Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Магомедов, Уплотнение расписания с директивным сроком, кратным количеству занятий каждого преподавателя, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 1, 65–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4349>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:22:25

Уплотнение расписания с директивным сроком, кратным количеству занятий каждого преподавателя

А. М. Магомедов

Рассматриваются такие исходные данные к учебному расписанию, при которых расписание может быть представлено матрицей с постоянным количеством ненулевых элементов в каждой строке и постоянным множеством элементов в каждом столбце. Исследованы условия, при которых построенную матрицу можно преобразовать к виду, в котором сохранены наборы элементов каждой строки и каждого столбца, при этом в каждой строке ненулевые элементы расположены непрерывно.

Библиография: 7 названий.

Задача составления учебного расписания рассмотрена в [1], условия существования расписания при ограничениях на количество аудиторий изложены в [2]. В п. 1 данной статьи сформулирована задача построения учебного расписания для частного случая. В п. 2 рассмотрены вопросы преобразования расписания к виду, в котором как для каждой учебной группы, так и для каждого преподавателя отсутствуют перерывы между занятиями. Аналогичные вопросы для учебных расписаний различного вида рассмотрены в [3]–[5].

1. Составление учебного расписания. Пусть l, m, n – натуральные числа, $n \leq l$, $L = \{1, 2, \dots, l\}$ и $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множества преподавателей и учебных групп соответственно, для каждой учебной группы множество рабочих часов равно $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $R = (r_{ij})$ – заданная матрица $l \times n$ (l строк, n столбцов), r_{ij} – количество занятий, предписанных i -у преподавателю провести в j -й учебной группе,

$$\forall i \in L \quad \sum_{k=1}^n r_{ik} \leq m, \quad \forall j \in N \quad \sum_{k=1}^l r_{kj} = m. \quad (1)$$

К расписанию учебных занятий предъявляются требования “неразделяемого доступа”: в каждый час из M

- 1) в каждой учебной группе проводится точно одно занятие;
- 2) каждый преподаватель проводит занятие не более чем в одной группе.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ. 1. Мощность *мультимножества* S будем обозначать через $|S|$ (мультимножество отличается от множества лишь тем, что допускается повторение элементов); $\text{гер}_S j$ – количество вхождений элемента j в S ; если

S – семейство мультимножеств $S_1, \dots, S_k$, то $\text{rep}_S j$ определяется соотношением

$$\text{rep}_S j = \sum_{i=1}^k \text{rep}_{S_i} j.$$

2. Мультимножество, образованное ненулевыми элементами i -й строки матрицы C , обозначим через $C[i, *]$, а множество ненулевых элементов k -го столбца матрицы C – через $C[*, k]$.

3. *Допустимым расписанием* (или, кратко, *расписанием*) назовем матрицу C размера $l \times m$ с элементами из множества $N \cup \{0\}$, удовлетворяющую при всех $j \in N$ условиям

$$\forall i \in L \quad \text{rep}_{C[i, *]} j = r_{ij}, \quad \forall k \in M \quad \text{rep}_{C[*, k]} j = 1. \quad (2)$$

Равенство $C_{ik} = j$ интерпретируется при $j \in N$ как занятие i -го учителя в j -й учебной группе в k -й час; равенство $C_{ik} = 0$ означает отсутствие у i -го учителя занятия в k -й час.

Нетрудно видеть, что условия (1) обеспечивают существование допустимого расписания. В самом деле, если $G = (X, Y, E)$ – мультиграф, в котором $X = \{x_i, i \in L\}$, $Y = \{y_j, j \in N\}$, вершины x_i и y_j соединены r_{ij} ребрами, то степени вершин X не превышают m , а степени вершин Y равны m . Поэтому множество E допускает разбиение на m полных паросочетаний E_k множества Y в множество X :

$$E_k = \{(x_{f_k(j)}, y_j), j \in N\};$$

здесь $f_k: N \rightarrow L$ – некоторые инъекции, $k \in M$.

Полагая в матрице C размера $l \times m$

$$C_{f_k(j), k} = j$$

при $k \in M$, $j \in N$, а все остальные элементы – равными нулю, получим допустимое расписание. Всюду в дальнейшем условия (1) предполагаются выполненными.

Допустимое расписание определяется в общем случае неоднозначно. Так, матрица R , приведенная на рис. 1, удовлетворяет условиям (1), $l = 4$, $m = 4$, $n = 3$. В качестве расписаний, соответствующих R , можно, в частности, взять матрицы C_1 и C_2 (рис. 1).

2	1	1		1	1	2	3	1	1	2	3
2	1	1		3	2	1	1	3	2	1	1
0	1	1		2	0	3	0	2	3	0	0
0	1	1		0	3	0	2	0	0	3	2
R				C_1				C_2			

Рис. 1. В строках матрицы C_2 ненулевые элементы расположены непрерывно

Далее $[k_1 \dots k_2]$ – множество целых чисел из промежутка $[k_1, k_2]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что в i -ой строке матрицы C ненулевые элементы расположены *непрерывно*, если

$$(C_{i,k_1} \neq 0, C_{i,k_2} \neq 0, k_1 < k_2) \Rightarrow (\forall k \in [k_1 \dots k_2] C_{i,k} \neq 0).$$

Например, в каждой строке матрицы C_2 (рис. 1) ненулевые элементы расположены непрерывно.

При $l = 3, m = 3, n = 2$ и исходных данных, представленных матрицей R (рис. 2), расписания с подобным свойством не существует. В самом деле, допустим, что в каждой строке некоторого расписания C размера 3×3 ненулевые элементы расположены непрерывно. Поскольку два из трех элементов каждой строки матрицы C принадлежат множеству $N = \{1, 2\}$, то $C_{12} \neq 0, C_{22} \neq 0, C_{32} \neq 0$.

Так как $C[2, *] = \{1, 1\}, C[3, *] = \{2, 2\}$, из непрерывного расположения ненулевых элементов в строках 2 и 3 следует, что $C_{22} = 1, C_{32} = 2$. Так как $C[1, *] = \{1, 2\}$, то $C_{12} = i$, где i равно 1 или 2; последнее при указанных значениях C_{22} и C_{32} означает, что в течение 2-го часа в i -й учебной группе занятия проводят два преподавателя: 1 и $i + 1$, что противоречит требованию “неразделяемого доступа”. Следовательно, расписания с непрерывным расположением ненулевых элементов в каждой строке не существует.

1	1	2	1	0	1	0	2
2	0	1	0	1	0	1	1
0	2	0	2	2	2	2	0
R		C_1		C_2			

Рис. 2. Для R не существует расписания с непрерывным расположением ненулевых элементов в каждой строке; C_1 и C_2 – допустимые расписания

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрицу C' размера $l \times m$ с непрерывным расположением ненулевых элементов в каждой строке назовем *уплотненным образом* (сокращенно – *уплотнением*) расписания C размера $l \times m$, если выполняются условия

$$\forall i \in L \quad C'[i, *] = C[i, *], \quad \forall k \in M \quad C'[:, k] = C[:, k].$$

Уплотненные образы расписаний востребованы в прикладных задачах, где прерывания сопряжены с дополнительными затратами; длительности процессов включения/выключения “приборов”, обслуживающих “задания” в расписании, и их стоимости, как правило, отличны от нуля. Например, для персональных компьютеров – временные затраты на загрузку (и выгрузку) операционной системы, для преподавателей – “избыточное” пребывание в образовательном учреждении и т.п.

Вопросы существования уплотненного образа рассматриваются далее для расписаний, обладающих одним характерным для части приложений свойством.

2. Уплотнение учебного расписания. Рассмотрим расписание C размера $l \times m$, где количество ненулевых элементов в каждой строке равно некоторому постоянному q .

ТЕОРЕМА 1. При $q = 2$ для существования уплотненного образа расписания C необходимо и достаточно условие четности m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $q = 2$ и уплотнение C' расписания C существует. Докажем, что m четно.

Множество столбцов матрицы C' с четными номерами обозначим через C'_0 , а множество столбцов с нечетными номерами – через C'_1 , $|C'_0| + |C'_1| = m$. Каждая строка матрицы C' содержит один ненулевой элемент в столбце с четным номером, а другой ненулевой элемент – в (соседнем) столбце с нечетным номером. Следовательно, ненулевых элементов в столбцах C'_0 столько же, сколько в столбцах C'_1 . Вследствие соотношений

$$\forall k \in M \quad |C'[* , k]| = n,$$

последнее утверждение эквивалентно равенству $|C'_0|n = |C'_1|n$. Другими словами, $|C'_0| = |C'_1|$, поэтому m четно.

Достаточность. Пусть $q = 2$ и m четно. Докажем существование для C уплотненного образа C' . Рассмотрим мультиграф G – совокупность множества вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ и отображения множества $V \times V$ в множество неотрицательных целых чисел:

$$\alpha: (v_i, v_j) \rightarrow |f(i, j)|, \quad \text{где} \quad f(i, j) = \{k : k \in L, C[k, *] = \{i, j\}\}.$$

Граф $G = (V, E)$, в котором кратности ребер (v_i, v_j) равны соответствующим $\alpha(v_i, v_j)$, является m -однородным и согласно теореме Петерсена [6] допускает разбиение на 2-однородные остовные подграфы $G_k = (V, E_k)$, $k = 1, \dots, m/2$. Для каждой компоненты связности $G_k^{(\mu)}$ из G_k ($G_k^{(\mu)}$ является гамильтоновым циклом) выберем произвольно один из обходов:

$$(v_{i_1}, v_{i_2}) \rightarrow (v_{i_2}, v_{i_3}) \rightarrow (v_{i_3}, v_{i_4}) \rightarrow \dots \rightarrow (v_{i_p}, v_{i_{p+1}}), \quad i_1 = i_{p+1}. \quad (3)$$

Уплотненный образ C' расписания построим теперь следующим образом. Сначала все элементы матрицы C' размера $l \times m$ полагаются равными нулю, а строки матрицы C' не помечены. В каждом из G_k выполним перебор компонент связности и для каждой дуги $(v_{i_p}, v_{i_{p+1}})$ компоненты $G_k^{(\mu)}$, представленной в виде (3), разместим i_p и i_{p+1} в любой непомеченной строке λ множества $f(i_p, j_{p+1})$ следующим образом:

$$C'_{\lambda, 2k-1} = i_p, \quad C'_{\lambda, 2k} = i_{p+1},$$

после чего строка λ считается помеченной. В результате получено уплотнение расписания: $C'[i, *] = C[i, *]$, $i \in L$, в каждой строке ненулевые элементы размещены рядом, а каждый столбец содержит множество N и $l - n$ нулей.

Теорема доказана.

Из доказательства видно, что теорему Петерсена [6] о 2-факторизуемости однородного графа четной степени можно сформулировать в следующем виде.

ТЕОРЕМА 2. При $q = 2$ и $m = qk$ (k – целое) семейство q -элементных мульти-множеств S , удовлетворяющее условию

$$\forall j \in N \quad \text{rep}_S j = m,$$

допускает разбиение на k подсемейств S_p таких, что

$$\forall p \in [1 \dots k] \quad \forall j \in N \quad \text{rep}_{S_p} j = q.$$

Следующий пример показывает, что утверждение теоремы не распространяется на случай $q > 2$.

Пусть $q = 3$, $m = l = 6$, C – допустимое расписание размера $l \times m$, удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{aligned} C[1, *] &= \{1, 1, 1\}, & C[2, *] &= \{1, 2, 3\}, & C[3, *] &= \{2, 2, 2\}, \\ C[4, *] &= \{1, 3, 3\}, & C[5, *] &= \{2, 3, 3\}, & C[6, *] &= \{1, 2, 3\}; \end{aligned}$$

пример допустимого расписания приведен на рис. 3. Допустим, что семейство q -элементных мультимножеств $\{C[i, *], i \in L\}$ допускает разбиение на два подсемейства S_1 и S_2 таких, что

$$\forall j \in N \quad \text{rep}_{S_1} j = \text{rep}_{S_2} j = q. \quad (4)$$

Без ограничения общности допустим, что $C[1, *] \in S_1$. Включение $C[2, *]$ в S_1 привело бы к неравенству $\text{rep}_{S_1} 1 > q$; следовательно, $C[2, *] \in S_2$. Аналогично, поскольку

$$(C[2, *] \in S_2, C[3, *] \in S_2) \Rightarrow (\text{rep}_{S_2} 2 > q),$$

то $C[3, *] \in S_1$. Включение в S_1 , которое содержит $C[1, *]$ и $C[3, *]$, любого из оставшихся мультимножеств:

$$C[4, *] = \{1, 3, 3\}, \quad C[5, *] = \{2, 3, 3\}, \quad C[6, *] = \{1, 2, 3\} \quad (5)$$

повлечет выполнение неравенства $\text{rep}_{S_1} 1 > q$ или $\text{rep}_{S_1} 2 > q$. Поэтому все три мультимножества (5) должны быть включены в S_2 . Но тогда $\text{rep}_{S_2} 3 = 6$, что противоречит требованию $\text{rep}_{S_2} 3 = q$. Следовательно, разбиение на подсемейства S_1 и S_2 вида (4) не существует.

Таким образом, исследование необходимых и достаточных условий существования уплотнения расписания C представляет интерес, когда

$$\forall k \in M \quad C[*, k] = N, \quad \forall i \in L \quad |C[i, *]| = q, \quad q > 2. \quad (6)$$

1	1	1	0	0	0
0	2	3	1	0	0
2	0	2	2	0	0
3	0	0	0	1	3
0	0	0	3	3	2
0	3	0	0	2	1

Рис. 3. Семейство $\{C[i, *], i \in L\}$ не допускает разбиения вида (4)

ЛЕММА. Если для расписания C размера $l \times m$, удовлетворяющего условиям (6), существует уплотнение, то

$$m = 0 \pmod{q}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, пусть C' – уплотненный образ C . Тогда каждое мультимножество $C'[i, *]$, $i \in L$, содержит элементы в q последовательных столбцах

матрицы C' . Отсюда следует, что для всех $i \in L$ и всех $p \in [0 \dots q-1]$ найдется точно один столбец матрицы C' , номер которого равен

$$p \pmod{q}, \quad (8)$$

и который содержит ненулевой элемент на пересечении со строкой i . Поэтому для $p \in [0 \dots q-1]$ количество ненулевых элементов в подмножестве столбцов матрицы C с равными (8) номерами (мощность такого подмножества обозначим через m_p), не зависит от p . С другой стороны, коль скоро $|C'[* , k]| = n$ для всех $k \in M$, количество ненулевых элементов в каждом таком подмножестве равно произведению $m_p n$. Тогда $nm_0 = \dots = nm_{q-1}$ или $m_0 = \dots = m_{q-1}$. Отсюда и из очевидного равенства $m_0 + \dots + m_{q-1} = m$ получим (7).

Лемма доказана.

В дальнейшем при рассмотрении необходимых и достаточных условий существования уплотнения расписания, удовлетворяющего (6), (7), ограничимся случаем $m = 2q$; распространение результата на общий случай

$$m = kq, \quad k \in \{3, 4, \dots\},$$

представляет трудности разве лишь технического плана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из $m = 2q$ следует, что $l = 2n$. В самом деле, поскольку каждая из l строк содержит в точности q ненулевых элементов, количество ненулевых элементов в матрице C составляет lq . Так как $m = 2q$ и каждый из столбцов содержит в точности n ненулевых элементов, то $lq = 2qn$, $l = 2n$.

Рассмотрим задачу: для каждого из n -элементных наборов $(k_1, \dots, k_n)$, $k_j \in [0 \dots q]$, проверить существование подсемейства S семейства $\{C[1, *], \dots, C[l, *]\}$, обладающего свойством

$$\forall j \in N \quad \text{rep}_S j = k_j.$$

Произвольно выберем набор $(k_1, \dots, k_n)$. Для $i \in L$, $j \in N$, $\kappa_1, \dots, \kappa_n \in [0 \dots q]$ через $T_C[i, \kappa_1, \dots, \kappa_n]$ обозначим значение истинности утверждения: “в семействе $\{C[1, *], \dots, C[i, *]\}$ существует подсемейство S' такое, что для всех $j \in N$ имеем $\text{rep}_{S'} j = \kappa_j$ ”. Опишем процедуру последовательного заполнения $(n+1)$ -мерной таблицы T_C , изменяя первый индекс от 1 до l .

Равенство $T_C[1, \kappa_1, \dots, \kappa_n] = \text{true}$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $\kappa_1 = \dots = \kappa_n = 0$ (тогда S' – пустое подсемейство), либо для всех $j \in N$ выполнено $\text{rep}_{C[1, *]} j = \kappa_j$. Очевидно также, что

$$T_C[i-1, \kappa_1, \dots, \kappa_n] = \text{true} \Rightarrow T_C[i, \kappa_1, \dots, \kappa_n] = \text{true}. \quad (9)$$

Если

$$T_C[i, \kappa_1, \dots, \kappa_n] = \text{true}, \quad (10)$$

но

$$T_C[i-1, \kappa_1, \dots, \kappa_n] = \text{false}, \quad (11)$$

то $C[i, *]$ непременно входит в S' . Следовательно, если имеет место (11), то для (10) необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$\forall j \in N \quad \text{rep}_{C[i, *]} j \leq \kappa_j, \quad (12)$$

$$T_C[i-1, \kappa_1 - \text{rep}_{C[i, *]} 1, \dots, \kappa_n - \text{rep}_{C[i, *]} n] = \text{true}. \quad (13)$$

Таким образом, итеративный алгоритм заполнения таблицы T_C полностью описан. Легко видеть, что для выбранного набора $(k_1, \dots, k_n)$ ответ на сформулированный вопрос определяется значением $T_C[l, k_1, \dots, k_n]$.

Соотношение (9) способствует результативности компьютерных вычислений по изложенному методу динамического программирования. С другой стороны, естественная сложность алгоритма заполнения таблицы T_C , обусловленная ее размерами, “усугубляется” (при значительных величинах входных данных) вынужденным размещением части информации за пределами оперативной памяти компьютера – в сравнительно “медленной” дисковой памяти.

ТЕОРЕМА 3. *Уплотненный образ расписания C размера $2n \times 2q$ такого, что*

$$|C[i, *]| = q, \quad i \in L,$$

существует тогда и только тогда, когда $T_C[2n, q, \dots, q] = \text{true}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть уплотненный образ C' матрицы C существует. Легко видеть, что тогда в некоторых n строках $t_1, \dots, t_n$ матрицы C' отличны от нуля начальные q элементов, в остальных n строках – последние q элементов (см. выше замечание о равенстве $l = 2n$).

Из

$$\forall k \in M \quad C'[* , k] = C[* , k] = N$$

следует, что

$$\forall j \in N \quad \text{rep}_{\{C[t_1, *], \dots, C[t_n, *]\}} j = \text{rep}_{\{C'[t_1, *], \dots, C'[t_n, *]\}} j = q,$$

откуда $T_C[l, q, \dots, q] = \text{true}$.

Достаточность. Пусть $T_C[l, q, \dots, q] = \text{true}$. Другими словами, в семействе $\{C[1, *], \dots, C[l, *]\}$ найдется подсемейство S , $|S| = n$, такое, что

$$\forall j \in N \quad \text{rep}_S j = q.$$

Пусть $t_1, \dots, t_n$ – номера строк матрицы C , соответствующих S . Построим двудольный мультиграф $G = (X, Y, E)$, где $X = \{x_i, i \in N\}$, $Y = \{y_j, j \in N\}$, кратность ребра $(x_i, y_j) \in E$ равна $\text{rep}_{C[t_i, *]} j$. Множество ребер E однородного степени q графа G представим в виде прямой суммы из q полных паросочетаний множества Y в множество X :

$$E_k = \{(x_{j_k}, y_j), j \in N\}, \quad k \in [1 \dots q];$$

здесь ребро паросочетания E_k , инцидентное вершине y_j , обозначено (x_{j_k}, y_j) . Выберем матрицу C' размера $l \times 2q$, все элементы которой равны нулю. Для каждого $k \in [1 \dots q]$ выполним перебор элементов $j \in N$, полагая

$$C'_{t_{j_k}, k} = j.$$

Первые q столбцов уплотненного расписания построены. Построение столбцов $q+1, \dots, 2q$ выполняется аналогично. Теорема доказана.

В дополнение к сказанному ранее о сложности вычисления элементов таблицы T_C отметим, что изложенная схема заполнения таблицы T_C не рассматривается как

эффективная для вычисления отдельно взятого элемента таблицы; например, для “непосредственного” вычисления значения $T_C[l, q, \dots, q]$ потребуется в худшем случае $O(nq^{2n})$ операций. Примечательно, что вычисление элемента $T_C[l, 2, \dots, 2]$ по этой схеме выполняется за $O(n4^n)$ операций, тогда как его значение определяется из теоремы 1: true при четном количестве столбцов в расписании C и false – в противном случае.

Суть теоремы 3 заключается в том, что при

$$|C[i, *]| = q, \quad i \in L, \quad m = kq,$$

существование уплотненного образа расписания C сводится к существованию разбиения семейства $\{C[i, *], i \in L\}$ на k подсемейств таких, что в q -элементные наборы, составляющие каждое из подсемейств, любой из элементов множества N входит всего q раз (уже отмечалось, что доказательство, приведенное для случая $k = 2$, немедленно распространяется на случай произвольного k). Трудность проблемы очевидна: результат, соответствующий сравнительно простому случаю $q = 2$, эквивалентен теореме Петерсена.

Вопросы сложности задач о непрерывном расписании, представленных в различных вариантах (и в весьма общем виде), рассмотрены в [7]; для ряда случаев доказана принадлежность к классу NP -трудных задач.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Even, A. Itai, A. Shamir, “On the Complexity of Timetable and Integral Multi-Commodity Flow Problems”, *SIAM J. Comput.*, **5:4** (1976), 691–703.
- [2] А. М. Магомедов, “Условия уплотнения расписания”, *Тезисы докладов V международной конференции по математическому моделированию, посвященной 75-летию академика В. Н. Монахова*, Изд-во ООО “РИЦ Офсет”, Якутск, 2007, 65.
- [3] А. М. Магомедов, “Дефрагментация таблиц перестановок с сохранением наборов элементов в линиях”, *Проблемы теоретической кибернетики*, Тезисы докладов XIV международной конференции посвященной 80-летию со дня рождения С. В. Яблонского, Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, М., 2005, 92.
- [4] А. М. Магомедов, “Размещение неделимых 2-слов в матрице как задача факторизации графа”, *Вестн. Дагестанск. научн. центра*, 2006, № 23, 5–14.
- [5] А. М. Магомедов, “Дефрагментация матрицы перестановок в некоторых частных случаях”, *Материалы IX международного семинара “Дискретная математика и приложения”, посвященного памяти академика О. Б. Лупанова*, Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, М., 2007, 200.
- [6] J. Petersen, “Die theorie der regulären graphs”, *Acta Math.*, **15:1** (1891), 193–220.
- [7] В. С. Танаев, Ю. Н. Сотсков, В. А. Струсевич, *Теория расписаний. Многостадийные системы*, Экономико-математическая библиотека, Наука, М., 1989.

А. М. Магомедов

Дагестанский государственный университет

E-mail: magomedtagir1@yandex.ru

Поступило

29.11.2007