Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Нурмиев, Д. И. Артамкин, Орбиты и инварианты кубических матриц третьего порядка с симметричными слоями, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 4, 483–489

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm437>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:29:38

УДК 512.815.4

ОРБИТЫ И ИНВАРИАНТЫ КУБИЧЕСКИХ МАТРИЦ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С СИММЕТРИЧНЫМИ СЛОЯМИ

Д. И. Артамкин, А. Г. Нурмиев

В заметке классифицированы орбиты и описаны образующие алгебры инвариантов действия, являющегося тензорным произведением тавтологического действия унимодулярной группы трехмерного пространства и второй симметрической степени тавтологического действия унимодулярной группы трехмерного пространства.

Библиография: 5 названий.

1. В данной заметке классифицированы орбиты и описаны образующие алгебры инвариантов естественного представления группы $H = \mathrm{SL}(V_1) \times \mathrm{SL}(V_2)$ в пространстве $U = S^2 V_1 \otimes V_2$, где V_i , $i = 1, 2$, – трехмерное комплексное векторное пространство. Отметим, что алгебра инвариантов данного представления свободна и степени образующих суть 6, 12 (см. [1]). В работе [1] указана также группа Вейля для данного представления в смысле теории θ -групп.

2. Введем основные обозначения и соглашения. Если V – векторное пространство, то V^* – двойственное векторное пространство. Для произвольной группы Ли L через $\mathrm{Lie}(L)$ обозначается ее алгебра Ли. Положим $V = V_1 \oplus V_1 \oplus V_2$, где V_1, V_2 те же, что и в п. 1. В дальнейшем будем отождествлять $S^2 V_1 \otimes V_2$ с подпространством в $V_1 \otimes V_1 \otimes V_2$ и $S^2 V_1^* \otimes V_2^*$ с подпространством в $V_1^* \otimes V_1^* \otimes V_2^*$. Далее будем пользоваться конструкциями из [2, разд. 2]. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли типа E_8 , реализованную, как в [2]. Согласно конструкции из [2] мы имеем градуировку по модулю 3: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, где $\mathfrak{g}_{-1} = \wedge^3 V^*$, $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}(\mathrm{SL}(V))$, $\mathfrak{g}_1 = \wedge^3 V$.

Рассмотрим следующее векторное пространство

$$\mathfrak{g}^{(3)} = \mathfrak{g}_{-1}^{(3)} \oplus \mathfrak{g}_0^{(3)} \oplus \mathfrak{g}_1^{(3)},$$

где $\mathfrak{g}_{-1}^{(3)} = S^2 V_1^* \otimes V_2^*$, $\mathfrak{g}_0^{(3)} = \mathrm{Lie}(H)$, $\mathfrak{g}_1^{(3)} = S^2 V_1 \otimes V_2$. Обозначим через φ_i (соответственно φ_i^*), $i = 1, 2$, вложение V_1 (соответственно V_1^*) в V (соответственно V^*) в качестве i -го слагаемого. Согласно [2] $\mathfrak{g}^{(3)}$ отождествляется с градуированным подпространством в $\mathfrak{g}$ следующим образом. Тензорное произведение $V_1 \otimes V_1 \otimes V_2$ может быть отождествлено с подпространством в $\wedge^3 V$ по правилу

$$v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 = \varphi_1(v_1) \wedge \varphi_2(v_2) \wedge v_3, \quad v_1, v_2 \in V_1, \quad v_3 \in V_2.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00598, и CRDF, грант Rm1-2088.

Аналогично, $V_1^* \otimes V_1^* \otimes V_2^*$ может быть отождествлено с подпространством в $\wedge^3 V^*$.

Так как мы рассматриваем U как подпространство в $V_1 \otimes V_1 \otimes V_2$, то и U отождествляется с подпространством в $\wedge^3 V$. Аналогично, $U^* = S^2 V_1^* \otimes V_2^*$ отождествляется с подпространством в $\wedge^3 V^*$. Алгебра Ли $\text{Lie}(H)$ вкладывается в $\text{Lie}(\text{SL}(V))$ так, что элементу $(A, B) \in \text{Lie}(H)$ соответствует блочно-диагональная матрица с блоками A, A, B .

Из правил умножения в $\mathfrak{g}$ (см. [2, п. 2.2]) следует, что $\mathfrak{g}^{(3)}$ – градуированная подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$ с указанными выше градуирующими подпространствами. Анализируя систему корней $\mathfrak{g}^{(3)}$ относительно максимального тора в H , получаем, что $\mathfrak{g}^{(3)}$ есть простая алгебра Ли типа F_4 .

Напомним основные определения и факты из [1] применительно к представлению H в U . Элемент пространства U называется *полупростым*, если его H -орбита замкнута в U , и *нильпотентным*, если замыкание его H -орбиты содержит нуль. Каждый элемент u из U может быть однозначно представлен в виде $u = p + e$, где p – полупростой, а e – нильпотентный элементы из U и $[p, e] = 0$, где $[\cdot, \cdot]$ – умножение в $\mathfrak{g}^{(3)}$. Такое разложение называется *разложением Жордана*. Элемент p называется *полупростой*, а e – *нильпотентной частью* элемента u .

Классификация элементов из U осуществляется методом, описанным в [2, разд. 1]. А именно, сначала мы описываем полупростые элементы. Они делятся на четыре семейства в соответствии с типом стабилизатора и подпространством элементов из U , коммутирующих с данным элементом в смысле умножения в алгебре $\mathfrak{g}^{(3)}$. Любой элемент из U считается принадлежащим к семейству, содержащему его полупростую часть. После чего мы описываем все возможные нильпотентные части для каждого семейства элементов по модулю действия стабилизатора полупростого элемента данного семейства. Это и дает классификацию элементов из U .

Далее, согласно [2, п. 2.6] $\mathfrak{g}$ содержит однородную подалгебру типа D_4 . Она описывается следующим образом. Пусть даны трехмерное комплексное векторное пространство N и изоморфизмы

$$\tau_i: N \rightarrow V_i, \quad i = 1, 2.$$

Тогда мы можем отождествить $S^3 N$ с подпространством в $\wedge^3 V$, полагая для $n_1, n_2, n_3 \in N$

$$n_1 n_2 n_3 = \sum \varphi_1(\tau_1(n_{i_1})) \wedge \varphi_2(\tau_1(n_{i_2})) \wedge \tau_2(n_{i_3}),$$

где сумма берется по всем перестановкам (i_1, i_2, i_3) . Аналогично пространство $S^3 N^*$ может быть отождествлено с подпространством в $\wedge^3 V^*$. Также мы можем рассматривать $\text{Lie}(\text{SL}(N))$ как диагональную подалгебру в прямой сумме $\text{Lie}(H) = \text{Lie}(\text{SL}(V_1)) \oplus \text{Lie}(\text{SL}(V_2))$ и, следовательно, как подалгебру в $\text{Lie}(\text{SL}(V))$.

Из правил умножения в $\mathfrak{g}$ видно, что подпространство

$$\mathfrak{g}^{(2)} = S^3 N^* \oplus \text{Lie}(\text{SL}(N)) \oplus S^3 N$$

есть однородная подалгебра в $\mathfrak{g}^{(3)}$ и, следовательно, в $\mathfrak{g}$ с градуирующими подпространствами

$$\mathfrak{g}_{-1}^{(2)} = S^3 N^*, \quad \mathfrak{g}_0^{(2)} = \text{Lie}(\text{SL}(N)), \quad \mathfrak{g}_1^{(2)} = S^3 N.$$

Более того, $\mathfrak{g}^{(2)}$ есть полупростая часть централизатора (в $\mathfrak{g}$) полупростого элемента $\alpha P_1 + \beta(P_3 - P_4)$ (определение P_1, P_3, P_4 приведено ниже в п. 3), где α, β – числа такие,

что $\alpha\beta(\alpha^3 - \beta^3)(\alpha^3 + 8\beta^3) \neq 0$ (см. [2, п. 5.3]). Следовательно, ограничение присоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}^{(2)}$ на $\mathrm{SL}(N)$ и $\mathfrak{g}_1^{(2)}$ есть представление θ -группы [1, № 26 в таблице].

Известно также (см. [2, п. 2.5]), что в $\mathfrak{g}$ содержится однородная подалгебра $\mathfrak{g}^{(1)}$ типа E_6 . Она реализована следующим образом. Рассмотрим векторное пространство

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}_{-1}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}_0^{(1)} \oplus \mathfrak{g}_1^{(1)},$$

$$\mathfrak{g}_{-1}^{(1)} = V_1^* \otimes V_1^* \otimes V_2^*, \quad \mathfrak{g}_0^{(1)} = \mathrm{Lie}(\mathrm{SL}(V_1) \times \mathrm{SL}(V_1) \times \mathrm{SL}(V_2)), \quad \mathfrak{g}_1^{(1)} = V_1 \otimes V_1 \otimes V_2.$$

Оно отождествляется с подпространством в $\mathfrak{g}$ аналогично тому, как это сделано для $\mathfrak{g}^{(3)}$. Из [2] известно, что это подпространство есть однородная подалгебра Ли типа E_6 .

Из описанных конструкций видно, что

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(3)} \supset \mathfrak{g}^{(2)}.$$

Сформулируем основные результаты. Для этого в каждом из пространств V_1, V_2 выберем базис. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}, \{e_4, e_5, e_6\}$ – две копии одного и того же базиса в V_1 , $\{e_7, e_8, e_9\}$ – базис в V_2 . Положим

$$u_1 = e_1 \otimes e_4 \otimes e_7 + e_2 \otimes e_5 \otimes e_8 + e_3 \otimes e_6 \otimes e_9,$$

$$u_2 = e_1 \otimes e_5 \otimes e_9 + e_2 \otimes e_6 \otimes e_7 + e_3 \otimes e_4 \otimes e_8,$$

$$u_3 = e_1 \otimes e_6 \otimes e_8 + e_2 \otimes e_4 \otimes e_9 + e_3 \otimes e_5 \otimes e_7.$$

Тогда каждый полупростой элемент эквивалентен элементу следующего вида:

$$u = a_1 u_1 + a_2 (u_2 + u_3). \quad (1)$$

При этом коэффициенты a_1, a_2 определены с точностью до линейного преобразования из группы порядка 72, которая порождена комплексными отражениями порядка 3 (см. [1, № 17 в таблице]).

Ниже описываются семейства элементов из U . В таблицах 1, 2 использованы следующие обозначения. Элемент $e_i \otimes e_j \otimes e_k$ обозначается через ijk , элемент $e_i \otimes e_j \otimes e_k + e_p \otimes e_q \otimes e_r$ – через $ijk\ pqr$ и т.д. для любого числа членов. “Представитель” – элемент, являющийся представителем класса нильпотентных частей; $\dim S$ – размерность стабилизатора элемента из U с данной полупростой и нильпотентной частями, вычисленная по формуле из [2, п. 4.5]. Последняя строка в таблицах 1, 2 соответствует нулевому элементу.

Первое семейство. Это 2-параметрическое семейство полупростых элементов. Канонический вид элемента этого семейства имеет форму (1), где коэффициенты a_1, a_2 таковы, что

$$a_1 a_2 \neq 0, \quad a_1^3 + 8a_2^3 \neq 0, \quad a_1^3 - a_2^3 \neq 0.$$

Стабилизатор элемента этого семейства – абелева группа порядка 27, изоморфная $(\mathbb{Z}_3)^3$. Непосредственное вычисление показывает, что в этом случае возможна только нулевая нильпотентная часть (см. п. 6). Элементы первого семейства составляют открытое по Зарисскому подмножество в U .

ТАБЛИЦА 1

№	Представитель	$\dim S$
1	147 258	0
2	147	1
3		2

ТАБЛИЦА 2

№	Представитель	$\dim S$
1	159 249 267 357	0
2	159 249	1
3		2

Второе семейство. Полупростой элемент этого семейства имеет канонический вид

$$u = a(u_2 + u_3), \quad \text{где } a \neq 0.$$

Коэффициент a определен с точностью до умножения на корень шестой степени из единицы. Классификация возможных нильпотентных частей приведена в таблице 1.

Третье семейство. Канонический вид полупростого элемента

$$u = au_1, \quad \text{где } a \neq 0.$$

Коэффициент a определен с точностью до умножения на корень шестой степени из единицы. Классификация возможных нильпотентных частей приведена в таблице 2.

Четвертое семейство. Здесь $u = 0$. Классификация возможных нильпотентных частей есть просто классификация нильпотентных элементов в U . Она приведена в таблице 3 (см. п. 4).

Описание образующих алгебры инвариантов приведено в п. 5.

3. Согласно [1] рассматриваемое представление совпадает с представлением θ -группы (см. [1, № 17 в таблице]), дифференциал которого есть присоединенное представление $\mathfrak{g}_0^{(3)}$ в $\mathfrak{g}_1^{(3)}$. Из свойств θ -групп следует, что в пространстве данного представления имеется картановское подпространство. Для его описания рассмотрим элементы

$$\begin{aligned} P_i &= e_{k_i^1} \wedge e_{j_i^1} \wedge e_{l_i^1} + e_{k_i^2} \wedge e_{j_i^2} \wedge e_{l_i^2} + e_{k_i^3} \wedge e_{j_i^3} \wedge e_{l_i^3}, \\ P_i^* &= e^{k_i^1} \wedge e^{j_i^1} \wedge e^{l_i^1} + e^{k_i^2} \wedge e^{j_i^2} \wedge e^{l_i^2} + e^{k_i^3} \wedge e^{j_i^3} \wedge e^{l_i^3}, \end{aligned}$$

где i – номер одного из следующих наборов:

- 1) (123, 456, 789);
- 2) (147, 258, 369);
- 3) (159, 267, 348);
- 4) (168, 249, 357);

k_i^n, j_i^n, l_i^n – n -я тройка чисел из i -го набора, а верхние индексы у e нумеруют двойственный базис сопряженного пространства. Из определения пространств $\mathfrak{g}_{-1}^{(3)}, \mathfrak{g}_1^{(3)}$ и их вложений в $\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1$ соответственно следует, что $P_2, P_3 + P_4 \in \mathfrak{g}_{-1}^{(3)}$, причем $P_2 = u_1$, $P_3 = u_2$, $P_4 = u_3$, а $P_2^*, P_3^* + P_4^* \in \mathfrak{g}_{-1}^{(3)}$. Вследствие леммы из [2, разд. 3], если $x \in \mathfrak{g}_1^{(3)}$ коммутирует с P_2 , то он коммутирует с P_2^* . Используя те же рассуждения, что и в доказательстве этой леммы, можно показать, что если $x \in \mathfrak{g}_1^{(3)}$ коммутирует с $P_3 + P_4$, то он коммутирует с $P_3^* + P_4^*$. Так как $P_2, P_3 + P_4, P_2^*, P_3^* + P_4^*$ друг с другом коммутируют и полупросты (см. [2]), то подпространство $\mathcal{L} := \langle P_2, P_3 + P_4, P_2^*, P_3^* + P_4^* \rangle$ есть подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}^{(3)}$ и $\mathcal{L}^{(3)} := \langle P_2, P_3 + P_4 \rangle$ – картановское подпространство

в $\mathfrak{g}_1^{(3)}$. Следовательно, любой полупростой элемент из U эквивалентен линейной комбинации элементов $u_1, u_2 + u_3$. Из свойств θ -групп (см. [1]) следует, что мы получили описание полупростых элементов с точностью до действия конечной группы (группы Вейля градуированной алгебры $\mathfrak{g}^{(3)}$), указанной в [1, № 17 в таблице]. Обозначим эту группу через $W^{(3)}$. Опишем $W^{(3)}$ геометрически.

Заметим, что элементы

$$(\omega E, E), (\omega^2 E, E) \in H, \quad \text{где } \omega^3 = 1,$$

переводят $\mathcal{L}^{(3)}$ в себя и индуцируют в $\mathcal{L}^{(3)}$ операторы умножения на ω^2, ω соответственно.

Как известно из [1, п. 9.3], группа Вейля однородной подалгебры $\mathfrak{g}^{(2)}$, являющейся полупростой частью централизатора элемента $\alpha P_1 + \beta(P_3 - P_4)$ в $\mathfrak{g}$ (см. [2, таблица 7]), есть стабилизатор $W_{\alpha P_1 + \beta(P_3 - P_4)}$ элемента $\alpha P_1 + \beta(P_3 - P_4)$ в группе Вейля градуированной алгебры $\mathfrak{g}$. С другой стороны, $\mathfrak{g}^{(2)}$ является однородной подалгеброй в $\mathfrak{g}^{(3)}$, и их ранги как ранги градуированных алгебр равны [1]. Поэтому (см. [1, п. 9.3]) группа Вейля градуированной алгебры $\mathfrak{g}^{(2)}$ изоморфна подгруппе группы Вейля градуированной алгебры $\mathfrak{g}^{(3)}$. Прямые вычисления показывают, что группа $W^{(3)}$ порождается подгруппой $W_{\alpha P_1 + \beta(P_3 - P_4)}$ и умножениями на ω, ω^2 (см. [3, таблица 1]). Следовательно, из сказанного в [2, п. 3.3] и в [3, п. 1.4] получаем, что зеркала отражений из группы Вейля $W^{(3)}$ – это прямые, порожденные векторами $u_1, u_1 + u_2 + u_3, u_1 + \omega(u_2 + u_3), u_1 + \omega^2(u_2 + u_3), u_2 + u_3, -2u_1 + u_2 + u_3, -2\omega u_1 + u_2 + u_3, -2\omega^2 u_1 + u_2 + u_3$, и этими отражениями порождается указанная группа. Заметим, что приведенные выше векторы – это в точности собственные векторы отражений из группы $W_{\alpha P_1 + \beta(P_3 - P_4)}$ (см. [3, п. 1.4]).

4. Классификация нильпотентных элементов изучаемого представления получена при помощи метода характеристик, изложенного в [2, разд. 4]. Результат вычислений приводится в таблице 3.

В таблице 3 использованы следующие обозначения. Так $\dim S$ – размерность стабилизатора, вычисленная по формуле, указанной в [2, п. 4.5]. Элемент $e_i \otimes e_j \otimes e_k$ обозначен через ijk , элемент $e_i \otimes e_j \otimes e_k + e_p \otimes e_q \otimes e_r$ – через $ijk\ pqr$ и т.д. для любого числа членов. “Представитель” – элемент, являющийся представителем класса нильпотентных элементов. “Тип” – тип неприводимого нильпотентного элемента в смысле [2, п. 4.2]. Последняя строка соответствует нулевому элементу. “Тип S ” – тип редуктивной части стабилизатора “представителя”. И наконец, $\mathbb{T}^n$ – n -мерный алгебраический тор.

5. Как известно (см. [1, № 17 в таблице]), алгебра инвариантов рассматриваемого представления порождается двумя свободными однородными образующими степеней 6, 12. Следовательно, полную систему свободных образующих будут составлять любые два однородных инварианта F_6, F_{12} этих степеней, не удовлетворяющие соотношению типа

$$\lambda F_6^2 = F_{12}, \quad (2)$$

где λ – комплексное число.

Обозначим форму объема пространства V_i через $\varepsilon(i)_{i_1 i_2 i_3}$. Будем искать инвариант степени $3k$ в виде полной свертки тензорного произведения $3k$ элементов из U , $2k$ форм объема пространства V_1 и k форм объема пространства V_2 . Индексам формы объема

ТАБЛИЦА 3

№	Представитель	$\dim S$	Тип	Тип S
1	147 259 268 358 169 349	0	F_4	0
2	147 268 358 159 249 257	1	$C_3 + A_1$	0
3	147 259 367 268 358	1	B_4	0
4	147 268 358 159 249	2	C_3	$\mathbb{T}^1$
5	147 258 169 349	2	B_3	$\mathbb{T}^1$
6	147 257 258 368	2	$B_2 + 2A_1$ $D_4(a_1)$ $2A_2$ $A_3 + A_1$	0
7	147 258 159 249 267 357	3	$2A_2$	0
8	147 268 358 257	3	$B_2 + A_1$	$\mathbb{T}^1$
9	157 247 168 348 367	4	$A_2 + A_1$	$\mathbb{T}^1$
10	147 258 367	4	B_2	$\mathbb{T}^2$
11	157 247 168 348 149	5	$A_2 + A_1$	A_1
12	147 258 168 348	5	$A_2 + A_1$	$\mathbb{T}^1$
13	147 258 159 249	5	$A_2 + A_1$	A_1
14	157 247 168 348	6	A_2	$A_1 + \mathbb{T}^1$
15	147 258	6	A_2	$\mathbb{T}^2$
16	147 158 248	7	$2A_1$	$\mathbb{T}^2$
17	147 257 367	8	$2A_1$	$2A_1$
18	147 257	9	A_1	$A_1 + \mathbb{T}^2$
19	147	11	A_1	$2A_1 + \mathbb{T}^1$
20		16		$2A_2$

i -го пространства при свертке могут соответствовать только индексы, стоящие на первом или втором месте у элементов из U , если $i = 1$, или стоящие на третьем месте у элементов из U , если $i = 2$.

Согласно [1, № 2 в таблице] естественное представление группы

$$G_0^{(1)} = \mathrm{SL}(V_1) \times \mathrm{SL}(V_1) \times \mathrm{SL}(V_2)$$

в пространстве $U^{(1)} = V_1 \otimes V_1 \otimes V_2$ есть θ -группа и ограничение его на H и U есть изучаемое представление. Заметим, что H вкладывается в $G_0^{(1)}$ аналогично своей алгебре Ли. Пусть a_1, a_2, a_3 – координатные функции относительно базиса u_1, u_2, u_3 на картановском подпространстве $\mathcal{L}^{(1)} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ для представления $G_0^{(1)}$ в $U^{(1)}$ (см. [4, п. 3]¹). Тогда согласно описанию $\mathcal{L}^{(3)}$ (см. п. 3) картановское подпространство $\mathcal{L}^{(3)}$ для представления H в U есть подпространство в $\mathcal{L}^{(1)}$, заданное уравнением $a_2 = a_3$.

¹В работе [4, п. 2, таблица 2] допущена неточность. Описание возможных нильпотентных частей третьего семейства получается добавлением к элементам, указанным в таблице 2, элементов, получаемых из “представителей” под номерами 1–4 в таблице 2 при помощи процедуры, указанной в [4, п. 4].

Понятно, что ограничения инвариантов действия $G_0^{(1)}$ на $U^{(1)}$ на U будут давать инварианты изучаемого представления. Из общей теории θ -групп известно, что алгебра инвариантов действия $G_0^{(1)}$ на $U^{(1)}$ (соответственно H на U) изоморфна путем ограничения инвариантов алгебре инвариантов действия $W^{(1)}$ на $\mathcal{L}^{(1)}$ (соответственно $W^{(3)}$ на $\mathcal{L}^{(3)}$); здесь $W^{(1)}$ – группа Вейля градуированной алгебры $\mathfrak{g}^{(1)}$. Заметим, что гомоморфизм ограничения с $U^{(1)}$ на U , упомянутый выше, индуцирует гомоморфизм алгебры инвариантов действия $W^{(1)}$ на $\mathcal{L}^{(1)}$ в алгебру инвариантов действия $W^{(3)}$ на $\mathcal{L}^{(3)}$.

Согласно [5, гл. 4, п. 7] алгебра инвариантов действия $W^{(1)}$ на $\mathcal{L}^{(1)}$ содержит следующие образующие степеней 6, 12:

$$\begin{aligned} F_6 &= (a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)^2 - 12(a_1^3 a_2^3 + a_1^3 a_3^3 + a_2^3 a_3^3), \\ F_{12} &= (a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)^4 + 216(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)a_1^3 a_2^3 a_3^3. \end{aligned}$$

Непосредственная проверка показывает, что ограничения этих образующих на $\mathcal{L}^{(3)}$ не удовлетворяют соотношению типа (2).

Следовательно, ограничение образующих алгебры инвариантов степеней 6, 12 действия $G_0^{(1)}$ на $U^{(1)}$ на U дает инварианты, не удовлетворяющие соотношению типа (2). В результате получаем, что алгебра инвариантов действия H на U есть образ (при ограничении с $U^{(1)}$ на U) алгебры инвариантов действия $G_0^{(1)}$ на $U^{(1)}$. Образующие алгебры инвариантов изучаемого представления суть ограничения инвариантов степеней 6, 12, указанных в [4, п. 5].

6. Разделение полупростых элементов на семейства производится так же, как в [2, п. 3.4], т.е. все сводится к классам сопряженности стабилизаторов элементов картановского подпространства в группе Вейля $W^{(3)}$, а их описания получаются несложными вычислениями с отражениями. Вместе с тривиальными классами их четыре. Отметим, что имеется восемь зеркал отражений и две орбиты группы $W^{(3)}$ в множестве всех этих зеркал. Компонента связности стабилизаторов полупростых элементов второго и третьего семейств, содержащая единичный элемент, – это двумерный тор (всего у стабилизаторов три компоненты связности). Используя аргументы из [2, п. 3.4 и разд. 5], можно легко получить указанную в п. 2 классификацию семейств полупростых элементов и нильпотентных частей для каждого из них.

Авторы благодарны своему научному руководителю Э.Б. Винбергу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Винберг Э. Б. Группа Вейля градуированной алгебры Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. №3. С. 488–526.
- [2] Винберг Э. Б., Элашвили А. Г. Классификация тривекторов девятимерного пространства // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. Т. 18. М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 197–233.
- [3] Shephard G. C., Todd J. A. Finite unitary reflection groups // Canad. J. Math. 1954. V. 6. №2. P. 274–304.
- [4] Нурмиев А. Г. Орбиты и инварианты кубических матриц третьего порядка // Матем. сб. 2000. Т. 191. №5. С. 101–108.
- [5] Спрингер Т. Теория инвариантов. М.: Мир, 1981.