Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Столяров, О. Е. Тихонов, А. Н. Шерстнев, Характеризация нормальных следов на алгебрах фон Неймана неравенствами для модуля, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 3, 448–454

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm435>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 17:22:34

УДК 517.986+512.64

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ СЛЕДОВ НА АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА НЕРАВЕНСТВАМИ ДЛЯ МОДУЛЯ

А. И. Столяров, О. Е. Тихонов, А. Н. Шерстнев

Доказано, что если для нормального полуконечного веса φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ для любых самосопряженных операторов a_1, a_2 из $\mathcal{M}$ выполняется неравенство $\varphi(|a_1 + a_2|) \leq \varphi(|a_1|) + \varphi(|a_2|)$, то этот вес является следом. Приведен ряд других схожих характеристик следов среди нормальных полуконечных весов. В частности, уточнен и усилен результат Л. Т. Гарднера о характеристизации следов неравенством $|\varphi(a)| \leq \varphi(|a|)$.

Библиография: 14 названий.

Хорошо известно (см., например, [1, гл. 1, § 6, п. 10]), что для произвольного следа φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ и любых операторов $a_1, a_2 \in \mathcal{M}$ выполняется неравенство

$$\varphi(|a_1 + a_2|) \leq \varphi(|a_1|) + \varphi(|a_2|). \quad (*)$$

Пусть φ – нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$ такой, что это неравенство выполняется для любых самосопряженных операторов из $\mathcal{M}$. Основная цель настоящей заметки – показать, что тогда рассматриваемый вес является следом. Насколько известно авторам, характеристизация следа такого типа не упоминалась в литературе даже для случая положительных функционалов на алгебре (2×2) -матриц.

1. Обозначения, определения и предварительные сведения. Для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов в гильбертовом пространстве через $\mathcal{M}^{\text{sa}}$, $\mathcal{M}^+$ и $\mathcal{M}^{\text{pr}}$ будем обозначать ее подмножества самосопряженных операторов, положительных операторов и проекторов соответственно, $\mathcal{M}^s$ – совокупность симметрий, т.е. унитарных самосопряженных операторов из $\mathcal{M}$, e – единица алгебры $\mathcal{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Весом на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ называется отображение $\varphi: \mathcal{M}^+ \rightarrow [0, +\infty]$ со свойствами

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x), \quad x, y \in \mathcal{M}^+, \quad \lambda \geq 0$$

(при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$).

Для веса φ на $\mathcal{M}$ через $\mathfrak{m}_\varphi^+$ будем обозначать множество $\{x \in \mathcal{M}^+ \mid \varphi(x) < +\infty\}$, через $\mathfrak{m}_\varphi$ – его комплексную линейную оболочку. Множество $\mathcal{M}^{\text{pr}} \cap \mathfrak{m}_\varphi^+$ проекторов с конечным весом будем обозначать через $\mathfrak{p}_\varphi$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00129, и научной программы “Университеты России – фундаментальные исследования”, грант № 990213.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вес φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ называется

- *конечным*, если $\varphi(e) < +\infty$;
- *нормальным*, если $\sup \varphi(x_i) = \varphi(\sup x_i)$ для любой монотонно возрастающей ограниченной сети $\{x_i\} \subset \mathcal{M}^+$;
- *полуконечным*, если множество $\mathfrak{m}_\varphi$ ультраслабо плотно в $\mathcal{M}$;
- *следом*, если $\varphi(x^*x) = \varphi(xx^*)$ для любого $x \in \mathcal{M}$.

Вес φ однозначно продолжается до линейного функционала на $\mathfrak{m}_\varphi$, обозначаемого обычно той же буквой φ . В частности, конечный вес однозначно продолжается до положительного функционала на $\mathcal{M}$. Это позволяет отождествлять конечные веса и положительные функционалы на $\mathcal{M}$.

В работе [2] показано, что условие нормальности веса φ эквивалентно существованию некоторого множества F нормальных положительных функционалов на $\mathcal{M}$ такого, что $\varphi(x) = \sup_{\omega \in F} \omega(x)$ для любого $x \in \mathcal{M}^+$. Это позволяет нам при исследовании нормальных весов использовать результаты работы [3].

Хорошо известно, что вес φ на $\mathcal{M}$ является следом тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = \varphi(uxu^*)$ для любого $x \in \mathcal{M}^+$ и любого унитарного оператора $u \in \mathcal{M}$. При доказательстве следующей характеристики следов существенно используются результаты Х. Упмайера [4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [5, теорема I.4.2]). *Вес φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ является следом тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = \varphi(sxs)$ для любых $x \in \mathcal{M}^+$ и $s \in \mathcal{M}^s$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть φ – нормальный полуконечный вес на полуконечной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Тогда существует семейство попарно ортогональных проекторов из $\mathfrak{p}_\varphi$, в сумме дающих e .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$ (существование такого следа гарантируется полуконечностью алгебры). Согласно теореме 5.12 из [3] существует единственный самосопряженный положительный оператор h , присоединенный к $\mathcal{M}$, такой, что $\varphi = \tau(h \cdot)$. Пусть p_n – спектральный проектор оператора h , соответствующий полуоткрытому интервалу $[n-1, n)$. Так как след τ полуконечен, то для каждого натурального n найдется семейство $\{q_i\}_{i \in \mathcal{I}_n}$ попарно ортогональных проекторов из $\mathfrak{p}_\tau$ такое, что $p_n = \sum_{i \in \mathcal{I}_n} q_i$. Из ограниченности операторов hp_n следует, что все q_i из $\mathfrak{p}_\varphi$. Таким образом,

$$e = \sum_{i \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_n} q_i$$

– требуемое представление e в виде суммы попарно ортогональных проекторов из $\mathfrak{p}_\varphi$.

Для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, веса φ на ней и проектора p из $\mathcal{M}$ через $\mathcal{M}_p$ будем обозначать соответствующую редуцированную алгебру фон Неймана (см. [1, гл. 1, § 2, п. 1]), через φ_p – *редуцированный* вес на $\mathcal{M}_p$, получающийся из ограничения на $p\mathcal{M}p$ веса φ . Заметим, что если φ нормален и $p \in \mathfrak{p}_\varphi$, то φ_p – нормальный конечный вес на $\mathcal{M}_p$.

2. Характеризация следов неравенством субаддитивности для модуля.

ЛЕММА 1. Пусть для веса φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ и некоторых операторов $a \in \mathcal{M}^+$, $s \in \mathcal{M}^s$ выполняются неравенства $\varphi(sas) < \varphi(a) < \infty$. Тогда найдутся операторы $b_1, b_2 \in \mathcal{M}^+$ такие, что $\varphi(|b_1 - b_2|) > \varphi(b_1) + \varphi(b_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\varepsilon = (\varphi(a) - \varphi(sas))/\varphi(a)$ и для параметра $\lambda > 0$ рассмотрим операторы $b_1(\lambda) = \lambda sas + as + sa + \lambda^{-1}a$, $b_2(\lambda) = \lambda sas - as - sa + \lambda^{-1}a$. При любом $\lambda > 0$ эти операторы положительны (так как, например, $b_1(\lambda) = \lambda(s + \lambda^{-1}e) \times a(s + \lambda^{-1}e)$) и $\varphi(b_1(\lambda)) + \varphi(b_2(\lambda)) = 2(\lambda(1 - \varepsilon) + \lambda)\varphi(a)$. Заметим, что

$$\inf_{\lambda > 0} \{\lambda(1 - \varepsilon) + \lambda^{-1}\} = 2(1 - \varepsilon)^{1/2}.$$

Непосредственными вычислениями проверяется, что $|b_1(\lambda) - b_2(\lambda)| = 2(sas + a)$ и $\varphi(|b_1(\lambda) - b_2(\lambda)|) = 2(2 - \varepsilon)\varphi(a)$. Так как $(2 - \varepsilon) > 2(1 - \varepsilon)^{1/2}$, за счет выбора подходящего λ можно получить желаемые операторы b_1 и b_2 .

Из предложения 1 и леммы 1 непосредственно вытекает следующая характеристизация конечных следов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть φ – конечный вес на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Если для любых операторов $a_1, a_2 \in \mathcal{M}^{sa}$ выполняется неравенство $(*)$, то φ – след.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Другое доказательство теоремы 1 можно получить, проверив сначала ее справедливость для случая алгебры $M_2(\mathbb{C})$ комплексных (2×2) -матриц, а затем воспользовавшись техникой работы [6].

Перейдем теперь к бесконечным весам.

ЛЕММА 2. Пусть φ – нормальный полуконечный вес на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ и для любого проектора $p \in \mathfrak{p}_\varphi$ редуцированный вес φ_p на редуцированной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}_p$ является следом. Тогда φ – след.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произвольная алгебра фон Неймана канонически изоморфна произведению полуконечной и чисто бесконечной алгебр фон Неймана (см., например, [1, гл. 1, § 6, п. 7]) и, как нетрудно убедиться, достаточно доказать рассматриваемую лемму для алгебр этих двух типов.

Пусть $\mathcal{M}$ – полуконечная алгебра фон Неймана. Из предложения 2 следует, что найдется монотонно возрастающая сеть $\{p_\alpha\}$ проекторов из $\mathfrak{p}_\varphi$, ультрасильно сходящаяся к e . Рассмотрим инволютивную подалгебру $\mathcal{A} = \bigcup_\alpha p_\alpha \mathcal{M} p_\alpha$ и конечный положительный функционал $\dot{\varphi}$ на ней, получающийся ограничением на $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A} \cap \mathcal{M}^+$ веса φ и продолжением по линейности этого ограничения на всю $\mathcal{A}$. Подалгебра $\mathcal{A}$ ультраслабо плотна в $\mathcal{M}$, $\dot{\varphi}(x^*x) = \varphi(xx^*)$ для любого $x \in \mathcal{A}$ и функционал $y \mapsto \dot{\varphi}(x^*yx)$ ультраслабо непрерывен на $\mathcal{A}$ для любого $x \in \mathcal{A}$, поэтому согласно предложению 3.6 из [7] существует единственный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}^+$, совпадающий с $\dot{\varphi}$ на $\mathcal{A}^+$. Так как этот след совпадает с φ на $\mathcal{A}^+$, то согласно предложению 3.3 из [7] он совпадает с φ на всем $\mathcal{M}^+$, т.е. вес φ является следом.

Если алгебра $\mathcal{M}$ чисто бесконечна, то любая редуцированная алгебра $\mathcal{M}_p$ также чисто бесконечна (см. [1, гл. 1, § 6, п. 8, следствие 4, с. 104]). Согласно предположениям леммы для любого $p \in \mathfrak{p}_\varphi$ вес φ_p на $\mathcal{M}_p$ является (нормальным, конечным) следом, нулевым в силу чистой бесконечности $\mathcal{M}_p$. Таким образом, $\varphi(p) = 0$ для любого $p \in \mathfrak{p}_\varphi$ и из полуконечности веса φ следует, что он нулевой. Это заканчивает доказательство леммы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть φ – нормальный полуконечный вес на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Если для любых операторов $a_1, a_2 \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$ выполняется неравенство $(*)$, то φ – след.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что при любом $p \in \mathfrak{p}_\varphi$ для любых $a_1, a_2 \in \mathcal{M}_p^{\text{sa}}$ выполняется неравенство $\varphi_p(|a_1 + a_2|) \leq \varphi_p(|a_1|) + \varphi_p(|a_2|)$, поэтому согласно теореме 1 конечный вес φ_p на $\mathcal{M}_p$ является следом. По лемме 2 φ – след.

3. Описание нормальных весов, удовлетворяющих неравенству субаддитивности для модуля. Для веса φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ через $q(\varphi)$ будем обозначать проектор из $\mathcal{M}$ такой, что ультраслабое замыкание $\mathfrak{m}_\varphi$ есть $q(\varphi)\mathcal{M}q(\varphi)$ (см. [7, § 2]). Ясно, что вес $\varphi_{q(\varphi)}$ полуконечен.

Пусть $p \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$. Для $a \in \mathcal{M}^+$ положим $\theta^{(p)}(a) = 0$, если $a = rap$, и $\theta^{(p)}(a) = +\infty$ в противном случае. Нетрудно видеть, что $\theta^{(p)}$ – нормальный вес на $\mathcal{M}$ и $q(\theta^{(p)}) = p$.

ТЕОРЕМА 3. Для нормального веса φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ следующие условия эквивалентны:

- (i) для любых операторов $a_1, a_2 \in \mathcal{M}$ выполняется неравенство $(*)$;
- (ii) для любых операторов $a_1, a_2 \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$ выполняется неравенство $(*)$;
- (iii) для любого проектора $p \in \mathfrak{p}_\varphi$ вес φ_p на $\mathcal{M}_p$ является следом;
- (iv) вес $\varphi_{q(\varphi)}$ на $\mathcal{M}_{q(\varphi)}$ является следом;
- (v) вес φ представляется в виде суммы $\varphi = \tau + \theta^{(p)}$, где τ – нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, а p – некоторый проектор из $\mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость импликации (i) $\implies$ (ii) очевидна. Для доказательства импликации (ii) $\implies$ (iii) достаточно повторить первую фразу из доказательства теоремы 2. Справедливость импликации (iii) $\implies$ (iv) следует из леммы 2.

Докажем импликацию (iv) $\implies$ (v). Пусть φ – нормальный вес, удовлетворяющий условию (iv), и пусть $c(q(\varphi))$ обозначает центральный носитель проектора $q(\varphi)$. Согласно [8, лемма 2] нормальный полуконечный след $\varphi_{q(\varphi)}$ на $\mathcal{M}_{q(\varphi)}$ продолжается до нормального полуконечного следа $\tilde{\tau}$ на $\mathcal{M}_{c(q(\varphi))}$. (Требование точности рассматриваемого следа, имеющееся в [8], конечно, является несущественным.) Формула $\tau(a) = \tilde{\tau}(c(q(\varphi))a)$ ($a \in \mathcal{M}^+$) задает нормальный полуконечный след τ на $\mathcal{M}$. Из построения ясно, что $\varphi = \tau + \theta^{(q(p))}$.

Убедимся, наконец, в справедливости импликации (v) $\implies$ (i). Достаточно доказать, что для любых $a_1, a_2 \in \mathcal{M}$, $p \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ выполняется неравенство субаддитивности $\theta^{(p)}(|a_1 + a_2|) \leq \theta^{(p)}(|a_1|) + \theta^{(p)}(|a_2|)$, а для этого достаточно показать, что условие $\theta^{(p)}(|a_1|) = \theta^{(p)}(|a_2|) = 0$ влечет $\theta^{(p)}(|a_1 + a_2|) = 0$. В справедливости же последнего утверждения нетрудно убедиться, проверив, что для $a \in \mathcal{M}$ и $p \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ условие $\theta^{(p)}(|a|) = 0$ эквивалентно условию $\theta^{(p)}(|a|^2) = 0$, т.е. условию $a^*a = pa^*ar$, что, в свою очередь, эквивалентно условию $a(e - p) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Нетрудно проверить, что вес $\theta^{(p)}$ является следом тогда и только тогда, когда проектор p содержится в центре алгебры $\mathcal{M}$. Отсюда видно, что условие полуконечности в теореме 2 отбросить нельзя.

4. Некоторые другие характеристики следов неравенствами. Тривиальным образом проверяется, что для произвольного веса φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ условие (ii) теоремы 3 эквивалентно следующему условию выпуклости для модуля:

(vi) для любых операторов $a_1, a_2 \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$ и любого $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\varphi(|\alpha a_1 + (1 - \alpha)a_2|) \leq \alpha \varphi(|a_1|) + (1 - \alpha)\varphi(|a_2|).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для произвольного веса φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ условие (ii) теоремы 3 эквивалентно следующему условию:

(vii) для любого оператора $a \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$ выполняется соотношение

$$\varphi(|a|) = \inf\{\varphi(a') + \varphi(a'') \mid a', a'' \in \mathcal{M}^+, a = a' - a''\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\delta_\varphi(a)$ правую часть равенства в условии (vii), и пусть $a = a^+ - a^-$ – разложение самосопряженного оператора в виде разности его положительной и отрицательной частей. Так как $\varphi(|a|) = \varphi(a^+) + \varphi(a^-)$ ($a \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$), то для любого веса φ и любого $a \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$ выполняется неравенство $\delta_\varphi(a) \leq \varphi(|a|)$.

Предположим, что для веса φ условие (vii) не выполнено. Тогда найдется оператор $a \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$ такой, что $\delta_\varphi(a) < \varphi(|a|)$. Следовательно, найдется разложение $a = a' - a''$ ($a', a'' \in \mathcal{M}^+$) такое, что $\varphi(a') + \varphi(a'') < \varphi(|a|)$, т.е. $\varphi(|a' + (-a'')|) > \varphi(|a'|) + \varphi(|-a''|)$. Таким образом, показано, что для веса φ не выполнено условие (ii), и доказана импликация (ii) $\implies$ (vii).

Чтобы убедиться в справедливости импликации (ii) $\implies$ (vii), достаточно заметить, что всегда выполняется следующее “неравенство треугольника”:

$$\delta_\varphi(a_1 + a_2) \leq \delta_\varphi(a_1) + \delta_\varphi(a_2) \quad (a_1, a_2 \in \mathcal{M}^{\text{sa}}).$$

Таким образом, выполнение любого из условий (vi), (vii) характеризует следы среди всех нормальных полуконечных весов.

Отметим, что выражение, стоящее в правой части равенства в условии (vii), существенно используется при одном из возможных подходов к построению пространства L_1 , ассоциированного с нормальным полуконечным весом [9] (см. также [10]).

В работе [11] Л. Т. Гарднер для веса φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ рассматривал следующее условие:

(viii) для любого проектора $p \in \mathfrak{p}_\varphi$ для любого оператора $a \in \mathcal{M}_p$ выполняется неравенство

$$|\varphi_p(a)| \leq \varphi_p(|a|),$$

и доказал [11, теорема 2], что выполнение этого условия характеризует следы в классе нормальных “сильно полуконечных” весов, т.е. нормальных весов φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, удовлетворяющих требованию: для любого ненулевого оператора из $\mathcal{M}^+$ найдется мажорируемый им ненулевой оператор из $\mathfrak{m}_\varphi^+$. (Такие веса, называя их “локально конечными”, изучал также Н. В. Трунов [12]–[14].) Из результатов Гарднера [11, теорема 1] следует, однако, что выполнение для веса φ условия (viii) влечет выполнение для этого веса условия (iii) в теореме 3. (Обратная импликация, (iii) $\implies$ (viii), хорошо известна.) Таким образом, получаем следующее уточнение и усиление одного из основных результатов работы [11].

ТЕОРЕМА 4. Для нормального веса φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ выполнение условия (viii) равносильно выполнению каждого из приведенных выше условий (i)–(vii). В частности, нормальный полуконечный вес φ , для которого выполняется условие (viii), является следом.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для нормального веса φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ выполнение каждого из приведенных выше условий (i)–(viii) равносильно выполнению условия (ix) для любого оператора $a \in \mathfrak{m}_\varphi$

$$|\varphi(a)| \leq \varphi(|a|).$$

В частности, нормальный полуконечный вес φ , для которого выполняется условие (ix), является следом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что выполнение условия (ix) влечет выполнение (viii), что влечет согласно теореме 4 выполнение, в частности, условия (iv). С другой стороны, как хорошо известно, условие (ix) выполняется для любого следа φ . Отсюда, предположив, что для веса φ выполнено условие (iv), учитывая соотношение $\mathfrak{m}_\varphi \subset q(\varphi)\mathcal{M}q(\varphi)$, нетрудно заключить, что для φ выполнено и условие (ix).

СЛЕДСТВИЕ 2. Нормальный вес φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ является следом тогда и только тогда, когда он обладает свойством

(x) для $a \in \mathcal{M}$ условие $\varphi(|a|) < \infty$ влечет $a \in \mathfrak{m}_\varphi$ и

$$|\varphi(a)| \leq \varphi(|a|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что в случае, когда вес φ является следом, он обладает свойством (x), хорошо известно.

Для нормального веса φ , обладающего свойством (x), очевидно, выполняется условие (viii), поэтому по теореме 4 вес $\varphi_{q(\varphi)}$ на $\mathcal{M}_{q(\varphi)}$ является следом. Как нетрудно убедиться, вес φ , для которого $\varphi_{q(\varphi)}$ – след, является следом тогда и только тогда, когда проектор $q(\varphi)$ центральный, т.е. совпадает со своим центральным носителем $c(q(\varphi))$.

Пусть нормальный вес φ обладает свойством (x). Предположим, что он не является следом. Тогда $c(q(\varphi)) - q(\varphi) \neq 0$ и в $\mathcal{M}$ найдется ненулевой частично изометрический оператор v такой, что $v^*v \leq q(\varphi)$, $vv^* \leq c(q(\varphi)) - q(\varphi)$ (см., например, [1, гл. III, § 1, лемма 1]). Так как след $\varphi_{q(\varphi)}$ полуконечен, то в $\mathfrak{p}_\varphi$ найдется ненулевой подпроектор p проектора v^*v . Тогда $\varphi(|vp|) = \varphi(p) < \infty$, однако $vp \neq q(\varphi)vpq(\varphi) = 0$, тем более, $vp \notin \mathfrak{m}_\varphi$, а это противоречит свойству (x).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Воспользовавшись результатами работы [6], можно показать, что для нормального веса φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ условия (i)–(ix) эквивалентны еще ряду условий, например, следующему условию “субаддитивности на решетке $\mathcal{M}^{\text{pr}}$ ” (см. [6, теорема 4]):

(xi) для любых $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ выполняется неравенство

$$\varphi(p \vee q) \leq \varphi(p) + \varphi(q).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть теперь φ – положительный функционал на C^* -алгебре $\mathcal{A}$ такой, что для любых эрмитовых элементов a_1, a_2 из $\mathcal{A}$ выполняется неравенство (*). В этом случае, переходя либо к универсальной обертывающей алгебре фон Неймана, либо к ГНС представлению, индуцированному φ , можно показать, что φ является следом (ср. с теоремой 1 в [11] и теоремой 5 в [6]). Остается, однако, открытым вопрос, позволяет ли выполнение (*) для любых эрмитовых элементов a_1, a_2 из $\mathcal{A}$ охарактеризовать следы среди весов на $\mathcal{A}$, удовлетворяющих некоторым естественным условиям, например, плотности $\mathfrak{m}_\varphi$ в $\mathcal{A}$ и полунепрерывности снизу по норме.

Авторы выражают свою признательность А. М. Бикчентаеву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dixmier J. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (algèbres de von Neumann). 2^e édition. Paris: Gauthier-Villars, 1969.
- [2] Haagerup U. Normal weightson W^* -algebras // J. Funct. Anal. 1975. V. 19. № 3. P. 302–317.
- [3] Pedersen G. K., Takesaki M. The Radon–Nikodym theorem for von Neumann algebras // Acta Math. 1973. V. 130. № 1–2. P. 53–87.
- [4] Upmeyer H. Automorphism groups of Jordan C^* -algebras // Math. Z. 1981. V. 176. № 1. P. 21–34.
- [5] Аюпов Ш. А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент: ФАН, 1986.
- [6] Petz D., Zemánek J. Characterizations of the trace // Linear Algebra Appl. 1988. V. 111. P. 43–52.
- [7] Комб Ф. Веса и условные ожидания на алгебрах фон Неймана // Матем. (Сб. переводов). 1974. Т. 18. № 6. С. 80–113.
- [8] Pedersen G. K. The trace in semi-finite von Neumann algebras // Math. Scand. 1975. V. 37. № 1. P. 142–144.
- [9] Шерстнев А. Н. Каждый гладкий вес является l -весом // Изв. вузов. Матем. 1977. № 8. С. 88–91.
- [10] Трунов Н. В., Шерстнев А. Н. Введение в теорию некоммутативного интегрирования // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Итоги науки и техники. Т. 27. М.: ВИНТИ, 1985. С. 167–190.
- [11] Gardner L. T. An inequality characterizes the trace // Canad. J. Math. 1979. V. 31. № 6. P. 1322–1328.
- [12] Трунов Н. В. Локально конечные веса на алгебрах Неймана. Казань: Казанский ун-т, 1978. Деп. ВИНТИ (10 января 1979 г.) № 101-79.
- [13] Трунов Н. В. К теории нормальных весов на алгебрах Неймана // Изв. вузов. Матем. 1982. № 8. С. 61–70.
- [14] Трунов Н. В. Локально конечные веса на алгебрах Неймана и квадратичные формы // Конструктивная теория функций и функционал. анализ. Вып. 5. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1985. С. 80–94.