Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Аксентьев, А. Н. Ахметова, Об отображениях, связанных с градиентом конформного радиуса, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 1, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4347>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:29:59

Об отображениях, связанных с градиентом конформного радиуса

Л. А. Аксентьев, А. Н. Ахметова

В статье обоснован критерий конформности градиента конформного радиуса $\nabla R(D, z)$ выпуклой области D : граница ∂D должна быть окружностью. Получены оценки коэффициентов $K(r)$ для $K(r)$ -квазиконформных отображений $\nabla R(D, z)$, $D(r) \subset D$, $0 < r < 1$, и дополнены результаты Ф. Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса по структуре границы при диффеоморфных отображениях области D .

Библиография: 9 названий.

Одно из направлений изучения конформного радиуса определяется его связью с различными характеристиками плоской области (трансфинитным диаметром, площадью области, длиной ее границы и др.), широким применением в математической физике и вовлечением всех этих понятий в изопериметрические неравенства. Другое направление связано с различными экстремальными и граничными задачами, в частности, с внешней обратной краевой задачей (ОКЗ), количество решений которой не превосходит числа критических точек конформного радиуса.

Изучением конформного радиуса с разных сторон занимались Полия и Cer [1], Л. Альфорс, Д. Минда, В. Осгуд и многие другие математики, отмеченные в библиографии из книги [2]. Известна формула (см., например, [3])

$$R(D, z) = |f'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2) \quad (1)$$

для вычисления конформного радиуса односвязной области D в точке z , где $z = f(\zeta)$ – функция, реализующая конформное отображение единичного круга $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ на область $D = f(E)$.

Настоящая работа посвящена исследованиям величины

$$\nabla R(D, z) = \frac{\partial R(D, z)}{\partial x} + i \frac{\partial R(D, z)}{\partial y} = 2 \frac{\partial R}{\partial \bar{z}} = 2R_{\bar{z}}, \quad (2)$$

$z = x + iy \in D$, которую будем называть *комплексным градиентом* (для краткости градиентом) конформного радиуса [4], [5].

Основным результатом статьи является критерий конформности градиента (2): граница области D должна быть окружностью. Для каждой выпуклой области $D = f(E)$ введен коэффициент квазиконформности $k_f(r)$, характеризующий K -квазиконформное отображение области $D(r) = f(rE)$, $K = (1 + k_f(r))/(1 - k_f(r))$.

Этот коэффициент вычислен для нескольких областей (в частности, для областей с вырожденным градиентом [5]), и поставлена задача об определении коэффициента

$$k(r) = \sup_{f \in S^0} k_f(r)$$

по всему классу S^0 выпуклых отображений.

Результаты [4], [5] дополнены теоремой о построении граничных линий с помощью прокатывания. Выделена уникальная роль астроида в семействе граничных кривых при отображении градиентной функцией прямолинейных многоугольников.

1. Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Предельным множеством для угловой точки $z = 0$ многоугольной области D под действием градиентной функции (2) при приближении к $z = 0$ по радиальным направлениям будет кривая: при $0 < \alpha < 1$ – гипоциклоида, при $1 < \alpha \leq 2$ – эпициклоида. В случае $\alpha = 1$ точке $z = 0$ будет соответствовать единственная точка на $|w| = 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы [5; с. 362]

$$\nabla R(f(E), f(\zeta)) = 2e^{i \arg f'(\zeta)} \left[\frac{1 - |\zeta|^2}{2} \overline{\left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right)} - \zeta \right], \quad f(-1) = 0, \quad f(E) = D;$$

с помощью нетрудных вычислений будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow 0} \nabla R(-1 + re^{it}) = 2e^{i\alpha t} [(\alpha - 1) \cos t + e^{-it}] = g_\alpha(\alpha t).$$

Запишем это в симметричном виде

$$g_\alpha(\alpha t) = (\alpha + 1)e^{i(\alpha-1)t} + (\alpha - 1)e^{i(\alpha+1)t}. \quad (3)$$

Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда, умножая (3) на $e^{-i\pi(\alpha-1)/2}$, получим

$$g_\alpha(\alpha t)e^{-i\pi(\alpha-1)/2} = (\alpha + 1)e^{i(\alpha-1)(t-\pi/2)} + (\alpha - 1)e^{i(\alpha+1)(t-\pi/2)}e^{i\pi}.$$

Введем обозначения $R = 2$, $r = 1 - \alpha$, $m = r/R = (1 - \alpha)/2$ и перепишем полученное равенство в виде

$$\begin{aligned} g_\alpha(\alpha t)e^{-i\pi(\alpha-1)/2} &= (R - r)e^{i(1-\alpha)(-2t+\pi)/2} + re^{-i(\alpha+1)(-2t+\pi)/2} \\ &= R[(1 - m)e^{im\tau} + me^{i(m-1)\tau}], \end{aligned} \quad (3')$$

$\tau = -2t + \pi$. Когда t убывает от $\pi/2$ до $-\pi/2$, значения τ возрастают от 0 до 2π . Начальной точкой кривой с уравнением (3') будет $w = 2$, конечной точкой окажется $w = 2e^{i2\pi m} = 2e^{i(1-\alpha)\pi}$.

В случае $1 < \alpha < 2$ умножаем (3) на $e^{i\pi(\alpha-1)/2}$. Тогда

$$g(\alpha t)e^{i\pi(\alpha-1)/2} = (\alpha + 1)e^{i(\alpha-1)(t+\pi/2)} + (\alpha - 1)e^{i(\alpha+1)(t+\pi/2)}e^{-i\pi}.$$

Вводя обозначения $R = 2$, $r = \alpha - 1$, $m = r/R = (\alpha - 1)/2$, перепишем уравнение кривой в виде

$$\begin{aligned} g(\alpha t)e^{i\pi(\alpha-1)/2} &= (R + r)e^{i(\alpha-1)(2t+\pi)/2} - re^{i(\alpha+1)(2t+\pi)/2} \\ &= R[(1 + m)e^{im\tau} - me^{i(m+1)\tau}], \end{aligned} \quad (3'')$$

$\tau = 2t + \pi$. Возрастанию t от $-\pi/2$ до $\pi/2$ соответствует возрастание τ от 0 до 2π . Начальная и конечная точки на кривой с уравнением (3'') запишутся в виде $w = 2$ и $w = 2e^{i2\pi m} = 2e^{i(\alpha-1)\pi}$.

Выражения (3') и (3'') являются соответственно уравнениями гипо- и эпициклоиды [6; с.109–111] и описывают движение некоторой фиксированной точки на производящей окружности радиуса $|1 - \alpha|$, катящейся по неподвижной окружности радиуса 2.

Особым является случай $\alpha = 1$: радиус производящей окружности будет равен нулю и две концевые точки, определяемые интервалом изменения t (или τ), стянутся в одну, т.е. циклоида выродится в точку.

Попутно отметим одну опечатку в статье [5; с.362]. Вместо производящей окружности радиуса 2 нужно взять производящую окружность радиуса 1.

Случай гипоциклоиды, образованной в результате прокатывания производящей окружности того же радиуса 1 внутри неподвижной окружности радиуса два, представляет собой пример вырождения циклоиды в отрезок мнимой оси от $-2i$ до $2i$.

2. Наиболее простое представление линии (3) в декартовой форме (при исключении параметра t) получается в случае $\alpha = 1/2$, дающее астроиду [4; с.24]. Докажем, что одна ветка астроиды получается из параметрического уравнения

$$w = \omega(t) = e^{i\pi/4} g_{1/2} \left(\frac{t}{2} \right), \quad (4)$$

где $g_{1/2}(t/2)$ имеет представление (3). Для доказательства приведем простые выкладки с правой частью выражения (4). Получим

$$\begin{aligned} 2w &= 3e^{i(\pi/4-t/2)} - e^{i(\pi/4+3t/2)} \\ &= 2e^{i(\pi/4-t/2)} + e^{i(\pi/4+t/2)}(e^{-it} - e^{it}) = 2[e^{i(\pi/4-t/2)} - ie^{i(\pi/4+t/2)} \sin t], \end{aligned}$$

откуда

$$w = e^{i(\pi/4-t/2)} - ie^{i(\pi/4+t/2)} \sin t = u + iv,$$

где

$$\begin{aligned} u &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) \right]^3, \\ v &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = 2 \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) \right]^3, \end{aligned}$$

так что

$$u^{2/3} + v^{2/3} = 2^{2/3}. \quad (4')$$

В общем случае параметр t можно исключить следующим образом. В представлении

$$w = \omega(t) = e^{i\beta} g_\alpha(\alpha t) = e^{i\beta} [(\alpha + 1)e^{i(\alpha-1)t} + (\alpha - 1)e^{i(\alpha+1)t}] \quad (5)$$

отделим вещественную и мнимую части:

$$\begin{aligned} u &= (\alpha + 1) \cos[\beta + (\alpha - 1)t] + (\alpha - 1) \cos[\beta + (\alpha + 1)t], \\ v &= (\alpha + 1) \sin[\beta + (\alpha - 1)t] + (\alpha - 1) \sin[\beta + (\alpha + 1)t]. \end{aligned}$$

После возведения в квадрат каждого из этих равенств и их сложения получим

$$u^2 + v^2 = 2(\alpha^2 + 1) + 2(\alpha^2 - 1) \cos 2t,$$

откуда

$$t = t(u, v) = \frac{1}{2} \arccos \frac{u^2 + v^2 - 2(\alpha^2 + 1)}{2(\alpha^2 - 1)}.$$

Поэтому уравнение линии (5) запишется в двух эквивалентных формах:

$$u = (\alpha + 1) \cos[\beta + (\alpha - 1)t(u, v)] + (\alpha - 1) \cos[\beta + (\alpha + 1)t(u, v)], \quad (5')$$

$$v = (\alpha + 1) \sin[\beta + (\alpha - 1)t(u, v)] + (\alpha - 1) \sin[\beta + (\alpha + 1)t(u, v)]. \quad (5'')$$

При $\alpha = 1/2$ и $\beta = \pi/4$ из этих сложных выражений можно получить уравнение астроида в виде (4'). По-видимому, никаких других простых выражений вида (4') получить из (5') или (5'') нельзя. В этом проявляется уникальность астроида с уравнением (4'). Правда, при введении натуральных характеристик (длины дуги и кривизны) можно привести (3) к весьма простому каноническому виду [6; с. 114] – натуральному уравнению циклоиды.

3. Для односвязной области D справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Градиент (2) конформного радиуса (1) осуществляет конформное отображение области D тогда и только тогда, когда граница D является окружностью в $\mathbb{C}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. *Достаточность.* Рассмотрим функцию $z = f(\zeta) = \rho\zeta + a$, $\zeta \in E$, осуществляющую отображение единичного круга E на круг $E(a, \rho)$ радиуса ρ с центром в точке a . Поскольку производная $f'(\zeta) = \rho > 0$ и $\zeta = (z - a)/\rho$, конформный радиус запишется в виде

$$R(f(E), f(\zeta)) = |f'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2) = \rho \left(1 - \frac{|z - a|^2}{\rho^2} \right) = \frac{\rho^2 - |z - a|^2}{\rho},$$

а градиент

$$\nabla R = -2 \frac{z - a}{\rho} \quad (6)$$

определится функцией, реализующей конформное отображение.

Функция $z = f(\zeta) = \rho/\zeta + a$ переведет E на внешность круга $E^-(a, \rho)$ радиуса ρ с центром в точке a . Так как $|f'(\zeta)| = \rho/|\zeta|^2$ и $\zeta = \rho/(z - a)$, конформный радиус запишется в виде

$$R(f(E), f(\zeta)) = \frac{|z - a|^2}{\rho} \left(1 - \frac{\rho^2}{|z - a|^2} \right) = \frac{|z - a|^2 - \rho^2}{\rho},$$

а градиент

$$\nabla R = 2 \frac{z - a}{\rho} \quad (7)$$

определится функцией, реализующей конформное отображение.

Полуплоскость (как предельное положение круга или внешности круга) определяет конформный радиус с вырожденным градиентом в виде константы, и поэтому такой градиент не задает конформное отображение. Действительно, функция

$z = f(\zeta) = e^{i\theta}/(\zeta + 1) + c$ отобразит круг на любую фиксированную полуплоскость с направляющим вектором граничной прямой в виде $e^{i(\theta+\pi/2)}$. Запишем конформный радиус

$$R = \frac{1 - |\zeta|^2}{|\zeta + 1|^2} = |z - c|^2 \left(\frac{e^{i\theta}}{z - c} + \frac{e^{-i\theta}}{\bar{z} - \bar{c}} - \frac{1}{|z - c|^2} \right) = e^{i\theta}(\bar{z} - \bar{c}) + e^{-i\theta}(z - c) - 1$$

и градиент для него

$$\nabla R = 2e^{i\theta}.$$

2. *Необходимость.* Из условия теоремы следует обращение производной градиента конформного радиуса по $\bar{z}$ в 0: $R_{\bar{z}\bar{z}} = 0$. Решением этого дифференциального уравнения будет функция $CR = c_1(z)\bar{z} + c_2(z)$, где $c_1(z)$, $c_2(z)$ – аналитические функции, C – постоянная положительная величина. Пусть $c_k(z) = u_k(x, y) + iv_k(x, y)$, $k = 1, 2$. В силу вещественности R имеем $\text{Im}\{(u_1 + iv_1)(x - iy) + u_2 + iv_2\} = 0$, т.е. $v_2 = yu_1 - xv_1$. Так как v_2 гармоническая,

$$\Delta(yu_1 - xv_1) = 0, \quad (8)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Поскольку

$$(yu_1 - xv_1)_{xx} = yu_{1xx} - xv_{1xx} - 2v_{1x}, \quad (yu_1 - xv_1)_{yy} = yu_{1yy} - xv_{1yy} + 2u_{1y},$$

равенство (8) приведет к виду

$$y\Delta u_1 - x\Delta v_1 - 2(v_{1x} - u_{1y}) = 0,$$

поэтому в силу гармоничности функций u_1 и v_1 получим $v_{1x} - u_{1y} = 0$, т.е.

$$v_{1x} = u_{1y}.$$

Это равенство и первое условие Коши–Римана (для функции $c_1(z)$) $v_{1x} = -u_{1y}$ дают тождества $v_{1x} = u_{1y} = 0$. Отсюда при выполнении второго условия Коши–Римана $u_{1x} = v_{1y}$ получим $u_1 = \alpha x + \beta$, $v_1 = \alpha y + \tilde{\beta}$, $\alpha, \beta, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}$. Значит, $c_1(z) = \alpha z + \beta + i\tilde{\beta}$. Функцию $c_2(z)$ восстановим по ее мнимой части $v_2 = y\beta - x\tilde{\beta}$ [7; с. 189]:

$$c_2(z) = i \left(2v_2 \left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i} \right) - v_2(0, 0) + ic \right) = i \left(\frac{\beta z}{i} - \tilde{\beta} z \right) - c = z(\beta - i\tilde{\beta}) - c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, конформный радиус определится в виде

$$CR = c_1(z)\bar{z} + c_2(z) = (\alpha z + \beta + i\tilde{\beta})\bar{z} + z(\beta - i\tilde{\beta}) - c = \alpha|z|^2 + 2\text{Re}\{z(\beta - i\tilde{\beta})\} - c. \quad (9)$$

При $\alpha = 0$ конформный радиус примет вид

$$CR = 2\text{Re}\{z(\beta - i\tilde{\beta})\} - c.$$

Так как $R(t) = 0$ при $t \in \partial D$, уравнение граничной кривой $2\text{Re}[t(\beta - i\tilde{\beta})] - c = 0$ задает прямую линию, и область D является полуплоскостью. Поэтому выполнено $\nabla R = 2(\beta + i\tilde{\beta})/C = 2e^{i\theta}$, т.е. нужно выбрать $C = |\beta + i\tilde{\beta}|$.

При $\alpha \neq 0$ перепишем (9) в виде

$$CR = \alpha \left| z + \frac{\beta + i\tilde{\beta}}{\alpha} \right|^2 - \alpha \left| \frac{\beta + i\tilde{\beta}}{\alpha} \right|^2 - c. \quad (10)$$

Учитывая граничное свойство конформного радиуса, получим

$$0 = CR|_{z=t} = \alpha \left| t + \frac{\beta + i\tilde{\beta}}{\alpha} \right|^2 - \alpha \left| \frac{\beta + i\tilde{\beta}}{\alpha} \right|^2 - c,$$

откуда

$$\left| t + \frac{\beta + i\tilde{\beta}}{\alpha} \right|^2 = \left| \frac{\beta + i\tilde{\beta}}{\alpha} \right|^2 + \frac{c}{\alpha}, \quad (10')$$

где (10') – уравнение окружности.

Сделаем некоторые замечания относительно α . Из (10) градиент конформного радиуса при $C = 1$ имеет вид

$$\nabla R = 2(\alpha z + \beta + i\tilde{\beta}). \quad (11)$$

Пусть $\alpha > 0$. Тогда перепишем (11) в виде

$$\nabla R = 2 \frac{z + (\beta + i\tilde{\beta})/\alpha}{1/\alpha}.$$

Отсюда, сравнивая полученное с (7), заключаем, что область D при $\alpha > 0$ есть внешность круга радиуса $1/\alpha$ с центром в точке $-(\beta + i\tilde{\beta})/\alpha$.

При $\alpha < 0$ перепишем (11) следующим образом:

$$\nabla R = -2 \frac{z + (\beta + i\tilde{\beta})/\alpha}{-1/\alpha} = -2 \frac{z + (\beta + i\tilde{\beta})/\alpha}{1/|\alpha|}.$$

Сравнение этого выражения с (6) позволяет заключить, что в случае $\alpha < 0$ область D будет кругом радиуса $1/|\alpha|$ с центром в точке $-(\beta + i\tilde{\beta})/\alpha$.

Заметим, что (10') описывает целое семейство окружностей. Мы же, используя возможность выбора c , полагаем

$$\left| \frac{\beta + i\tilde{\beta}}{\alpha} \right|^2 + \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

4. Отображение с помощью $\nabla R(D, z)$ будет K -квазиконформным [8; с. 13], если $\nabla R(D, z)$ удовлетворит уравнению Бельтрами с соответствующим коэффициентом $k = (K-1)/(K+1)$ для этого уравнения. Именно, в области D должна выполняться оценка

$$\left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{zz}} \right| \leq k < 1.$$

Это неравенство означает, что $(\nabla R)_{\bar{z}} = \mu(z, \bar{z})(\nabla R)_z$ и

$$|\mu(z, \bar{z})| \leq k < 1.$$

ПРИМЕР 1. Вычислим величину $k_{f_\alpha}(r)$ для градиента конформного радиуса области $D_\alpha(r)$, входящей в угловую область $D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \alpha\pi/2\}$, $\alpha \in [0, 1]$. Область D_α является образом круга E при отображении функцией $f_\alpha(\zeta) = ((1 + \zeta)/(1 - \zeta))^\alpha$, а функция $z = f_\alpha(r\zeta)$, $0 < r < 1$, отображает круг E на $D_\alpha(r)$.

Поскольку

$$[f_\alpha(r\zeta)]'_\zeta = 2\alpha r \left(\frac{1 + r\zeta}{1 - r\zeta} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{(1 - r\zeta)^2} = \frac{2\alpha r z}{1 - r^2 \zeta^2},$$

конформный радиус области $D_\alpha(r)$ запишется в виде

$$R(D_\alpha(r), z) = \frac{2\alpha r |z|}{|1 - r^2 \zeta^2|} (1 - |\zeta|^2).$$

Вычислим необходимые производные

$$\begin{aligned} R_{\bar{z}} &= \sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} \frac{1}{|1 - r^2 \zeta^2|} (\alpha r (1 - |\zeta|^2) + r^2 \bar{\zeta} - \zeta), \\ R_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{1}{2\alpha r} \sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} \frac{1}{|1 - r^2 \zeta^2|} r^2 (1 - \alpha^2) (1 - |\zeta|^2), \\ R_{zz} &= -\frac{1}{2\alpha r} \frac{1}{|z|} \frac{1}{|1 - r^2 \zeta^2|} (1 - r^4 |\zeta|^2 + \alpha r (1 - r^2) (\zeta + \bar{\zeta}) + \alpha^2 r^2 |\zeta|^2 - \alpha^2 r^2). \end{aligned}$$

Отношение вторых производных удовлетворит неравенству

$$\left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{zz}} \right| \leq \frac{r^2 (1 - \alpha^2) (1 - |\zeta|^2)}{1 - r^4 |\zeta|^2 - 2\alpha r |\zeta| (1 - r^2) + \alpha^2 r^2 |\zeta|^2 - \alpha^2 r^2} \leq r^2 \max_{0 \leq t \leq 1} \varphi(t) = r^2 \varphi(t_0),$$

где

$$\varphi(t) = \frac{(1 - \alpha^2)(1 - t^2)}{t^2(\alpha^2 r^2 - r^4) - 2\alpha r(1 - r^2)t + 1 - \alpha^2 r^2} > 0,$$

причем $\varphi(t_0) \leq 1$. Это следует из выполнения цепочки неравенств (приведением к очевидному неравенству)

$$(1 - \alpha^2)(1 - t_0^2) \leq t_0^2(\alpha^2 r^2 - r^4) - 2\alpha r(1 - r^2)t_0 + 1 - \alpha^2 r^2,$$

откуда

$$t_0^2(\alpha^2 r^2 - r^4 + 1 - \alpha^2) - 2\alpha r(1 - r^2)t_0 + 1 - \alpha^2 r^2 - 1 + \alpha^2 \geq 0,$$

так что

$$t_0^2(1 - r^2)(1 + r^2 - \alpha^2) - 2\alpha r(1 - r^2)t_0 + \alpha^2(1 - r^2) \geq 0$$

и, наконец,

$$(t_0 r - \alpha)^2 + t_0^2(1 - \alpha^2) \geq 0.$$

Таким образом,

$$k_{f_\alpha}(r) = r^2 \varphi(t_0) \leq r^2.$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим полосу $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$, являющуюся образом единичного круга при отображении функцией $f_0(\zeta) = \ln((1 + \zeta)/(1 - \zeta))$, как предельный случай угловой области D_α :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{((1 + \zeta)/(1 - \zeta))^\alpha - 1}{\alpha} = \ln \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}.$$

Запишем конформный радиус для $D_0(r) = f_0(rE)$

$$R(D_0(r), z) = 2r \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - r^2 \zeta^2|}.$$

Так как

$$R_{\bar{z}} = \frac{r^2 \bar{\zeta} - \zeta}{|1 - r^2 \zeta^2|}, \quad R_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{r^2}{2} \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - r^2 \zeta^2|}, \quad R_{zz} = \frac{1}{2r} \frac{r^4 |\zeta|^2 - 1}{|1 - r^2 \zeta^2|},$$

отношение вторых производных удовлетворит оценке

$$\left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{zz}} \right| = \frac{r^2(1 - |\zeta|^2)}{1 - r^4 |\zeta|^2} \leq r^2.$$

Заметим, что при $r = 1$ в примерах 1, 2 отношение $|R_{\bar{z}\bar{z}}/R_{zz}|$ окажется равным единице тождественно. Геометрически вырождение образа градиента конформного радиуса для области D_α , $\alpha \neq 0$, описано в п. 1 настоящей статьи, а для D_0 проявится следующим образом. Функция $\nabla R(D_0, z) = 2R_{\bar{z}} = -2i \sin y$, $|y| < \pi/2$, переведет полосу в отрезок от $-2i$ до $2i$.

ПРИМЕР 3. Вычислим коэффициент квазиконформности $k_f(r)$ для градиента конформного радиуса области $f(rE) \subset f(E)$, где $f(\zeta) = [(1 + \zeta)^\alpha - 1]/\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Поскольку $f'(r\zeta) = r(1 + r\zeta)^{\alpha-1}$, конформный радиус в данном случае запишется в виде

$$R(f(rE), f(r\zeta)) = r|1 + r\zeta|^{\alpha-1}(1 - |\zeta|^2).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} R_{\bar{z}} &= (1 + r\zeta)^{(\alpha-1)/2} (1 + r\bar{\zeta})^{-(\alpha+1)/2} \left(\frac{\alpha-1}{2} r - \frac{\alpha+1}{2} r |\zeta|^2 - \zeta \right), \\ R_{\bar{z}\bar{z}} &= (1 + r\zeta)^{(\alpha-1)/2} (1 + r\bar{\zeta})^{-(3\alpha+1)/2} \frac{1 - \alpha^2}{4} r (1 - |\zeta|^2), \\ R_{zz} &= (1 + r\bar{\zeta})^{-(\alpha+1)/2} (1 + r\zeta)^{-(\alpha+1)/2} \\ &\quad \times \frac{1}{r} \left(\frac{(\alpha-1)^2}{4} r^2 - (\alpha+1)r \operatorname{Re} \zeta - \frac{(\alpha+1)^2}{4} r^2 |\zeta|^2 - 1 \right). \end{aligned}$$

Теперь можно перейти непосредственно к оценке отношения, определяющего $k_f(r)$. Используя неравенство $\operatorname{Re} \zeta \geq -|\zeta|$, имеем

$$\left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{zz}} \right| \leq \left| \frac{(1 - \alpha^2)(1 - |\zeta|^2)r^2}{4 - (\alpha-1)^2 r^2 - 4(\alpha+1)r|\zeta| + (\alpha+1)^2 r^2 |\zeta|^2} \right| = r^2 g(|\zeta|).$$

После вычислений, аналогичных приведенным для примера 1, получим $g(r) \leq 1$ и $k_f(r) \leq r^2$.

ПРИМЕР 4. В случае $rz = \ln(1 + r\zeta)$ получим

$$\left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{zz}} \right| \leq \frac{r^2(1 - |\zeta|^2)}{r^2|\zeta|^2 - 4r|\zeta| + 4 - r^2} \leq r^2,$$

так как функция $r^2\rho^2 - 4r\rho + 4 - r^2 - 1 + \rho^2 = g(\rho)$ достигает минимума

$$g(\rho_0) = \frac{(1 - r^2)(3 + r^2)}{1 + r^2} > 0$$

в точке $\rho_0 = 2r/(1 + r^2)$. В отличие от примера 2 обращение $|R_{\bar{z}\bar{z}}/R_{zz}|$ в 1 при $r = 1$ получается только в одной точке $\zeta = -1$ ($\zeta = \xi + i\eta$). В примере 2 $|R_{\bar{z}\bar{z}}/R_{zz}| \equiv 1$ во всех точках круга $|\zeta| \leq 1$.

В качестве заключения отметим следующий факт.

Полученная в примерах 1–4 оценка коэффициента квазиконформности $k_f(r) \leq r^2$ достигается асимптотически для всего класса выпуклых областей $D_f(r)$. Именно, для $D_f(r) = f(rE)/r$, причем $f(\zeta) = \zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \dots$ является выпуклой функцией, сделав необходимые вычисления, имеем

$$\left| \frac{R_{\bar{z}\bar{z}}}{R_{zz}} \right| = 3(1 - |\zeta|^2) \left| \frac{r^2(\bar{a}_3 - \bar{a}_2^2) + r^3 4\zeta(\bar{a}_4 - \bar{a}_2\bar{a}_3) + \dots}{-1 - 6r \operatorname{Re}\{a_2\zeta\} + \dots} \right|.$$

Поэтому $k_f(r) \sim 3(1 - |\zeta|^2)r^2|a_3 - a_2^2| \leq r^2$, так как для выпуклых функций

$$|a_3 - a_2^2| = \frac{1}{6} \left| \{f, \zeta\} \right|_{\zeta=0} \leq \frac{1}{3},$$

где $\{f, \zeta\} = (f''/f')' - (f''/f')^2/2$ – производная Шварца (см., например, [9]).

Можно ожидать, что оценка для

$$k(r) = \sup_{f \in S^0} k_f(r)$$

по всему классу S^0 выпуклых функций $f(\zeta)$ получится в виде

$$k(r) \leq r^2 + \phi(r), \quad 0 < r < 1, \quad (12)$$

причем $\phi(0) = \phi(1) = 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Полия, Г. Сегё, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, Физматлит, М., 1962.
- [2] F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths, *Schwarz–Pick Type Inequalities*, Front. Math., Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [3] H. R. Naegi, “Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrößen”, *Compositio Math.*, **8** (1950), 81–111.
- [4] Ф. Г. Авхадиев, *Конформно инвариантные неравенства и их приложения*, Препринт № 95-1, Казанский фонд “Математика”, Казань, 1995.
- [5] F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths, “The conformal radius as a function and its gradient image”, *Israel J. Math.*, **145** (2005), 349–374.

- [6] А. А. Савелов, *Плоские кривые. Систематика, свойства, применения*, Физматгиз, М., 1960.
- [7] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, М., 1987.
- [8] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, М., 1969.
- [9] Л. А. Аксентьев, “Локальное строение поверхности внутреннего конформного радиуса для плоской области”, *Изв. вузов. Матем.*, 2002, № 4, 3–12.

Л. А. Аксентьев

Казанский государственный университет

E-mail: aksentev@ksu.ru

Поступило

10.12.2007

Исправленный вариант

29.06.2009

А. Н. Ахметова

Казанский государственный университет

E-mail: achmetowa@inbox.ru