Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Фёдорова, Теорема Стоуна–Вейерштрасса и пространства мер, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 3, 455–467

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm436>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:07:08

УДК 515

ТЕОРЕМА СТОУНА–ВЕЙЕРШТРАССА И ПРОСТРАНСТВА МЕР

В. П. Фёдорова

Цель настоящей заметки – описать некоторые результаты, касающиеся теорем Стоуна–Вейерштрасса для вполне регулярных пространств.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Классическая теорема Стоуна–Вейерштрасса гласит: если X – бикompактное топологическое пространство, то всякая подалгебра алгебры $C(X)$ всех непрерывных на X вещественных функций, содержащая константы и разделяющая точки из X , плотна в $C(X)$ относительно топологии равномерной сходимости на X . Если в ее формулировке заменить бикompактность X вполне регулярностью, а алгебру $C(X)$ – ее подалгеброй $C_b(X)$ ограниченных функций, то заключение теоремы будет верным только для бикompактного X [1]. Однако при ослаблении обычной нормированной топологии в $C_b(X)$ теорема может оказаться справедливой и для небикompактных пространств. Р. Джайлс [2] получил аналог теоремы Стоуна–Вейерштрасса для всех топологических пространств, введя в $C_b(X)$ свою локальную выпуклую топологию β , и доказал, что в случае вполне регулярного X пространство $(C_b(X), \beta)'$ отождествимо с пространством всех обобщенных радоновских мер на X . Так же обстоит дело с вариантом теоремы Стоуна–Вейерштрасса для векторных решеток (теоремой Крейнов–Какутани). В предлагаемой нами заметке берется за основу решеточная форма теоремы. Векторная решетка $C_b(X)$, где X – вполне регулярное пространство, рассматривается с локально выпуклыми топологиями t , для которых $(C_b(X), t)'$ – пространство τ -аддитивных функционалов. Для некоторых классов пространств X найдены аналоги теоремы Стоуна–Вейерштрасса.

2. Предварительные сведения. Основные понятия и результаты общей топологии взяты из книг Р. Энгелькинга [3] и Н. Бурбаки [4], а теории векторных решеток и ТВП – из книги Х. Шефера [5]. В теории интегрирования и интегральных представлений линейных функционалов мы основываемся на работах [6]–[8]. Векторные пространства рассматриваются только над полем $\mathbb{R}$. Линейные операции во всех пространствах функций считаются определенными поточечно.

Пусть L – векторная решетка. Верхняя (нижняя) грань ее элементов x и y записывается $x \vee y$ (соответственно $x \wedge y$). Символом L^+ обозначается множество всех положительных элементов L . Множество $E \subset L$ называется *нормальным*, если из условий $x \in E$, $y \in L$ и $|y| \leq |x|$ следует, что $y \in E$, и *подрешеткой*, если вместе с любыми его элементами x и y в E входят $x \vee y$ и $x \wedge y$. *Векторной подрешеткой векторной*

решетки L называется векторное подпространство L , являющееся подрешеткой. Векторное подпространство Q векторной решетки L называется l -идеалом, если Q – нормальное множество. Максимальным l -идеалом векторной решетки называется собственный l -идеал, не содержащийся ни в каком другом собственном l -идеале. Линейное отображение φ векторной решетки L в векторную решетку E называется *решеточным гомоморфизмом*, если для всех $x, y \in E$ выполнено

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y), \quad \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y).$$

Решеточный гомоморфизм векторной решетки L в $\mathbb{R}$ будем называть *решеточным гомоморфизмом на L* . Максимальный l -идеал векторной решетки – не что иное, как ядро нетривиального решеточного гомоморфизма. Функционал F на векторной решетке L называется *положительным*, если $F(x) \geq 0$ для всех $x \in L^+$.

Обозначим через $\Phi(X)$ множество всех вещественных функций на множестве X , через v топологию в $\Phi(X)$ поточечной сходимости на X ; $\Phi(X)$ – векторная решетка относительно поточечно определенных линейных операций и поточечного упорядочения. Векторной решеткой функций на множестве X будем называть всякую векторную подрешетку $\Phi(X)$. Если X – топологическое (равномерное) пространство, то $C(X)$ (соответственно $P(X)$) означает множество всех вещественных непрерывных (соответственно равномерно непрерывных) функций на X . $C(X)$ и $P(X)$ являются векторными решетками функций на X . Их векторные подрешетки ограниченных функций обозначаются $C_b(X)$ и $P_b(X)$ соответственно.

Пусть $\Lambda(X)$ – векторная решетка функций на множестве $X \neq \emptyset$ и z – произвольная формальная линейная комбинация элементов X , т.е. $z = \sum_{x \in X} \lambda_x x$, где λ_x – вещественные числа и $\lambda_x \neq 0$ лишь для конечного множества элементов x . Полагая для каждого $f \in \Lambda(X)$

$$z(f) = \sum_{x \in X} \lambda_x f(x),$$

получаем линейный функционал на $\Lambda(X)$. Функционалы такого типа называются *молекулярными*. Молекулярные функционалы вида $z = \lambda x$, где $x \in X$ и $\lambda \geq 0$, и только они, являются v -непрерывными решеточными гомоморфизмами на $\Lambda(X)$. Функционал F на $\Lambda(X)$ называется τ -аддитивным (σ -аддитивным), если F линеен, и для всякой направленности $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ (последовательности (f_n)) в $\Lambda(X)$, убывающая поточечно сходящейся к нулю, выполнено $F(f_\alpha) \rightarrow 0$ (соответственно $F(f_n) \rightarrow 0$). Пространство всех τ -аддитивных функционалов на $C_b(X)$ обозначается M_τ , а M_τ^+ означает множество всех положительных функционалов из M_τ .

Пусть X – отделимое равномерное пространство, $\hat{X}$ – его пополнение, $\mathfrak{M}$ – множество всех равномерно непрерывных поточечно ограниченных подмножеств $P(X)$, а $\mathfrak{N}$ – множество всех тех подмножеств из них, которые равномерно ограничены. Если каждое $\hat{x} \in \hat{X}$ отождествить с функционалом $\varphi(f) = f(\hat{x})$ на $P(X)$ (на $P_b(X)$), то $\hat{X}$ – множество всех решеточных гомоморфизмов φ на $P(X)$ (на $P_b(X)$), v -непрерывных на каждом $H \in \mathfrak{M}$ (соответственно $H \in \mathfrak{N}$) и таких, что $\varphi(1) = 1$ [9]. Элементы самого X , и только они, являются v -непрерывными решеточными гомоморфизмами на $P(X)$ ($P_b(X)$), удовлетворяющими условию $\varphi(1) = 1$.

Вполне регулярное топологическое пространство X называется *вещественно полным*, если X полно относительно слабойшей из равномерных структур, при которых

все функции $f \in C(X)$ равномерно непрерывны. Эту структуру будем обозначать u_C . Базис ее равномерных окружений составляют всевозможные множества вида

$$U_{H,\varepsilon} = \{(x, y) \in X \times X : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ (f \in H)\}, \quad (1)$$

где H – конечное множество в $C(X)$, ε – положительное число. *Вещественным пополнением* вполне регулярного пространства X называется пополнение пространства (X, u_C) . Пространство X называется *топологически полным*, если для какой-либо равномерной структуры u в X , порождающей его топологию, пространство (X, u) полно, и это означает полноту X относительно сильнейшей из равномерных структур, порождающих его топологию.

Борелевскими множествами в топологическом пространстве X называются члены наименьшей σ -алгебры $\mathbf{B}$, содержащей все открытые множества. *Борелевской мерой* пространства X будем называть всякую счетно-аддитивную функцию на $\mathbf{B}$ со значениями в $[0, +\infty)$. Борелевская мера μ пространства X называется *радоновской*, если выполнено следующее условие:

$$\mu A = \sup\{\mu E : E \text{ бикompактно и } E \subset A\}, \quad A \in \mathbf{B}.$$

Обобщенной радоновской мерой называется всякая функция на $\mathbf{B}$ со значениями в $\mathbb{R}$, представляемая в виде разности радоновских мер. Говорят, что линейному функционалу F на $C_b(X)$ *соответствует борелевская мера μ* , если выполнено

$$F(f) = \int_X f d\mu, \quad f \in C_b(X).$$

3. Определения и примеры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\Lambda(X)$ – векторная решетка функций на множестве X , наделенная какой-либо топологией t . Будем говорить, что для пространства $(\Lambda(X), t)$ *справедлива теорема Стоуна–Вейерштрасса* (коротко *теорема С–В*), если всякая векторная подрешетка $\Lambda(X)$, плотная в $\Lambda(X)$ относительно топологии v , является t -плотной.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что если для $(\Lambda(X), t)$ справедлива теорема С–В, то она справедлива и при замене t более слабой топологией в $\Lambda(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если для отделимого локально выпуклого пространства $(\Lambda(X), t)$ справедлива теорема С–В, то она справедлива при наделении $\Lambda(X)$ любой локально выпуклой топологией, согласующейся с той же двойственностью. Это следует из того, что замыкание векторного пространства в отделимом локально выпуклом пространстве E определяется дуальной парой $\langle E, E' \rangle$ [5, с. 166].

ПРИМЕР 1. Если X – бикompакт и t -топология в $C(X)$ равномерной сходимости на X , то для $(C(X), t)$ справедлива теорема С–В [4].

ПРИМЕР 2. *Топологическим M -пространством* называется векторная решетка с топологией, согласующейся с векторной структурой и обладающей базисом окрестностей нуля, состоящим из нормальных подрешеток [10]. Пусть $\Lambda(X)$ – векторная решетка функций на множестве X , t – хаусдорфова топология в ней и $(\Lambda(X), t)$ – топологическое M -пространство, причем всякий t -непрерывный решеточный гомоморфизм на $\Lambda(X)$ является v -непрерывным. Тогда для $(\Lambda(X), t)$ справедлива теорема С–В.

Действительно, пусть Q – v -плотная векторная подрешетка $\Lambda(X)$, E – множество всех t -непрерывных решеточных гомоморфизмов на $\Lambda(X)$. По условию каждый функционал из E является v -непрерывным, и значит, молекулярным функционалом вида $z = \lambda x$, где $x \in X$, $\lambda \geq 0$. Каждое $f \in \Lambda(X)$ однозначно продолжается на E , если положить $\bar{f}(z) = \lambda f(x)$ для всякого $z = \lambda x$ из E . Пусть $\sigma(E, \Lambda(X))$ – слабейшая из топологий в E , для которых непрерывны продолжения $\bar{f}$ всевозможных функций $f \in \Lambda(X)$. Топология t есть топология равномерной сходимости на множествах некоторого семейства $\mathfrak{S}$ подмножеств E , бикомпактных в топологии $\sigma(E, \Lambda(X))$ [10]. Для каждого $S \in \mathfrak{S}$ обозначим через H_S множество сужений на S всевозможных $\bar{h}$, где $h \in Q$. Нетрудно видеть, что H_S – подрешетка $C(S)$. Используя v -плотность Q в $\Lambda(X)$, получим, что каково бы ни было $f \in \Lambda(X)$, для всякого $\varepsilon > 0$ и любых элементов s_1 и s_2 из S существует $g \in H_S$ такое, что

$$|\bar{f}(s_i) - g(s_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Тогда согласно [4, с. 239] для каждого $f \in \Lambda(X)$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется функция из H_S , равномерно приближающая $\bar{f}$ на S с точностью до ε . Пусть $f_{S,\varepsilon}$ – порождающая ее функция из Q . Семейство $f_{S,\varepsilon}$ будет направленностью, если условиться, что $(S, \varepsilon) \preceq (S', \varepsilon')$ тогда и только тогда, когда $S' \supset S$, а $\varepsilon' \leq \varepsilon$. Эта направленность сходится к f равномерно на каждом $S \in \mathfrak{S}$, т.е. относительно t .

ПРИМЕР 3. Пусть X – отделимое равномерное пространство, t – отделимая локально выпуклая топология в $P_b(X)$ и $(P_b(X), t)'$ – пространство всех линейных функционалов на $P_b(X)$, представимых в виде интеграла по обобщенной радоновской мере на X . Тогда для $(P_b(X), t)$ справедлива теорема С–В.

В самом деле, в пространстве $P_b(X)$ существует топология отделимого топологического M -пространства, согласующаяся с той же, что и t , двойственностью, и непрерывные в ней решеточные гомоморфизмы имеют вид λx , где $\lambda \geq 0$, $x \in X$ [11].

ПРИМЕР 4. Пусть X – вещественно полное пространство, t – локально выпуклая топология в $C(X)$, для которой $(C(X), t)'$ есть множество всех линейных функционалов на $C(X)$, ограниченных на каждом порядковом интервале. Тогда для $(C(X), t)$ справедлива теорема С–В.

Действительно, $(C(X), t)'$ совпадает с пространством всех линейных функционалов на $C(X)$, непрерывных в топологии $t_{\mathbf{B}}$ равномерной сходимости на бикомпактах из X [12]; $(C(X), t_{\mathbf{B}})$ – отделимое топологическое M -пространство, всякий $t_{\mathbf{B}}$ -непрерывный линейный функционал τ -аддитивен, и значит, всякий $t_{\mathbf{B}}$ -непрерывный решеточный гомоморфизм v -непрерывен. Следовательно, для $(C(X), t_{\mathbf{B}})$ справедлива теорема С–В (пример 2), а тогда она справедлива и для $(C(X), t)$ (замечание 2).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $\Lambda(X)$ – векторная решетка функций на множестве X , t – топология в ней и для $(\Lambda(X), t)$ справедлива теорема С–В, то всякий максимальный l -идеал в $\Lambda(X)$, замкнутый относительно топологии t , является v -замкнутым.

В самом деле, пусть Q – максимальный l -идеал в $\Lambda(X)$, замкнутый относительно t , и Q_1 – его v -замыкание. Тогда $Q_1 \neq \Lambda(X)$, так как в противном случае из справедливости теоремы С–В вытекало бы $Q = \Lambda(X)$, но это противоречит тому, что Q – собственный l -идеал. Таким образом Q_1 – собственный l -идеал. Учитывая максимальность Q , получаем $Q = Q_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Условимся говорить, что вполне регулярное пространство X обладает свойством Стоуна–Вейерштрасса, если при наделении $C_b(X)$ всякой локально выпуклой топологией t , удовлетворяющей условию $(C_b(X), t)' = \mathbf{M}_\tau$, для пространства $(C_b(X), t)$ справедлива теорема С–В.

4. Основные результаты. Вполне регулярное пространство X будем предполагать вложенным в его бикомпактное расширение Стоуна–Чеха βX . Каждому функционалу F на $C_b(X)$ однозначно соответствует функционал $\bar{F}$ на $C(\beta X)$, определяемый таким образом:

$$\bar{F}(\bar{f}) = F(f), \quad \bar{f} \in C(\beta X), \quad (2)$$

где f – сужение $\bar{f}$ на X . В дальнейшем будем обозначать одинаково функцию из $C_b(X)$ и ее непрерывное продолжение на βX .

Кроме теоремы Рисса–Маркова нам понадобятся следующие факты, касающиеся интегральных представлений линейных функционалов на $C_b(X)$, где X – вполне регулярное пространство.

1°. Каждому положительному τ -аддитивному функционалу на $C_b(X)$ соответствует борелевская мера в X [8].

2°. Если F – положительный τ -аддитивный функционал на $C_b(X)$ и ν – существующая согласно теореме Рисса–Маркова радоновская мера в βX , соответствующая функционалу $\bar{F}$, то для всякого замкнутого множества E в βX , не пересекающегося с X , выполнено $\nu E = 0$ [8].

3°. Каждый элемент множества $\mathbf{M}_\tau$ равен разности положительных элементов [7].

Если $\langle E, F \rangle$ – дуальная пара векторных пространств, то символом $\sigma(E, F)$ обозначается слабейшая из локально выпуклых топологий в E , для которых $E' = F$.

ТЕОРЕМА 1. Вполне регулярное пространство X , являющееся борелевским множеством в своем бикомпактном расширении Стоуна–Чеха βX , обладает свойством С–В.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q – векторная подрешетка $C_b(X)$, плотная относительно топологии v . В силу замечания 2 достаточно доказать плотность Q в $C_b(X)$ относительно топологии $\sigma(C_b(X), \mathbf{M}_\tau)$. С учетом разложений

$$C_b(X) = C_b^+(X) - C_b^+(X), \quad \mathbf{M}_\tau = \mathbf{M}_\tau^+ - \mathbf{M}_\tau^+$$

остается убедиться, что для каждой функции $f_0 \in C_b^+(X)$, каждого конечного набора $\mathfrak{F}$ элементов $\mathbf{M}_\tau^+$ и каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется функция $g \in Q$ такая, что

$$|F(f_0) - F(g)| < \varepsilon, \quad F \in \mathfrak{F}.$$

По теореме Рисса–Маркова для всякого $F \in \mathfrak{F}$ существует единственная радоновская мера ν пространства βX , соответствующая функционалу $\overline{F}$. Пусть $\mathcal{N}$ – набор радоновских мер пространства βX , соответствующих всевозможным $\overline{F}$, $F \in \mathfrak{F}$. Множество $\beta X \setminus X$ является борелевским в βX , и тогда для всякого $\nu \in \mathcal{N}$, учитывая регулярность ν и утверждение 2° , получаем

$$\nu(\beta X \setminus X) = \sup\{\nu B : B \text{ — бикомпакт в } \beta X \setminus X\} = 0.$$

Пусть δ – произвольное положительное число. По каждой мере $\nu \in \mathcal{N}$ в силу ее регулярности и ограниченности функции f_0 найдется открытое множество G_ν в βX , содержащее $\beta X \setminus X$ и удовлетворяющее условиям

$$\nu(G_\nu) < \delta, \quad \int_{G_\nu} f_0 d\nu < \delta.$$

Множество $G = \bigcap_{\nu \in \mathcal{N}} G_\nu$ открыто в βX , $\beta X \setminus X \subset G$, причем для каждого $\nu \in \mathcal{N}$ выполнено

$$\nu G < \delta, \quad \int_G f_0 d\nu < \delta.$$

Положим $Y = X \setminus G$. Множество Y равно $\beta X \setminus G$ и, следовательно, бикомпактно в βX . Сужения на Y всевозможных функций из Q образуют векторную подрешетку $C_b(Y)$, плотную относительно топологии поточечной сходимости на Y . По теореме С–В для бикомпакта (пример 1) найдется функция $h \in Q$ такая, что

$$|f_0(x) - h(x)| < \delta, \quad x \in Y,$$

при этом можно взять $h \geq 0$. Для функции h в силу ее ограниченности и регулярности мер $\nu \in \mathcal{N}$ существует такое открытое в βX множество E , что $\beta X \setminus X \subset E \subset G$ и $\int_E h d\nu < \delta$ для всех $\nu \in \mathcal{N}$. Множество $Z = X \setminus E = \beta X \setminus E$ бикомпактно в βX , и рассуждая так же, как в случае бикомпакта Y , по теореме С–В найдем функцию $f \in Q^+$ такую, что $|f_0(x) - f(x)| < \delta$ для всех $x \in Z$. Положим $g = h \wedge f$. Учитывая разложение

$$\beta X = Y \cup (G \setminus E) \cup E,$$

получим для каждого $F \in \mathfrak{F}$ и соответствующей ему меры $\nu \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} |F(f_0) - F(g)| &= \left| \int_{\beta X} f_0 d\nu - \int_{\beta X} g d\nu \right| = \left| \int_{\beta X} (f_0 - g) d\nu \right| \\ &\leq \left| \int_Y (f_0 - g) d\nu \right| + \left| \int_{G \setminus E} (f_0 - g) d\nu \right| + \left| \int_E (f_0 - g) d\nu \right|. \end{aligned} \quad (3)$$

Оценим каждое из слагаемых. Так как $Y \subset Z$, то для всякого $x \in Y$ выполнено

$$|f_0(x) - g(x)| = |f_0(x) - (h \wedge f)(x)| \leq \max(|f_0(x) - h(x)|, |f_0(x) - f(x)|) < \delta. \quad (4)$$

Положив $m = \max\{\nu(\beta X) : \nu \in \mathcal{N}\}$, получим из неравенства (4)

$$\left| \int_Y (f_0 - g) d\nu \right| \leq \delta \nu(\beta X) \leq \delta m, \quad \nu \in \mathcal{N}. \quad (5)$$

Далее, $G \setminus E \subset X \setminus E = Z$ и, следовательно, на $G \setminus E$ имеют место неравенства $0 \leq g \leq f \leq f_0 + \delta$. Учитывая их и соотношения $\int_{G \setminus E} f_0 d\nu < \delta$, $\nu \in \mathcal{N}$, получаем для каждого $\nu \in \mathcal{N}$

$$\left| \int_{G \setminus E} (f_0 - g) d\nu \right| \leq \int_{G \setminus E} f_0 d\nu + \int_{G \setminus E} g d\nu \leq 2 \int_{G \setminus E} f_0 d\nu + \delta \nu(G \setminus E) \leq \delta(2 + m). \quad (6)$$

Так как $E \subset G$, при каждом $\nu \in \mathcal{N}$ выполнено

$$\left| \int_E (f_0 - g) d\nu \right| \leq \int_E f_0 d\nu + \int_E g d\nu \leq \int_G f_0 d\nu + \int_E h d\nu < 2\delta. \quad (7)$$

Из соотношений (3)–(7) вытекает

$$|F(f_0) - F(g)| < \delta(2m + 4), \quad F \in \mathfrak{F}.$$

Для завершения доказательства остается взять $\delta < \varepsilon/(2m + 4)$.

Далее $\mathcal{H}$ означает множество всех равностепенно непрерывных равномерно ограниченных подмножеств $C_b(X)$, u_0 – сильнейшую из равномерных структур в X , согласующихся с его топологией. Структура u_0 описывается как структура равномерной сходимости на множествах $H \in \mathcal{H}$, т.е. базис системы ее равномерных окружений составляют всевозможные множества вида (1), где H пробегает $\mathcal{H}$, а ε – множество всех положительных чисел [13]. Если u – равномерная структура в множестве X , $U \in u$ и $A \subset X$, то $U(A)$ означает множество $\bigcup_{x \in A} U(x)$.

ЛЕММА 1 [14]. *Всякий функционал $F \in M_\tau^+$ является пределом некоторой направленности молекулярных функционалов*

$$\left(\sum_{x \in X} \lambda_x^\alpha x \right)_{\alpha \in \mathcal{A}}$$

с коэффициентами $\lambda_x^\alpha \geq 0$, равномерно сходящейся к F на каждом $H \in \mathcal{H}$. При этом для всякого $\varepsilon > 0$ и всякого окружения U равномерной структуры u_0 существует $\beta \in \mathcal{A}$ такое, что при всех $\alpha \geq \beta$ выполнено

$$\sum_{x \notin U(M_\beta)} \lambda_x^\alpha < \varepsilon,$$

где $M_\beta = \{x \in X : \lambda_x^\beta \neq 0\}$.

ЛЕММА 2. Пусть $F \in M_\tau^+$, μ – борелевская мера, соответствующая F . Тогда для всякого замкнутого окружения $U \in u_0$ и всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется конечное множество K в X такое, что $\mu(X \setminus U(K)) \leq \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 существует направленность

$$\left(\sum_{x \in X} \lambda_x^\alpha x \right)_{\alpha \in \mathcal{A}}$$

молекулярных функционалов с коэффициентами $\lambda_x^\alpha \geq 0$, сходящаяся к F равномерно на каждом $H \in \mathcal{H}$. Пусть V – симметричное окружение равномерной структуры u_0 , удовлетворяющее условию $V \circ V \subset U$. По лемме 1 для V существует $\beta \in \mathcal{A}$ такое, что

$$\sum_{x \notin V(M_\beta)} \lambda_x^\alpha < \varepsilon, \quad \alpha \geq \beta.$$

Положим $K = M_\beta$ и $G = X \setminus U(K)$. Найдется равностепенно равномерно непрерывное относительно u_0 семейство функций f_t , $t \in X$, каждая из которых удовлетворяет условиям: $0 \leq f_t \leq 1$, $f_t(t) = 1$ и $f_t(x) = 0$ для всех $x \notin V(t)$ [9]. Рассмотрим на X функцию

$$h(x) = \sup\{f_t(x) : t \in G\}.$$

Она непрерывна и удовлетворяет условиям $0 \leq h \leq 1$, $h(x) = 1$ для всех $x \in G$. Докажем, что h равна нулю на $V(K)$. Пусть $x \in V(K)$, т.е. $x \in V(y)$ для некоторого $y \in K$. Тогда $x \notin V(t)$ для каждого $t \in G$, так как в противном случае для некоторого $t \in G$ имели бы $t \in (V \circ V)(y)$ и, следовательно, $t \in U(y)$, что противоречит заданию G . Таким образом, $f_t(x) = 0$ для всех $t \in G$, и значит, $h(x) = 0$. Учитывая свойства h , получаем

$$\mu G \leq \int_X h \, d\mu = \lim_\alpha \sum_{x \in X} \lambda_x^\alpha h(x) = \lim_\alpha \sum_{x \notin V(K)} \lambda_x^\alpha h(x).$$

Но для всех $\alpha \geq \beta$ выполнено

$$\sum_{x \notin V(K)} \lambda_x^\alpha h(x) \leq \sum_{x \notin V(K)} \lambda_x^\alpha < \varepsilon$$

и, таким образом, $\mu G \leq \varepsilon$.

ЛЕММА 3 [14]. Если X – топологически полное пространство, то для всякого бикомпактного множества B пространства βX , не пересекающегося с X , существует такое окружение $V \in u_0$, что для всякого конечного множества $M \subset X$ найдется функция $p \in C_b^+(X)$ такая, что $p(x) = 0$ для всех $x \in B$ и $p(x) = 1$ для всех $x \in V(M)$.

Пусть S – вещественное пополнение вполне регулярного пространства X . Его элементы, рассматриваемые как решеточные гомоморфизмы на $C(X)$, являются σ -аддитивными, так как σ -аддитивны все положительные линейные функционалы на $C(X)$ [15]. Множество S вкладывается в βX при отождествлении каждого своего элемента s с решеточным гомоморфизмом φ_s на $C_b(X)$. Но φ_s является сужением на $C_b(X)$ решеточного гомоморфизма на $C(X)$ [9] и, следовательно, также σ -аддитивен.

ЛЕММА 4. Пусть X – топологически полное пространство и μ – борелевская мера пространства X , соответствующая некоторому τ -аддитивному функционалу F на $C_b(X)$. Тогда каковы бы ни были конечное множество K в X и конечное множество L в $S \setminus X$, существует борелевское множество E в X и функция $g \in C_b(X)$ такие, что $K \subset E$, $\mu E = \mu X$, $g(x) = 1$ для всех $x \in E$ и $g(s) = 0$ для всех $s \in L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – равномерное окружение, о котором говорится в лемме 3, соответствующее случаю, когда $B = L$, и U – замкнутое окружение равномерной структуры u_0 такое, что $U \circ U \subset V$. Учитывая лемму 2, найдем для каждого $n \in \mathbb{N}$ конечное множество K_n , содержащее K , такое, что

$$\mu(X \setminus U(K_n)) \leq \frac{1}{n},$$

и положим

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U(K_n).$$

Тогда E – борелевское множество в X , $K \subset E$ и

$$\mu E \geq \mu(U(K_n)) \geq \mu X - \frac{1}{n}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. т.е. $\mu E = \mu X$. Пусть $(f_t)_{t \in E}$ – равностепенно равномерно непрерывное относительно u_0 семейство функций на X таких, что $0 \leq f_t \leq 1$, $f_t(t) = 1$ и $f_t(x) = 0$ для всех $x \notin U(t)$. Функция

$$g(x) = \sup\{f_t(x) : t \in E\}, \quad x \in X,$$

непрерывна и $g(x) = 1$ для всякого $x \in E$. Осталось доказать, что $g(s) = 0$ для всех $s \in L$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ введем функции g_n и h_n на X , положив

$$g_n(x) = \sup\{f_t(x) : t \in U(K_n)\}, \quad x \in X, \quad h = \bigvee_{i=1}^n g_i.$$

Последовательность h_n возрастает и сходится поточечно на X к g . Элементы S , рассматриваемые как линейные функционалы на $C_b(X)$, являются σ -аддитивными и, следовательно, $g(s) = \lim h_n(s)$ для каждого $s \in L$. Согласно выбору окружения V , для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует функция p_n из $C_b^+(X)$ такая, что $p_n(s) = 0$ для всех $s \in L$ и $p_n(x) = 1$ для всех $x \in V(K_n)$. Докажем, что $0 \leq g_n \leq p_n$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Если $x \in X \setminus V(K_n)$, то

$$x \notin (U \circ U)(K_n) = U(U(K_n))$$

и, следовательно, $g_n(x) = 0 \leq p_n(x)$. Если же $x \in V(K_n)$, то $g_n(x) \leq 1 = p_n(x)$, и неравенство доказано. Учитывая его, получаем, что $g_n(s) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $s \in L$. Отсюда следует, что $h_n(s) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $s \in L$, и, окончательно, $g(s) = \lim h_n(s) = 0$ для всех $s \in L$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть X – топологически полное пространство, K и L – конечные множества в X и $S \setminus X$ соответственно, $\{\mu_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ – конечный набор борелевских мер, соответствующих τ -аддитивным функционалам. Тогда существует борелевское множество E в X и функция $g \in C_b(X)$ такие, что $K \subset E$, $\mu_i(E) = \mu_i(X)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $g(x) = 1$ для всех $x \in E$ и $g(s) = 0$ для всех $s \in L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякого $i \in 1, \dots, n$ найдем борелевское множество E_i и функцию $g_i \in C_b(X)$, о которых говорится в лемме 4. Остается положить

$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i, \quad g = \left(\bigvee_{i=1}^n g_i \right) \wedge 1.$$

В теореме 2 символом $\overline{F}$ обозначается линейный функционал на $C_b(S)$, порожденный линейным функционалом F на $C_b(X)$ следующим образом:

$$\overline{F}(f) = F(f|_X), \quad f \in C_b(S).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – топологически полное пространство, S – его вещественное пополнение, M_X – векторное подпространство M_τ , каждый элемент которого разлагается в разность положительных элементов, и пусть $M_S = \{\overline{F}, F \in M_X\}$. Если для пространства

$$(C_b(S), \sigma(C_b(S), M_S))$$

справедлива теорема С–В, то она справедлива и для

$$(C_b(X), \sigma(C_b(X), M_X)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q – ν -плотная векторная подрешетка $C_b(X)$. Докажем, что для всякого $f_0 \in C_b(X)$, произвольного набора $\{F_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ из M_X и произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется $g_0 \in Q$ такое, что

$$|F_i(g_0) - F_i(f_0)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Учитывая разложимость каждого элемента из M_X в разность положительных элементов, достаточно рассмотреть случай, когда все F_i положительны. Пусть μ_i – борелевская мера, соответствующая функционалу F_i . Определим множество $R \subset C_b(X)$ следующим образом: $h \in C_b(X)$ принадлежит R тогда и только тогда, когда существует $q \in Q$ и борелевское множество E в X такие, что

$$\mu_i(E) = \mu_i(X), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и $h(x) = q(x)$ для всех $x \in E$. Нетрудно убедиться, что R – векторная подрешетка $C_b(X)$. Отождествляя каждую функцию из $C_b(X)$ с ее непрерывным продолжением

на S , можно рассматривать R и как векторную подрешетку $C_b(S)$. Докажем, что она плотна в $(C_b(S), v)$. Для произвольного конечного множества M из S положим

$$K = M \cap X, \quad L = M \cap (S \setminus X).$$

Согласно следствию из леммы 4 найдутся борелевское множество E , содержащее K , и функция $g \in C_b(X)$ такие, что

$$\mu_i(E) = \mu_i(X), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$g(x) = 1$ для всех $x \in E$ и $g(y) = 0$ для всех $y \in L$. Пусть f – произвольный элемент $C_b(X)$. В силу v -плотности Q в $C_b(X)$ по каждому $\delta > 0$ найдется функция f_K из Q , для которой

$$|f(x) - f_K(x)| < \delta$$

при всех $x \in K$. Положим

$$h(x) = f_K(x)g(x) + (1 - g(x))f(x), \quad x \in X.$$

Функция h совпадает с f_K на E и, следовательно, $h \in R$. Кроме того, $h = f$ на множестве L и, таким образом, для всех $s \in M$ выполнено

$$|h(s) - f(s)| < \delta.$$

Итак, доказана v -плотность R в $C_b(S)$. Учитывая справедливость теоремы С–В для $C_b(S)$ с топологией $\sigma(C_b(S), M_S)$, заключаем, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $h_0 \in R$ такое, что

$$|\overline{F}_i(h_0) - \overline{F}_i(f_0)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Некоторая функция $g_0 \in Q$ совпадает с h_0 почти всюду на X относительно каждой меры μ_i . Тогда

$$|F_i(g_0) - F_i(f_0)| = |F_i(h_0) - F_i(f_0)| = |\overline{F}_i(h_0) - \overline{F}_i(f_0)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – топологически полное пространство и S – его вещественное пополнение. Если S обладает свойством С–В, то X также обладает этим свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно использовать теорему 2. В качестве $\mathbf{M}_X$ возьмем множество всех τ -аддитивных функционалов на $C_b(X)$. Соответствующее ему множество $\mathbf{M}_S$ содержится во множестве всех τ -аддитивных функционалов на $C_b(S)$. Учитывая свойство С–В пространства S и соотношение

$$\sigma(C_b(S), \mathbf{M}_S) \leq \sigma(C_b(S), \mathbf{M}_\tau),$$

заключаем, что для пространства

$$(C_b(S), \sigma(C_b(S), \mathbf{M}_S))$$

справедлива теорема С–В. Применение теоремы 2 завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – топологически полное пространство, $\mathbf{M}$ – векторное пространство τ -аддитивных функционалов на $C(X)$, каждый элемент которого равен разности положительных элементов, t – локально выпуклая топология в $C(X)$, для которой $(C(X), t)' = \mathbf{M}$, и Q – векторная подрешетка $C(X)$ такая, что множество Q_b всех ограниченных функций из Q плотно в $(C_b(X), v)$. Тогда Q плотно в $(C(X), v)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждое $F \in \mathbf{M}$ перенесем на $C(S)$, положив

$$F^*(h) = F(h|_X), \quad h \in C(S).$$

Легко видеть, что F^* – τ -аддитивный функционал на $C(S)$, являющийся разностью положительных функционалов, и поэтому порядково ограниченный. Пусть $\mathbf{M}^* = \{F^*, F \in \mathbf{M}\}$. Обозначим через $\mathbf{M}_X$ (через $\mathbf{M}_S$) множество сужений на $C_b(X)$ (соответственно на $C_b(S)$) всевозможных функционалов из $\mathbf{M}$ (соответственно из $\mathbf{M}^*$). Для пространства $C(S)$, наделенного топологией $\sigma(C(S), \mathbf{M}^*)$, справедлива теорема С–В (пример 4 и замечание 1 в п. 2), а тогда она справедлива и для пространства

$$(C_b(S), \sigma(C_b(S), \mathbf{M}_S)).$$

Согласно теореме 2 векторная подрешетка Q_b в $C_b(X)$ плотна относительно топологии $\sigma(C_b(X), \mathbf{M}_X)$ и, значит, Q плотна в $C_b(X)$ относительно топологии $\sigma(C(X), \mathbf{M})$. Но $C_b(X)$ плотно в $C(X)$ относительно той же топологии. Действительно, $C(X) = C^+(X) - C^+(X)$, а каждая функция $f \in C^+(X)$ является поточечным пределом возрастающей последовательности срезов $f_n = f \wedge n$. Таким образом, Q плотна в $C(X)$ относительно топологии $\sigma(C(X), \mathbf{M})$, а тогда и относительно t .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть X , $\mathbf{M}$ и t удовлетворяют тем же условиям, что и в теореме 4, Q – векторная подрешетка $C(X)$, которая содержит все константы и разделяет точки из X , т.е. для любой пары x, y различных точек из X найдется функция $f \in Q$ такая, что $f(x) \neq f(y)$. Тогда Q плотна в $(C(X), t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что Q_b – векторная подрешетка $C_b(X)$, содержащая все константы и разделяющая точки из X . Докажем, что для любой функции $f \in C_b(X)$ и любого непустого конечного множества K в X найдется функция из Q_b , совпадающая с f на K . Для одноэлементного K такой функцией служит надлежущая константа. Пусть K содержит более одного элемента. В силу свойств Q_b для каждой упорядоченной пары (x, y) различных элементов X существует функция $h_{x,y} \in Q_b$ такая, что $h_{x,y}(x) = 1$ и $h_{x,y}(y) = 0$ [4, с. 241]. Для каждого $x \in K$ положим

$$h_x = \bigwedge_{y \in K \setminus \{x\}} h_{x,y}.$$

Легко видеть, что $h_x \in Q_b$, $h_x(x) = 1$ и $h_x(y) = 0$ для всех $y \in K \setminus \{x\}$. Тогда функция

$$h = \sum_{x \in K} f(x) h_x$$

входит в Q_b и на множестве K совпадает с f . Таким образом, доказана v -плотность Q_b в $C_b(X)$. Остается применить теорему 4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hewitt E. Certain generalizations of the Weierstrass approximation theorem // Duke Math. J. 1947. V. 14. P. 419–427.
- [2] Giles R. A generalization of the strict topology // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 161. P. 467–474.
- [3] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [4] Бурбаки Н. Общая топология (гл. IX, X). М.: Наука, 1975.
- [5] Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1986.
- [6] Александров А. Д. Additive set functions in abstract spaces, I // Матем. сб. 1940. Т. 8. С. 307–348; II // Матем. сб. 1941. Т. 9. С. 563–628; III // Матем. сб. 1943. Т. 13. С. 169–238.
- [7] Варадарайн В. С. Меры на топологических пространствах // Матем. сб. 1961. Т. 55(97). С. 35–100.
- [8] Knowles J. D. Measures on topological spaces // Proc. London Math. Soc. (3). 1967. V. 17. P. 139–156.
- [9] Фёдорова В. П. Дуальная характеристика пополнения и полноты равномерного пространства // Матем. сб. 1964. Т. 64(106). С. 632–639.
- [10] Jameson G. I. O. Topological M -spaces // Math. Z. 1968. V. 103. P. 139–150.
- [11] Фёдорова В. П. Интегральные представления функционалов на пространствах равномерно непрерывных функций // Сиб. матем. ж. 1982. Т. 23. № 5. С. 205–218.
- [12] Gould G. G., Mahowald M. Measures on completely regular spaces // J. London Math. Soc. 1962. V. 37. P. 103–111.
- [13] Райков Д. А. Свободные локально выпуклые пространства равномерных пространств // Матем. сб. 1964. Т. 63(105). С. 582–590.
- [14] Фёдорова В. П. Линейные функционалы на пространствах равномерно непрерывных функций и абстрактные меры // Матем. заметки. 1984. Т. 36. № 5. С. 743–754.
- [15] Hewitt E. Linear functionals on spaces of continuous functions // Fund. Math. 1950. V. 37. P. 161–189.

Московский педагогический государственный университет

Поступило
16.05.2001