}^p (-1)^{k+1} H^k \left(\sum_{n=1}^p \frac{\int_0^T f^{(n)}(t) d\mu(t)}{\int_0^T f(t) d\mu(t)} H^{n-1} \right)^k \frac{(I - P)u_T}{\int_0^T f(t) d\mu(t)}. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Рассуждая, как в работе [3], нетрудно показать, что обратная задача (2), (3) для более общего уравнения $L\dot{u}(t) = Mu(t) + qf(t) + g(t)$ с заданной функцией $g \in C^{p+1}([0, T]; \mathcal{F})$ может быть сведена к задаче (1)–(3) с начальным значением $u_0 = 0$.

2. Обратная задача для линеаризованной системы Навье–Стокса. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (6)$$

для линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса

$$v_t(x, t) = \nu \Delta v(x, t) - r(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (7)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (8)$$

которая в линейном приближении описывает течение вязкой несжимаемой жидкости. Здесь $\nu > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $v = v(x, t)$ – скорость жидкости, $r = r(x, t) = \nabla p$ – градиент ее давления.

Обозначим

$$\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n, \quad \mathcal{L} = \{w \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot w = 0\}.$$

Замыкание линеала $\mathcal{L}$ по норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$. Существует представление $\mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, где $\mathbb{H}_\pi$ – ортогональное в $\mathbb{L}_2$ дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi: \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$ ассоциированный с этим представлением ортопроектор. Также нам понадобится пространство $\mathbb{H}_0^2 = (H_0^2(\Omega))^n$, где $H_0^2(\Omega)$ – пересеченное с $H^2(\Omega)$ замыкание в норме $H^1(\Omega)$ множества финитных функций $C_0^\infty(\Omega)$. Сужение проектора Π на пространство $\mathbb{H}_0^2$ является непрерывным оператором $\Pi_2: \mathbb{H}_0^2 \rightarrow \mathbb{H}_0^2$, поэтому имеет место представление пространства $\mathbb{H}_0^2$ в виде прямой суммы $\mathbb{H}_\sigma^2 \oplus \mathbb{H}_\pi^2$, где $\mathbb{H}_\sigma^2 = \ker \Pi_2$, а $\mathbb{H}_\pi^2 = \text{im} \Pi_2$.

Следуя подходу Соболева [18], используем обобщенную постановку задачи (5)–(8), заменив уравнение несжимаемости (8) на более общее уравнение

$$\Pi v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T]. \quad (9)$$

Очевидно, что формулой $A = \text{diag}\{\Delta, \dots, \Delta\}$ задается линейный замкнутый оператор $A: \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{L}_2$ с областью определения $\text{dom } A = \mathbb{H}_0^2$, имеющий дискретный конечнократный спектр $\sigma(A)$, сгущающийся лишь на $-\infty$. Обозначим $A_\sigma = A|_{\mathbb{H}_\sigma^2}$, $A_\pi = A|_{\mathbb{H}_\pi^2}$, $\Sigma = I - \Pi$.

ЛЕММА 1. *Имеет место действие операторов $A_\sigma: \mathbb{H}_\sigma^2 \rightarrow \mathbb{H}_\sigma$, $A_\pi: \mathbb{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\Pi A \Sigma \equiv 0$. Пусть вектор $v \in \mathcal{L}$; тогда $(\nabla \cdot Av) = \Delta(\nabla \cdot v) = 0$ и $\Pi Av = 0$. С плотного множества $\mathcal{L}$ на все пространство $\mathbb{H}_\sigma^2$ это равенство распространяется по непрерывности оператора ΠA . Следовательно, оператор $A_\sigma: \mathbb{H}_\sigma^2 \rightarrow \mathbb{H}_\sigma$.

Теперь покажем, что $\Sigma A \Pi \equiv 0$. Возьмем $v \in \mathbb{H}_\sigma^2$, $u \in \mathbb{H}_\pi^2$. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{L}_2$. Имеем $\langle v, Au \rangle = \langle Av, u \rangle = 0$, так как оператор A самосопряжен, $Av \in \mathbb{H}_\sigma$, как было показано выше, и пространства $\mathbb{H}_\sigma$ и $\mathbb{H}_\pi$ ортогональны друг другу. В силу плотности $\mathbb{H}_\sigma^2$ в $\mathbb{H}_\sigma$ имеем $Au \perp \mathbb{H}_\sigma$, поэтому $A_\pi: \mathbb{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$.

Положим $\mathcal{U} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_r$, $\mathcal{F} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_r^2$, где $\mathbb{H}_r = \mathbb{H}_\pi$, $\mathbb{H}_r^2 = \mathbb{H}_\pi^2$. Тогда из леммы 1 следует, что операторы имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(U; F), \quad M = \begin{pmatrix} \nu A_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \nu A_\pi & -I \\ 0 & -I & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}; \mathcal{F}),$$

$\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{H}_r$, $\operatorname{dom} M = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi^2 \times \mathbb{H}_r$.

В силу леммы 1 оператор $A_\sigma: \mathbb{H}_\sigma \rightarrow \mathbb{H}_\sigma$, $\operatorname{dom} A_\sigma = \mathbb{H}_\sigma^2$, линейен и замкнут, причем его спектр $\sigma(A_\sigma)$ дискретен, конечнократен и сгущается к $-\infty$, поскольку подпространство $\mathbb{H}_\sigma$ бесконечномерно. Пусть $\{\varphi_k\}$ – семейство ортонормированных в смысле $\mathbb{L}_2$ собственных функций оператора A_σ , занумерованных по невозрастаанию собственных значений $\{\lambda_k\}$ с учетом их кратности.

ТЕОРЕМА 3. *Оператор M сильно $(L, 1)$ -секториален.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\mu L - M = \begin{pmatrix} \mu I - \nu A & 0 & 0 \\ 0 & \mu I - \nu A & I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\Sigma(\mu I - \nu A)\Sigma = (\mu I - \nu A_\sigma)\Sigma = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu - \nu\lambda_k) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{L}_2$. Пусть $\mu \neq \nu\lambda_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$; тогда существует непрерывный оператор

$$A_{\sigma\mu}^{-1} \equiv (\mu I - \nu A_\sigma)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu - \nu\lambda_k}: \mathbb{H}_\sigma \rightarrow \mathbb{H}_\sigma.$$

Если $\mu \neq \nu\lambda_k$, то можно построить L -резольвенту оператора M

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} A_{\sigma\mu}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & -(\mu I - \nu A) \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} R_\mu^L(M) &= \begin{pmatrix} A_{\sigma\mu}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}, & R_{(\mu,1)}^L(M) &= \begin{pmatrix} A_{\sigma\mu_0}^{-1} A_{\sigma\mu_1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ L_\mu^L(M) &= \begin{pmatrix} A_{\sigma\mu}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & L_{(\mu,1)}^L(M) &= \begin{pmatrix} A_{\sigma\mu_0}^{-1} A_{\sigma\mu_1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ R_{(\mu,1)}^L(M)(\lambda L - M)^{-1} &= \begin{pmatrix} A_{\sigma\mu_0}^{-1} A_{\sigma\mu_1}^{-1} A_{\sigma\lambda}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M(\lambda L - M)^{-1} L_{(\mu,1)}^L(M) f &= \begin{pmatrix} \nu A_{\sigma\mu_0}^{-1} A_{\sigma\mu_1}^{-1} A_{\sigma\lambda}^{-1} A f_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_r^2$. Возьмем любое $\theta \in (\pi/2, \pi)$, $a = \nu\lambda_1$,

$$\mu \in S_{a,\theta} = \{\mu \in \mathbb{C}: |\arg(\mu - \nu\lambda_1)| < \theta\}$$

и, используя очевидную оценку

$$\|A_{\sigma\mu}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)} \leq \sin^{-1} \theta |\mu - \nu\lambda_1|^{-1}$$

для $\mu \in S_{a,\theta}$, $c(f) = \nu \sin^{-1} \theta \|A f_\sigma\|_{\mathbb{L}_2}$, получим сильную $(L, 1)$ -секториальность оператора M .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Подобная, но несколько иная, редукция задачи (6)–(8) к уравнению $L\dot{u}(t) = Mu(t)$ была ранее проделана в [19].

Используя формулу для проектора P [9], нетрудно убедиться, что для данной задачи

$$P = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu(\mu L - M)^{-1}L)^2 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

К задаче (1)–(3) редуцируем обратную задачу

$$\Sigma v(x, 0) = v_0(x) \in \mathbb{H}_\sigma^2, \quad (10)$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (11)$$

$$v_t(x, t) = \nu \Delta v(x, t) - r(x, t) + q(x)f(t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (12)$$

$$Pv(x, t) = q_r(x)f(t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (13)$$

$$\int_0^T v(x, t) d\mu(t) = v_T(x) \in \mathbb{H}_0^2, \quad \int_0^T r(x, t) d\mu(t) = r_T(x) \in \mathbb{H}_r, \quad (14)$$

в которой искомыми являются функции v , r , q , q_r . При этом учтено, что $\text{dom } M_1 = P[\text{dom } M] = \mathbb{H}_\sigma^2$.

Корректность обратной задачи (10)–(14) будет означать существование при любых $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma^2$, $v_T \in \mathbb{H}_0^2$, $r_T \in \mathbb{H}_r$ решения $(q, q_r) \in \mathbb{L}_2 \times \mathbb{H}_r^2$, для которого

$$\|q\|_{\mathbb{L}_2} + \|q_r\|_{\mathbb{H}^2} \leq C(\|v_0\|_{\mathbb{H}^2} + \|v_T\|_{\mathbb{H}^2} + \|r_T\|_{\mathbb{L}_2}).$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $f \in C^2([0, T]; \mathbb{R})$, функция $\mu: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию. Тогда задача (10)–(14) корректна в том и только в том случае, когда для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется $\chi(\nu\lambda_k) \neq 0$, $\int_0^T f(t) d\mu(t) \neq 0$, $\int_0^T f(t) d\mu(t) \neq f(0) \cdot (\lim_{t \rightarrow 0+} \mu(t) - \mu(0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства теоремы 3 видно, что в данном случае $\sigma^L(M) = \{\nu\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$. Поэтому настоящее утверждение является следствием теорем 2 и 3.

Рассмотрим теперь постановку обратной задачи, при которой обобщение уравнения несжимаемости (9) сохраняет нулевую правую часть, т.е. $q_r \equiv 0$. В этом случае $v_\pi \equiv 0$, поэтому начальное условие (10) можно переписать в виде

$$v(x, 0) = v_0(x) \in \mathbb{H}_\sigma^2. \quad (15)$$

Пара (Pq, q_r) является проекцией решения обратной задачи на подпространство $\mathcal{F}^0 = \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_r^2$ и может быть найдена по формуле (4) при $p = 1$. Имеем

$$Mv^0 = \begin{pmatrix} \nu A_\pi v_\pi - v_r \\ -v_\pi \end{pmatrix} = f^0 = \begin{pmatrix} f_\pi \\ f_r \end{pmatrix}.$$

Поэтому $v_\pi = -f_r$, $v_r = -f_\pi - \nu A_\pi f_r$,

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & -\nu A_\pi \end{pmatrix}, \quad H = M_0^{-1}L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Pi q \\ q_r \end{pmatrix} &= \frac{1}{\int_0^T f(t) d\mu(t)} \begin{pmatrix} \nu A_\pi & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Pi v_T \\ -\frac{\int_0^T f'(t) d\mu(t)}{\int_0^T f(t) d\mu(t)} \Pi v_T - r_T \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\int_0^T f(t) d\mu(t)} \begin{pmatrix} \left(\frac{\int_0^T f'(t) d\mu(t)}{\int_0^T f(t) d\mu(t)} - \nu A \right) \Pi v_T + r_T \\ \Pi v_T \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$q_r \equiv 0$ в том и только в том случае, когда $\Pi v_T \equiv 0$. Поэтому условия переопределения должны иметь вид

$$\int_0^T v(x, t) d\mu(t) = v_T(x) \in \mathbb{H}_\sigma^2, \quad \int_0^T r(x, t) d\mu(t) = r_T(x) \in \mathbb{H}_r. \quad (16)$$

Теперь можно сформулировать теорему о корректности обратной задачи (9), (11), (12), (15), (16), которая в данном случае означает существование решения $q \in \mathbb{L}_2$ при любых $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma^2$, $v_T \in \mathbb{H}_\sigma^2$, $r_T \in \mathbb{H}_r$, удовлетворяющего оценке

$$\|q\|_{\mathbb{L}_2} \leq C(\|v_0\|_{\mathbb{H}^2} + \|v_T\|_{\mathbb{H}^2} + \|r_T\|_{\mathbb{L}_2}).$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функция $f \in C^2([0, T], \mathbb{R})$, функция $\mu: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию. Тогда задача (9), (11), (12), (15), (16) корректна в том и только в том случае, когда для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется $\chi(\nu \lambda_k) \neq 0$, $\int_0^T f(t) d\mu(t) \neq 0$, $\int_0^T f(t) d\mu(t) \neq f(0) \cdot (\lim_{t \rightarrow 0+} \mu(t) - \mu(0))$.

3. Обратная задача для системы уравнений фазового поля. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + \lambda u(x, t) &= \frac{\partial v}{\partial n}(x, t) + \lambda v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

для системы

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \Delta u(x, t) - \Delta v(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \Delta v(x, t) + \beta v(x, t) + u(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

с точностью до линейной замены неизвестных функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$ совпадающей с линеаризованной системой уравнений фазового поля [17].

Положим $\mathcal{U} = \mathcal{F} = (L_2(\Omega))^2$,

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta \\ 1 & \beta + \Delta \end{pmatrix}, \\ H_{\partial/\partial n + \lambda}^2(\Omega) &= \left\{ w \in H^2(\Omega) : \left(\frac{\partial}{\partial n} + \lambda \right) w(x) = 0, x \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{dom } M = (H_{\partial/\partial n + \lambda}^2(\Omega))^2.$$

Обозначим $Aw = \Delta w$, $\text{dom } A = H^2_{\partial/\partial n + \lambda}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора A , занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности. Ранее [11] было показано, что при условии $-\beta \notin \sigma(A)$ оператор M сильно $(L, 0)$ -секториален. В данной работе мы откажемся от этого условия.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $-\beta \in \sigma(A)$. Тогда оператор M сильно $(L, 1)$ -секториален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя разложение по базису $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ в пространстве $L_2(\Omega)$ и обозначение $\delta_k = (\beta + 1 + \lambda_k)\lambda_k/(\beta + \lambda_k)$, получим

$$\begin{aligned} \mu L - M &= \begin{pmatrix} \mu - \Delta & \Delta \\ -1 & -\beta - \Delta \end{pmatrix}, \\ (\mu L - M)^{-1} &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta - \lambda_k)\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{-\beta\mu + (\beta + 1 - \mu)\lambda_k + \lambda_k^2} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\lambda_k\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{-\beta\mu + (\beta + 1 - \mu)\lambda_k + \lambda_k^2} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{-\beta\mu + (\beta + 1 - \mu)\lambda_k + \lambda_k^2} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu - \lambda_k)\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{-\beta\mu + (\beta + 1 - \mu)\lambda_k + \lambda_k^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu - \delta_k} & \\ \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(-\beta - \lambda_k)(\mu - \delta_k)} - \frac{1}{\beta} \sum_{\lambda_k = -\beta} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k & \\ \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{\lambda_k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\beta + \lambda_k)(\mu - \delta_k)} - \sum_{\lambda_k = -\beta} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k & \\ \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{(\mu - \lambda_k)\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(-\beta - \lambda_k)(\mu - \delta_k)} - \frac{\mu + \beta}{\beta} \sum_{\lambda_k = -\beta} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обозначим $\mathbb{M} = \{k \in \mathbb{N} : \lambda_k \neq -\beta\}$; тогда $a = \max_{k \in \mathbb{M}} \delta_k < \infty$ и при любом $\theta \in (\pi/2, \pi)$, $\mu \in S^L_{a, \theta}(M)$ выписанный оператор непрерывен в силу ограниченности последовательностей $\lambda_k/(\beta + \lambda_k)$, $-1/(\beta + \lambda_k)$, $(\mu - \lambda_k)/(-\beta - \lambda_k)$. Имеем

$$\begin{aligned} R^L_{\mu}(M) &= \begin{pmatrix} \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu - \delta_k} & 0 \\ \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(-\beta - \lambda_k)(\mu - \delta_k)} + \sum_{\lambda_k = -\beta} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\lambda_k} & 0 \end{pmatrix}, \\ R^L_{\mu_0}(M) R^L_{\mu_1}(M) &= \begin{pmatrix} \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\mu_0 - \delta_k)(\mu_1 - \delta_k)} & 0 \\ \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(-\beta - \lambda_k)(\mu_0 - \delta_k)(\mu_1 - \delta_k)} & 0 \end{pmatrix}, \\ L^L_{\mu}(M) &= \begin{pmatrix} \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu - \delta_k} & \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{\lambda_k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\beta + \lambda_k)(\mu - \delta_k)} - \sum_{\lambda_k = -\beta} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$L_{\mu_0}^L(M)L_{\mu_1}^L(M) = \begin{pmatrix} \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\mu_0 - \delta_k)(\mu_1 - \delta_k)} & \sum_{\lambda_k \neq -\beta}^{\infty} \frac{\lambda_k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\beta + \lambda_k)(\mu_0 - \delta_k)(\mu_1 - \delta_k)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} & R_{\mu_0}^L(M)R_{\mu_1}^L(M)(\gamma L - M)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\mu_0 - \delta_k)(\mu_1 - \delta_k)(\gamma - \delta_k)} & \\ \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{-\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\beta + \lambda_k)(\mu_0 - \delta_k)(\mu_1 - \delta_k)(\gamma - \delta_k)} & \\ \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{\lambda_k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\beta + \lambda_k)(\mu_0 - \delta_k)(\mu_1 - \delta_k)(\gamma - \delta_k)} & \\ \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{-\lambda_k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\beta + \lambda_k)^2(\mu_0 - \delta_k)(\mu_1 - \delta_k)(\gamma - \delta_k)} & \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & M(\gamma L - M)^{-1}L_{\mu_0}^L(M)L_{\mu_1}^L(M) \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{\delta_k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\mu_0 - \delta_k)(\mu_1 - \delta_k)(\gamma - \delta_k)} & \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{\delta_k \lambda_k \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\beta + \lambda_k)(\mu_0 - \delta_k)(\mu_1 - \delta_k)(\gamma - \delta_k)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Возьмем

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \max_{k \in \mathbb{M}} \left\{ 1, \left| \frac{1}{\beta + \lambda_k} \right|, \left| \frac{\lambda_k}{\beta + \lambda_k} \right|, \left| \frac{\lambda_k}{(\beta + \lambda_k)^2} \right| \right\}, \\ \text{const}(f) &= \|f\|_{H^2(\Omega)} \max_{k \in \mathbb{M}} \left\{ K, \left| \frac{\beta + \lambda_k + 1}{\beta + \lambda_k} \right|, \left| \frac{(\beta + \lambda_k + 1)\lambda_k}{(\beta + \lambda_k)^2} \right| \right\} \end{aligned}$$

для $f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}} = \text{dom } M$; тогда для всех $\mu_0, \mu_1, \gamma \in S_{a,\theta}^L(M)$ будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} \max\{\|R_{(\mu,1)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(U)}, \|L_{(\mu,1)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(U)}\} &\leq \frac{K}{|\mu_0 - a||\mu_1 - a|}, \\ \|R_{(\mu,1)}^L(M)(\gamma L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(U)} &\leq \frac{K}{|\gamma - a||\mu_0 - a||\mu_1 - a|}, \\ \|M(\gamma L - M)^{-1}L_{(\mu,1)}^L(M)f\|_{\mathcal{F}} &\leq \frac{\text{const}(f)}{|\gamma - a||\mu_0 - a||\mu_1 - a|}. \end{aligned}$$

Проектор P в таком случае имеет вид

$$P = \text{s-lim}_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu R_{\mu}^L(M))^2 = \begin{pmatrix} \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k & 0 \\ \sum_{\lambda_k \neq -\beta} \frac{-\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\beta + \lambda_k} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\mathcal{V} = \overline{\text{span}}\{\varphi_k : k \in \mathbb{M}\}$, где верхняя черта означает замыкание в норме пространства $L_2(\Omega)$. Очевидно, что подпространство $\mathcal{U}^1 = \mathcal{V} \times (\beta + A)^{-1}[\mathcal{V}]$ изоморфно подпространству $\mathcal{V}$. К задаче (1)–(3) редуцируем обратную задачу

$$u(x, 0) = u_0(x) \in H_{\partial/\partial n + \lambda}^2(\Omega) \cap \mathcal{V}, \quad (17)$$

$$\int_0^T u(x, t) d\mu(t) = u_T(x) \in H_{\partial/\partial n+\lambda}^2(\Omega), \quad \int_0^T v(x, t) d\mu(t) = v_T(x) \in H_{\partial/\partial n+\lambda}^2(\Omega), \quad (18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + \lambda u(x, t) = \frac{\partial v}{\partial n}(x, t) + \lambda v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (19)$$

$$u_t(x, t) = \Delta u(x, t) - \Delta v(x, t) + f(t)q(x), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (20)$$

$$\Delta v(x, t) + \beta v(x, t) + u(x, t) + f(t)h(x) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (21)$$

Искомými здесь, как и в прямой задаче, являются функции $u(x, t)$, $v(x, t)$, а также $q(x)$, $h(x) \in L_2(\Omega)$.

Корректность обратной задачи (17)–(21) будет означать существование при любых $u_0 \in H_{\partial/\partial n+\lambda}^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$, $u_T \in H_{\partial/\partial n+\lambda}^2(\Omega)$, $v_T \in H_{\partial/\partial n+\lambda}^2(\Omega)$ решения $(q, h) \in (L_2(\Omega))^2$, для которого

$$\|q\|_{L_2(\Omega)} + \|h\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \|u_T\|_{H^2(\Omega)} + \|v_T\|_{H^2(\Omega)}).$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $-\beta \in \sigma(A)$, $f \in C^2([0, T], \mathbb{R})$, функция $\mu: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию. Тогда задача (17)–(21) корректна в том и только в том случае, когда $\chi(\delta_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{M}$, $\int_0^T f(t) d\mu(t) \neq 0$, $\int_0^T f(t) d\mu(t) \neq f(0)(\lim_{t \rightarrow 0+} \mu(t) - \mu(0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства теоремы 5 видно, что $\sigma^L(M) = \{\delta_k : k \in \mathbb{M}\}$. Осталось сослаться на теоремы 2 и 5.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1979.
- [2] М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шипатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, Наука, М., 1980.
- [3] А. И. Приленко, “Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз-управление и прогноз-наблюдение эволюционных уравнений. I”, *Дифференц. уравнения*, **41**:11 (2005), 1560–1571.
- [4] A. I. Kozhanov, *Composite Type Equations and Inverse Problems*, Inverse Ill-Posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 1999.
- [5] N. L. Abasheeva, “Some inverse problems for parabolic equations with changing time direction”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **12**:4 (2004), 337–348.
- [6] V. E. Fedorov, A. V. Urazaeva, “An inverse problem for linear Sobolev type equations”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **12**:4 (2004), 387–395.
- [7] Г. А. Свиридюк, “К общей теории полугрупп операторов”, *УМН*, **49**:4 (1994), 47–74.
- [8] Г. А. Свиридюк, В. Е. Федоров, “О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами”, *Сиб. матем. журн.*, **39**:3 (1998), 604–616.
- [9] G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov, *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*, Inverse Ill-Posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 2003.
- [10] В. Е. Федоров, “Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах”, *Матем. сб.*, **195**:8 (2004), 131–160.
- [11] В. Е. Федоров, А. В. Уразаева, “Обратная задача для одного класса сингулярных линейных операторно-дифференциальных уравнений”, *Тр. Воронежской зимней матем. школы*, ВГУ, Воронеж, 2004, 161–172.
- [12] Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина, “Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах”, *ПММ*, **24**:5 (1960), 852–864.

- [13] Е. С. Дзекцер, “Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью”, *Докл. АН СССР*, **202**:5 (1972), 1031–1033.
- [14] В. Е. Федоров, А. В. Уразаева, “Обратные задачи для некоторых неклассических уравнений математической физики”, *Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования*, Материалы конференции, ч. 1: Конструктивные методы в теории обратных задач, ЮНИИИТ, Ханты-Мансийск, 2005, 71–73; http://www.uriit.ru/conf_erohin_50/Part_01_16.pdf.
- [15] А. И. Прилепко, И. А. Васин, “Некоторые обратные начально-краевые задачи для нестационарных линеаризованных уравнений Навье–Стокса”, *Дифференц. уравнения*, **25**:1 (1989), 106–117.
- [16] А. И. Прилепко, И. А. Васин, “Некоторые нестационарные задачи гидродинамики с финальным переопределением”, *Докл. АН СССР*, **314**:5 (1990), 1075–1078.
- [17] П. И. Плотников, В. Н. Старовойтов, “Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля”, *Дифференц. уравнения*, **29**:3 (1993), 461–471.
- [18] С. Л. Соболев, “Об одной новой задаче математической физики”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **18**:1 (1954), 3–50.
- [19] Г. А. Свиридюк, Г. А. Кузнецов, “Об относительно сильной p -секториальности линейных операторов”, *Докл. РАН*, **365**:6 (1999), 736–738.

А. В. Уразаева

Челябинский государственный университет
E-mail: urazaeva_anna@mail.ru

Поступило

27.12.2007

В. Е. Федоров

Челябинский государственный университет
E-mail: kar@csu.ru