Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Бахвалов, О λ -расходимости ряда Фурье непрерывной функции многих переменных, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 4, 490–501

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm438>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:36:58

УДК 517.518

О λ -РАСХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. Н. Бахвалов

В статье рассматривается поведение прямоугольных частичных сумм рядов Фурье непрерывных функций многих переменных по тригонометрической системе. Ряд Фурье называется λ -сходящимся, если существует предел прямоугольных частичных сумм по индексам $\vec{M} = (M_1, \dots, M_n)$, для которых $1/\lambda \leq M_j/M_k \leq \lambda$ для всех j и k . В простейшем произвольной четной размерности $2m$ построен пример непрерывной функции с оценкой на модуль непрерывности $\omega(F, \delta) = O_{\delta \rightarrow +0}(\ln^{-m}(1/\delta))$, ряд Фурье которой λ -расходится всюду для любого $\lambda > 1$.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть $f(\vec{x})$ 2π -периодична по каждому аргументу и интегрируема по Лебегу на $\mathbb{T}^n$, $\mathbb{T} = [0; 2\pi)$. Ее *рядом Фурье* по тригонометрической системе называется ряд

$$\sum_{m_1, \dots, m_n = -\infty}^{+\infty} c_{\vec{m}} e^{i\langle \vec{m}, \vec{x} \rangle},$$

где

$$c_{\vec{m}} = c_{m_1, \dots, m_n} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int_{\mathbb{T}^n} f(\vec{x}) e^{-i\langle \vec{m}, \vec{x} \rangle} dx_1 \dots dx_n$$

— коэффициенты Фурье функции f .

Прямоугольной частичной суммой ряда Фурье называется

$$S_{\vec{M}}(f, \vec{x}) = S_{M_1, \dots, M_n}(f, \vec{x}) = \sum_{m_1 = -M_1}^{M_1} \dots \sum_{m_n = -M_n}^{M_n} c_{\vec{m}} e^{i\langle \vec{m}, \vec{x} \rangle}.$$

Ряд Фурье функции f называется λ -сходящимся (по прямоугольникам) в точке $\vec{x}$, где $\lambda \geq 1$, если существует

$$\lim_{\min_j M_j \rightarrow +\infty} S_{\vec{M}}(f, \vec{x})$$

по всем номерам $\vec{M}$ таким, что $1/\lambda \leq M_j/M_k \leq \lambda$ для любых j и k .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00042, и программы “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96143.

1-сходимость обычно называется *сходимостью по квадратам (по кубам)*, а сходимость без ограничений на отношения компонент – *сходимостью по прямоугольникам (по Прингсхейму)*.

Модулем непрерывности 2π -периодической по каждому аргументу функции $f \in C(\overline{\mathbb{T}^n})$ называется функция от $\delta > 0$, определяемая формулой

$$\omega(f, \delta) = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \sup_{\vec{h} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{h}\| \leq \delta} |f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x})|.$$

Как следует из результатов Феффермана [1], для любой непрерывной функции многих переменных ее ряд Фурье сходится по кубам почти всюду.

В другой работе Феффермана [2] был впервые построен пример непрерывной функции двух переменных, ряд Фурье которой расходится по Прингсхейму всюду. Основываясь на методе Феффермана, Бахбух и Никишин [3] построили пример функции двух переменных с оценкой на модуль непрерывности

$$\omega(f, \delta) = O_{\delta \rightarrow +0} \left(\ln^{-1} \frac{1}{\delta} \right),$$

ряд Фурье которой расходится по Прингсхейму на $[0.2; 2\pi - 0.2]^2$.

С другой стороны, Осколков [4] и Жижиашвили [5] получили достаточные условия сходимости ряда Фурье почти всюду по Прингсхейму в терминах модулей непрерывности.

Как отметил Дьяченко [6], незначительная модификация рассуждений Бахбуха и Никишина позволяет показать, что для любого натурального m существует непрерывная 2π -периодическая по каждому переменному функция $2m$ переменных $f(\vec{x})$ такая, что $\omega(f, \delta) = O((\ln 1/\delta)^{-m})$ при $\delta \rightarrow +0$ и ее ряд Фурье расходится по Прингсхейму почти всюду.

Автором в работе [7] было установлено, что эти результаты можно усилить следующим образом.

ТЕОРЕМА А. Для любого $\lambda > 1$ существует функция $H(\vec{x}) \in C(\overline{\mathbb{T}^{2m}})$ такая, что ее ряд Фурье λ -расходится всюду, а ее модуль непрерывности удовлетворяет условию

$$\omega(H, \delta) = O_{\delta \rightarrow +0} \left(\ln^{-m} \left(\frac{1}{\delta} \right) \right).$$

Целью настоящей работы является построение непрерывной функции многих переменных, ряд Фурье которой λ -расходится всюду для любого выбранного $\lambda > 1$ (в отличие от теоремы А, где функция строилась для фиксированного λ). Получен следующий основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Для любого натурального m существует функция $F(\vec{x}) \in C(\overline{\mathbb{T}^{2m}})$ такая, что ее ряд Фурье λ -расходится всюду для любого $\lambda > 1$, а ее модуль непрерывности удовлетворяет условию

$$\omega(F, \delta) = O_{\delta \rightarrow +0} \left(\ln^{-m} \left(\frac{1}{\delta} \right) \right). \quad (1)$$

2. Основные элементы построения. В этом пункте мы рассматриваем ряд вспомогательных утверждений. Некоторые из них являются незначительными видоизменениями результатов из [3] и [7] и поэтому приводятся без доказательств.

Пусть p – натуральное число. Положим $\lambda_p = (p+1)/p$ и $D_p = 2p+1 \geq 3$; тогда $D_p = (\lambda_p + 1)/(\lambda_p - 1)$. Положим $A_{p,1} = \pi - \pi/D_p$ и $A_{p,2} = 2\pi - A_{p,1}$; отметим, что $A_{p,2}/A_{p,1} = \lambda_p$. Действительно,

$$\frac{A_{p,2}}{A_{p,1}} = \frac{1+1/D_p}{1-1/D_p} = \frac{D_p+1}{D_p-1} = \frac{2p+2}{2p}.$$

Обозначим также $\Delta_p = 2\pi/D_p = A_{p,2} - A_{p,1}$.

Введем обозначения для промежутков:

$$I_{p,1} = [A_{p,1} - \Delta_p, A_{p,1}), \quad I_{p,2} = (A_{p,1}, A_{p,2}), \quad I_{p,3} = (A_{p,2}, A_{p,2} + \Delta_p]$$

и для квадратов:

$$Q_{j,k,p} = I_{p,j} \times I_{p,k}, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

Зададим функцию $g_{\nu,p}(x, y)$ на квадратах $Q_{j,k,p}$ формулой

$$g_{\nu,p}(x, y) = \begin{cases} e^{i\nu xy}, & (x, y) \in Q_{2,2,p}; \\ (\Delta_p)^{-1}(x - A_{p,1} + \Delta_p)e^{i\nu A_{p,1}y}, & (x, y) \in Q_{1,2,p}; \\ (\Delta_p)^{-1}(y - A_{p,1} + \Delta_p)e^{i\nu A_{p,1}x}, & (x, y) \in Q_{2,1,p}; \\ (\Delta_p)^{-1}(A_{p,2} + \Delta_p - x)e^{i\nu A_{p,2}y}, & (x, y) \in Q_{3,2,p}; \\ (\Delta_p)^{-1}(A_{p,2} + \Delta_p - y)e^{i\nu A_{p,2}x}, & (x, y) \in Q_{2,3,p}; \\ (\Delta_p)^{-2}(x - A_{p,1} + \Delta_p)(y - A_{p,1} + \Delta_p)e^{i\nu A_{p,1}^2}, & (x, y) \in Q_{1,1,p}; \\ (\Delta_p)^{-2}(A_{p,2} + \Delta_p - x)(y - A_{p,1} + \Delta_p)e^{i\nu A_{p,1}A_{p,2}}, & (x, y) \in Q_{3,1,p}; \\ (\Delta_p)^{-2}(x - A_{p,1} + \Delta_p)(A_{p,2} + \Delta_p - y)e^{i\nu A_{p,1}A_{p,2}}, & (x, y) \in Q_{1,3,p}; \\ (\Delta_p)^{-2}(A_{p,2} + \Delta_p - x)(A_{p,2} + \Delta_p - y)e^{i\nu A_{p,2}^2}, & (x, y) \in Q_{3,3,p}. \end{cases}$$

На граничных точках квадратов доопределим ее по непрерывности. На остальной части $\mathbb{T}^2$ доопределим функцию нулем. Продолжим ее 2π -периодически на всю плоскость.

Для $\nu, p \in \mathbb{N}$ и $j, k = 1, 2, 3$ обозначим

$$g_{\nu,p}^{j,k}(x, y) = g_{\nu,p}(x, y)\chi_{Q_{j,k,p}}(x, y).$$

Полученные функции продолжим 2π -периодически на всю плоскость. Отметим, что после продолжения $g_{\nu,p}$ непрерывна на $\mathbb{R}^2$.

ЛЕММА 1. Для вещественных a и b и натурального p при $|a| > 2|b| > 2$ или $|b| > 2|a| > 2$ для любого $x \in \mathbb{T}$ выполняется оценка

$$\left| \int_{A_{p,1}}^{A_{p,2}} \frac{\sin a(t-x)}{t-x} e^{ibt} dt \right| < 15.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 4 из [7].

Положим для функции $f \in L(\mathbb{T}^2)$

$$\tilde{S}_{M,N}(f, x, y) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{T}^2} \frac{\sin M(s-x)}{s-x} \frac{\sin N(t-y)}{t-y} f(s, t) ds dt. \quad (2)$$

ЛЕММА 2. Существует абсолютная постоянная C_1 такая, что при $\nu > 100$ для любой точки $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ и номеров M и N таких, что выполняется пара неравенств

$$M^2 \leq 2\nu, \quad N^2 \leq 2\nu, \quad (3)$$

имеет место оценка

$$|S_{M,N}(g_{\nu,p}^{2,2}(x, y))| < C_1 + 30(\ln \min\{M, N\} + 3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что при условиях леммы имеет место неравенство

$$|S_{M,N}(g_{\nu,p}^{2,2}(x, y)) - \tilde{S}_{M,N}(g_{\nu,p}^{2,2}(x, y))| < C_1, \quad (4)$$

где $\tilde{S}_{M,N}(g_{\nu,p}^{2,2}(x, y))$ определено равенством (2).

Введем обозначение

$$\psi(a, s, q) = \frac{\sin((a+1/2)(s-q))}{2 \sin((s-q)/2)} - \frac{\sin(a(s-q))}{s-q}. \quad (5)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \psi(a, s, q) &= \frac{\sin a(s-q)}{2 \sin((s-q)/2)} \left(\cos \frac{s-q}{2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \cos a(s-q) \\ &\quad + \sin a(s-q) \left(\frac{1}{2 \sin((s-q)/2)} - \frac{1}{s-q} \right) = r_1 + r_2 + r_3. \end{aligned}$$

Здесь $|r_2| \leq 1/2$. Поскольку при $A_{p,1} \leq s \leq A_{p,2}$ и $0 \leq q \leq 2\pi$ выполнено $|q-s| \leq 2\pi - A_{p,1} \leq 4\pi/3$, то

$$|r_3| \leq \left| \left(\frac{1}{2 \sin((s-q)/2)} - \frac{1}{s-q} \right) \right| \leq \rho_0$$

и

$$\begin{aligned} |r_1| &= \left| \frac{\sin a(s-q)}{4 \sin((s-q)/4) \cos((s-q)/4)} 2 \sin^2 \frac{s-q}{4} \right| \leq \left| \frac{1}{2 \cos((s-q)/4)} \right| \\ &\leq \frac{1}{2 \cos((2\pi - A_{p,1})/4)} \leq 1. \end{aligned}$$

Складывая, получаем

$$|\psi(a, s, q)| \leq \rho_0 + 1 + \frac{1}{2} = \psi_0. \quad (6)$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned}
 & S_{M,N}(g_{\nu,p}^{2,2}(x,y)) - \tilde{S}_{M,N}(g_{\nu,p}^{2,2}(x,y)) \\
 &= \iint_{Q_{2,2,p}} \frac{\sin(M+1/2)(s-x)}{2\sin((s-x)/2)} \frac{\sin(N+1/2)(t-y)}{2\sin((t-y)/2)} e^{i\nu st} ds dt \\
 &\quad - \iint_{Q_{2,2,p}} \frac{\sin M(s-x)}{s-x} \frac{\sin N(t-y)}{t-y} e^{i\nu st} ds dt \\
 &= \int_{A_{p,1}}^{A_{p,2}} \psi(N,t,y) \left(\int_{A_{p,1}}^{A_{p,2}} \frac{\sin M(s-x)}{s-x} e^{i\nu st} ds \right) dt \\
 &\quad + \int_{A_{p,1}}^{A_{p,2}} \psi(M,s,x) \left(\int_{A_{p,1}}^{A_{p,2}} \frac{\sin N(t-y)}{t-y} e^{i\nu st} dt \right) ds \\
 &\quad + \iint_{Q_{2,2,p}} e^{i\nu st} \psi(M,s,x) \psi(N,t,y) dt ds \\
 &= J_1 + J_2 + J_3,
 \end{aligned}$$

где функция $\psi(a, r, q)$ определена формулой (5) и равномерно ограничена при всех $a \in \mathbb{R}$, $A_{p,1} \leq r \leq A_{p,2}$ и $0 \leq q \leq 2\pi$ величиной ψ_0 в силу (6). Отсюда и из леммы 1, пользуясь тем, что при $s \in [A_{p,1}, A_{p,2}]$ в силу (3) справедливо неравенство

$$\frac{\nu s}{M} \geq \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\nu}{2}} > 2,$$

получаем оценки

$$|J_1| < (A_{p,2} - A_{p,1})15\psi_0, \quad |J_2| < (A_{p,2} - A_{p,1})15\psi_0, \quad |J_3| < (A_{p,2} - A_{p,1})^2\psi_0^2.$$

Теперь можно положить

$$C_1 = \frac{1}{\pi^2}((A_{1,2} - A_{1,1})30\psi_0 + (A_{1,2} - A_{1,1})^2\psi_0^2).$$

Тем самым, (4) установлено.

Пусть теперь для определенности $M \geq N$; тогда

$$\tilde{S}_{M,N}(g_{\nu,p}^{2,2}(x,y)) = \int_{A_{p,1}}^{A_{p,2}} \frac{\sin N(t-y)}{t-y} \left(\int_{A_{p,1}}^{A_{p,2}} e^{i\nu st} \frac{\sin M(s-x)}{s-x} ds \right) dt.$$

Заметим, что в силу условий (3) выполнено неравенство $\nu t > 2\pi\nu/3 > 2M$. Применяя к внутреннему интегралу лемму 1, получаем

$$|\tilde{S}_{M,N}(g_{\nu,p}^{2,2}(x,y))| \leq 15 \int_{A_{p,1}}^{A_{p,2}} \left| \frac{\sin N(t-y)}{t-y} \right| dt. \quad (7)$$

Поскольку при $y \in \mathbb{T}$ выполнено $2\pi/3 \leq |A_{p,k} - y| \leq 4\pi/3$, где $k = 1, 2$, то

$$\begin{aligned}
 \int_{A_{p,1}}^{A_{p,2}} \left| \frac{\sin N(t-y)}{t-y} \right| dt &\leq \int_{[A_{p,1}, A_{p,2}] \setminus [y-1/N, y+1/N]} \left| \frac{1}{t-y} \right| dt + \int_{y-1/N}^{y+1/N} N dt \\
 &< 2 \ln N + 6.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Объединяя оценки (4), (7) и (8), получаем, что

$$|S_{M,N}(g_{\nu,p}^{2,2}(x,y))| < C_1 + 30(\ln \min\{M, N\} + 3).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Существует абсолютная постоянная C_2 такая, что при $\nu > 100$ для любой точки $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ и номеров M и N таких, что выполняется пара неравенств

$$M^2 \leq 2\nu, \quad N^2 \leq 2\nu,$$

имеет место оценка

$$S_{M,N}(g_{\nu,p},(x,y)) < C_2(1 + \ln \min\{M, N\}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 нам достаточно оценить частичные суммы $S_{M,N}(g_{\nu,p}^{j,k}(x,y))$ при $j \neq 2$ или $k \neq 2$.

Рассмотрим случаи $j = k = 1$ и $j = 1, k = 2$ (остальные случаи аналогичны).

В первом случае имеем

$$\begin{aligned} S_{M,N}(g_{\nu,p}^{1,1}(x,y)) &= e^{i\nu(A_{p,1})^2} \frac{1}{\pi} \int_{A_{p,1}-\Delta_p}^{A_{p,1}} \frac{s - A_{p,1} + \Delta_p}{\Delta_p} D_M(s-x) ds \\ &\quad \times \frac{1}{\pi} \int_{A_{p,1}-\Delta_p}^{A_{p,1}} \frac{t - A_{p,1} + \Delta_p}{\Delta_p} D_N(t-y) ds. \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно показать, что частичные суммы рядов Фурье функций

$$\frac{x - A_{p,1} + \Delta_p}{\Delta_p} \chi_{[A_{p,1}-\Delta_p, A_{p,1})}(x)$$

равномерно ограничены. Заметим, что эти функции (будучи продолженными 2π -периодически) являются функциями ограниченной вариации на $\mathbb{T}$ и непрерывны всюду на $\mathbb{T}$, кроме точки $A_{p,1}$, которая является точкой разрыва первого рода. При этом вариация функции на периоде равна 2 для любого p . Отсюда следует (см., например, [8]), что такие частичные суммы равномерно по x и p ограничены.

Во втором случае имеем

$$\begin{aligned} S_{M,N}(g_{\nu,p}^{1,2}(x,y)) &= \frac{1}{\pi} \int_{A_{p,1}-\Delta_p}^{A_{p,1}} \frac{s - A_{p,1} + \Delta_p}{\Delta_p} D_M(s-x) ds \\ &\quad \times \frac{1}{\pi} \int_{A_{p,1}}^{A_{p,2}} e^{i\nu A_{p,1}t} D_N(t-y) dt. \end{aligned}$$

Первый интеграл равномерно ограничен по указанным при разборе предыдущего случая соображениям, а второй – в силу леммы 1 и того, что (см. (5), (6))

$$\left| \int_{A_{p,1}}^{A_{p,2}} e^{i\nu A_{p,1}t} D_N(t-y) dt - \int_{A_{p,1}}^{A_{p,2}} e^{i\nu A_{p,1}t} \frac{\sin N(t-y)}{t-y} dt \right| \leq \frac{2\pi}{3} \psi_0.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $0 < \varepsilon < \Delta_p/2$; тогда существует $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon, p)$ такое, что для любой точки $(x, y) \in [A_{p,1} + \varepsilon; A_{p,2} - \varepsilon]^2$ выполнено

$$\forall \nu > \nu_0 \quad |S_{M,N}(g_{\nu,p},(x,y))| \geq \ln \nu \quad \text{для} \quad M = [\nu y], \quad N = [\nu x].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы аналогично доказательству леммы 8 из [7].

ЛЕММА 5. Пусть $0 < \varepsilon < \Delta_p/2$. Тогда существует $C_3(\varepsilon, p)$ такая, что для любых натуральных M и N при любом $\nu > 100$ и для любой точки $(x, y) \notin Q_{2,2,p}$ такой, что выполнены условия

$$|x - A_{p,j}| > \varepsilon, \quad |y - A_{p,j}| > \varepsilon, \quad j = 1, 2,$$

справедлива оценка

$$|S_{M,N}(g_{\nu,p}(x, y))| \leq C_3(\varepsilon, p).$$

Кроме того, существует $C_4(\varepsilon, p)$ такая, что если $(x, y) \in [A_{p,1} + \varepsilon; A_{p,2} - \varepsilon]^2$, то для любых натуральных M и N при любом $\nu > 100$ выполнено

$$|S_{M,N}(g_{\nu,p}(x, y))| \leq C_4(\varepsilon, p) \ln \nu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы аналогично доказательству леммы 9 из [7].

Перейдем теперь к рассмотрению функций $2m$ переменных.

Положим

$$\bar{g}_{\nu,p}(\vec{x}) = \prod_{k=1}^m g_{\nu,p}(x_{2k-1}, x_{2k}).$$

Определим функцию $h_{\nu,p}(x, y)$ формулой

$$h_{\nu,p}(\vec{x}) = \sum_{j_1=-p}^p \cdots \sum_{j_{2m}=-p}^p \bar{g}_{\nu,p}(x_1 + j_1 \Delta_p, \dots, x_{2m} + j_{2m} \Delta_p). \quad (9)$$

Пусть p — натуральное число, а ε удовлетворяет неравенствам $0 < \varepsilon < \Delta_p/2$. Определим множество

$$W_p(\varepsilon) = \bigcup_{j_1=-\infty}^{\infty} \cdots \bigcup_{j_{2m}=-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{2m} [A_{p,1} + \varepsilon + j_k \Delta_p; A_{p,2} - \varepsilon + j_k \Delta_p].$$

ЛЕММА 6. Существует величина $C_5(p) \geq 1$ такая, что при $\nu > 100$ для любой точки $\vec{x} \in \mathbb{T}^{2m}$ и номеров M_i таких, что выполняются неравенства

$$M_i^2 \leq 2\nu, \quad i = 1, \dots, 2m,$$

имеет место неравенство

$$S_{\vec{M}}(h_{\nu,p}, \vec{x}) < C_5(p) \left(1 + \ln \min_{i=1, \dots, 2m} M_i\right)^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3 и определения функции $h_{\nu,p}$ можно взять $C_5(p) = \max\{C_2^m(2p+1)^{2m}, 1\}$. Лемма доказана.

Положим $\varphi_p(t) = A_{p,1} + (t \pmod{\Delta_p})$.

ЛЕММА 7. Пусть $0 < \varepsilon < \Delta_p/2$. Тогда существует $\nu_1 = \nu_1(\varepsilon, p)$ такое, что для любой точки $\vec{x} \in W_p(\varepsilon)$ выполнено

$$\forall \nu > \nu_1 \quad |S_{\vec{M}}(h_{\nu, p}, \vec{x})| \geq \frac{3}{4} \ln^m \nu$$

для $M_{2k-1} = [\nu \varphi_p(x_{2k})]$, $M_{2k} = [\nu \varphi_p(x_{2k-1})]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функции $h_{\nu, p}$ и лемм 4 и 5 следует, что при достаточно больших ν справедливо неравенство

$$|S_{\vec{M}}(h_{\nu, p}, \vec{x})| \geq \ln^m \nu - ((2p+1)^2 \max\{C_3(\varepsilon, p), C_4(\varepsilon, p)\})^m \ln^{m-1} \nu.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

3. Доказательство основной теоремы. Для дальнейшего нам понадобится следующее утверждение, принадлежащее Жижиашвили [9, с. 93].

ТЕОРЕМА В. Если непрерывная функция n переменных $f(\vec{x})$ такова, что для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнены условия на частные модули непрерывности

$$\omega_i(f, \delta_i) = O_{\delta_i \rightarrow +0} \left(\ln \left(\frac{1}{\delta_i} \right)^{-n-\varepsilon} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

то ряд Фурье функции f равномерно сходится по Прингстейму.

Пусть p – натуральное число. Положим $\varepsilon_p = \Delta_p/(2(2m+1))$. Обозначим через V_p множество $W_p(\varepsilon_p)$, а через $V_{p,k}$ – его сдвиг на $2\varepsilon_p k$ по каждой координате ($k = 0, \dots, 2m$).

ЛЕММА 8. Для любого натурального p справедливо равенство

$$\bigcup_{k=0}^{2m} V_{p,k} = \mathbb{R}^{2m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу периодичности структуры множества V_p достаточно доказать, что

$$\bigcup_{k=0}^{2m} V_{p,k} \supset [A_{p,1} - \varepsilon_p; A_{p,2} - \varepsilon_p]^{2m}.$$

Рассмотрим попарно непересекающиеся интервалы

$$(A_{p,1} + (2k-1)\varepsilon_p, \quad A_{p,1} + (2k+1)\varepsilon_p), \quad \text{где } k = 0, \dots, 2m,$$

лежащие в отрезке $[A_{p,1} - \varepsilon_p; A_{p,2} - \varepsilon_p]$. Если $\vec{x} \in [A_{p,1} - \varepsilon_p; A_{p,2} - \varepsilon_p]^{2m}$, то среди $2m+1$ указанных интервалов найдется хотя бы один ($k = k_0$), не содержащий ни одного из $2m$ чисел x_j . Тогда $\vec{x} \in V_{p,k_0}$. Лемма доказана.

В дальнейшем будем обозначать через p_q и r_q числа, определяемые представлением натурального числа $q \geq 2m+2$ в виде

$$q = (2m+2)p_q + r_q, \quad \text{где } p_q \in \mathbb{N}, \quad r_q \in \{0, \dots, 2m+1\}.$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Прежде всего, отметим, что для любой точки $\vec{x}$ и для любых ν, p выполнено $|\bar{g}_{\nu,p}(\vec{x})| \leq 1$. Кроме того, для любой точки $\vec{x} \in \mathbb{T}^{2m}$ существует не более 3^{2m} слагаемых в сумме (9), отличных в этой точке от нуля. Поэтому для любой точки $\vec{x}$ и для любых ν, p выполнено $|h_{\nu,p}(\vec{x})| \leq 3^{2m}$. Поскольку каждая функция $h_{\nu,p}(\vec{x})$ удовлетворяет условиям теоремы В, то при достаточно больших (для данных ν и p) числах M_i имеем

$$|S_{\vec{M}}(h_{\nu,p}, \vec{x})| \leq 3^{2m} + 1.$$

Построим теперь по индукции последовательность $\{N_q\}_{q=2m+2}^\infty$. Выберем $N_{2m+2} \geq 100$ так, чтобы (здесь ν_1 из леммы 7)

$$\frac{3^{2m} + 1}{\ln^m N_{2m+2}} < \frac{1}{2^{2m+2}}, \quad (10)$$

$$N_{2m+2} > \nu_1(\varepsilon_1, 1), \quad (11)$$

$$\frac{1}{N_{2m+2}} < \Delta_1 = A_{1,2} - A_{1,1}. \quad (12)$$

Очередное N_q выбираем столь большим, чтобы оно удовлетворяло следующим условиям:

$$N_q > (N_{q-1})^2, \quad (13)$$

$$\frac{3^{2m} + 1}{\ln^m N_q} < \frac{1}{2^q}, \quad (14)$$

$$\frac{C_5(p_q)}{\ln^m N_q} < \frac{1}{32 \ln^m N_{q-1}}, \quad (15)$$

$$N_q > \nu_1(\varepsilon_{p_q}, p_q), \quad (16)$$

$$\forall \vec{M}: M_i > N_q \quad \forall \vec{x} \quad |S_{\vec{M}}(h_{N_{q-1}, p_{q-1}}, \vec{x})| \leq 3^{2m} + 1, \quad (17)$$

$$\frac{1}{N_q} < \Delta_{p_q} = A_{p_q, 2} - A_{p_q, 1}, \quad (18)$$

$$\frac{N_q}{\ln^m N_q} \geq 2 \frac{N_{q-1}}{\ln^m N_{q-1}}. \quad (19)$$

Отметим, что из (15) следует (поскольку $C_5(p) \geq 1$) неравенство

$$\frac{C_5(p_q)}{\ln^m N_q} < \frac{C_5(p_{q-1})}{4 \ln^m N_{q-1}}. \quad (20)$$

Положим теперь

$$f_q(\vec{x}) = \begin{cases} h_{N_q, p_q}(\vec{x} + r_q \varepsilon_{p_q} \vec{e}), & r_q \neq 2m+1, \\ 0, & r_q = 2m+1, \end{cases}$$

где $\vec{e} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{2m}$.

Определим функцию

$$F(\vec{x}) = \sum_{q=2m+2}^{\infty} \frac{f_q(\vec{x})}{\ln^m N_q}. \quad (21)$$

Докажем, что для любого $\lambda > 1$ ряд Фурье функции $F(\vec{x})$ λ -расходится всюду. Зафиксируем $\lambda > 1$. Будем считать p_* столь большим, что

$$\lambda_{p_*} \frac{N_{(2m+2)p_*}}{N_{(2m+2)p_*} - 1} < \lambda.$$

Отметим, что при $q \geq (2m+2)p_*$ для любых s и t выполнено

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{N_q - 1}{N_q \lambda_{p_q}} < \frac{N_q \varphi_{p_q}(t)}{N_q \varphi_{p_q}(s)} \frac{N_q - 1}{N_q} \leq \frac{[N_q \varphi_{p_q}(t)]}{[N_q \varphi_{p_q}(s)]} \leq \frac{N_q \varphi_{p_q}(t)}{N_q \varphi_{p_q}(s)} \frac{N_q}{N_q - 1} < \frac{\lambda_{p_q} N_q}{N_q - 1} < \lambda,$$

т.е. любой набор номеров вида $\{[N_q \varphi_{p_q}(t_k)]\}_{k=1}^{2m}$ входит в те, которые рассматриваются в определении λ -сходимости ряда.

Зафиксируем теперь точку $\vec{x} \in \mathbb{T}^{2m}$. В силу леммы 8 для любого $p \geq p_*$ найдется такое $r^* = r^*(p, \vec{x}) \in \{0, \dots, 2m\}$, что $\vec{x} \in V_{p, r^*}$. Положим $q' = q'(p, \vec{x}) = (2m+2)p + r^*$ и $q'' = q''(p) = (2m+2)p + 2m + 1$ (при этом $p_{q'} = p_{q''} = p$).

Тогда по лемме 7 для $M_{2k} = [N_p \varphi_p(x_{2k-1} - r^* \varepsilon_p)]$, $M_{2k-1} = [N_p \varphi_p(x_{2k} - r^* \varepsilon_p)]$ с учетом (11) или (16) выполнено

$$|S_{\vec{M}}(f_{q'}, \vec{x})| \geq \frac{3}{4} \ln^m N_{q'}. \quad (22)$$

Поскольку ряд (21) сходится равномерно, то

$$S_{\vec{M}}(F, \vec{x}) = \sum_{q=2m+2}^{\infty} \frac{S_{\vec{M}}(f_q, \vec{x})}{\ln^m N_q}.$$

Представим этот ряд в виде

$$S_{\vec{M}}(F, \vec{x}) = \sum_{q=2m+2}^{q'-1} \frac{S_{\vec{M}}(f_q, \vec{x})}{\ln^m N_q} + \frac{S_{\vec{M}}(f_{q'}, \vec{x})}{\ln^m N_{q'}} + \sum_{q=q'+1}^{\infty} \frac{S_{\vec{M}}(f_q, \vec{x})}{\ln^m N_q} = S_1 + S_2 + S_3.$$

В силу (22) имеем $|S_2| \geq 3/4$. Далее, в силу условий (10), (14) и (17) выполнено

$$|S_1| \leq \sum_{q=2m+2}^{q'-1} \frac{3^{2m} + 1}{\ln^m N_q} \leq \sum_{q=4}^{q'-1} \frac{1}{2^q} < \frac{1}{8}.$$

Кроме того, в силу леммы 6 с учетом неравенства (20) выполнено

$$|S_3| \leq \sum_{q=q'+1}^{\infty} \frac{C_5(p_q)(2 + \ln N_{q'})^m}{\ln^m N_q} \leq 2(2 + \ln N_{q'})^m \frac{C_5(p_{q'+1})}{\ln^m N_{q'+1}},$$

что в силу (15) дает

$$|S_3| \leq \frac{2(2 + \ln N_{q'})^m}{32 \ln^m N_{q'}} < \frac{1}{8}.$$

Окончательно получаем, что

$$|S_{\vec{M}}(F, \vec{x})| > \frac{1}{2}. \quad (23)$$

С другой стороны, рассмотрим кубическую частичную сумму $S_{\vec{K}}(F, \vec{x})$ для $K_j = N_{q''}$, где по-прежнему $p \geq p_*$. Так как $f_{q''}(\vec{x}) \equiv 0$, то имеем

$$S_{\vec{K}}(F, \vec{x}) = \sum_{q=2m+2}^{\infty} \frac{S_{\vec{K}}(f_q, \vec{x})}{\ln^m N_q} = \sum_{q=2m+2}^{q''-1} \frac{S_{\vec{K}}(f_q, \vec{x})}{\ln^m N_q} + \sum_{q=q''+1}^{\infty} \frac{S_{\vec{K}}(f_q, \vec{x})}{\ln^m N_q} = S'_1 + S'_3.$$

По аналогии с предыдущим случаем получаем, что

$$|S_{\vec{K}}(F, \vec{x})| < \frac{1}{4}. \quad (24)$$

Из оценок (23) и (24) при $p \rightarrow \infty$ следует λ -расходимость.

Докажем теперь оценку (1) на модуль непрерывности.

Рассмотрим приращение функции F ; при этом достаточно рассмотреть случай, когда F имеет приращение только по одной переменной, например по x_1 . Итак, пусть $\delta > 0$. Положим $\vec{y} = (x_2, \dots, x_{2m})$. Имеем

$$\Delta F = F(x_1 + \delta, \vec{y}) - F(x_1, \vec{y}) = \sum_{q=2m+2}^{\infty} \frac{f_q(x_1 + \delta, \vec{y}) - f_q(x_1, \vec{y})}{\ln^m N_q}.$$

Предполагая δ достаточно малым ($\delta < 1/N_{2m+2}$), выберем натуральное q_0 так, чтобы

$$\frac{1}{N_{q_0+1}} \leq \delta < \frac{1}{N_{q_0}}.$$

Имеем

$$F(x_1 + \delta, \vec{y}) - F(x_1, \vec{y}) = \left(\sum_{q=2m+2}^{q_0} + \sum_{q=q_0+1}^{\infty} \right) \frac{f_q(x_1 + \delta, \vec{y}) - f_q(x_1, \vec{y})}{\ln^m N_q} = S_1 + S_2.$$

Для второй суммы получаем с учетом условия (13):

$$|S_2| \leq \sum_{q=q_0+1}^{\infty} \frac{|f_q(x_1 + \delta, \vec{y}) - f_q(x_1, \vec{y})|}{\ln^m N_q} \leq \sum_{q=q_0+1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{2m}}{\ln^m N_q} \leq \frac{4 \cdot 3^{2m}}{\ln^m N_{q_0+1}} \leq \frac{4 \cdot 3^{2m}}{\ln^m (1/\delta)}.$$

Перейдем к оценке первой суммы. Оценим приращение одной функции $f_q(\vec{x})$; при этом достаточно ограничиться случаем $r_q = 0$, т.е. $f_q(\vec{x}) = h_{N_q, p_q}(\vec{x})$, так как остальные f_q отличаются только сдвигом аргумента. Отметим, что в силу условий (12) и (18) при $q \leq q_0$ выполнено $\delta < 1/N_{q_0} \leq 1/N_q \leq A_{p_q, 2} - A_{p_q, 1}$. Поэтому отрезок, соединяющий точки $(x_1, \vec{y})$ и $(x_1 + \delta, \vec{y})$, пересекает не более двух сдвигов куба $(Q_{2, 2, p_q})^m$ на векторы $(j_1 \Delta_{p_q}, \dots, j_{2m} \Delta_{p_q})$, где $j_k = -p_q, \dots, p_q$. Каждый такой куб пересекается с носителями ровно 3^{2m} слагаемых в сумме (9). Поэтому

$$|f_q(x_1 + \delta, \vec{y}) - f_q(x_1, \vec{y})| \leq 2 \cdot 3^{2m} X_q(\delta),$$

где $X_q(\delta)$ есть верхняя грань приращений $\bar{g}_{N_q, p_q}(\vec{x})$ по переменной x_1 по отрезку длины не более δ , целиком лежащему в одном из отрезков $\overline{I_{p_q, j}}$. Если $j = 2$, то для некоторого $c \in [A_{p_q, 1}, A_{p_q, 2}]$ имеем

$$|\bar{g}_{N_q, p_q}(x_1 + \delta', \vec{y}) - \bar{g}_{N_q, p_q}(x_1, \vec{y})| \leq |e^{iN_q \delta' c} - 1| \leq 2\pi N_q \delta' \leq 2\pi N_q \delta,$$

так как длина хорды меньше длины дуги. Если же $j = 1$ или $j = 3$, то функция линейна по x_1 с угловым коэффициентом α , $|\alpha| \leq 1/\Delta_{p_q} = 1/(A_{p_q, 2} - A_{p_q, 1}) \leq N_q$. Таким образом,

$$X_q(\delta) \leq 2\pi N_q \delta.$$

Отметим, что функция $(\ln^m t)/t$ монотонно убывает при достаточно больших t ; поэтому при достаточно малых δ имеет место неравенство

$$\delta \frac{N_{q_0}}{\ln^m N_{q_0}} = \frac{\ln^m(1/\delta)}{1/\delta} \frac{N_{q_0}}{\ln^m N_{q_0}} \frac{1}{\ln^m(1/\delta)} \leq \frac{1}{\ln^m(1/\delta)}.$$

Теперь с учетом (19) имеем

$$|S_1| \leq 4\pi \cdot 3^{2m} \delta \sum_{q=2m+2}^{q_0} \frac{N_q}{\ln^m N_q} \leq 8\pi \cdot 3^{2m} \delta \frac{N_{q_0}}{\ln^m N_{q_0}} \leq 8\pi \cdot 3^{2m} \frac{1}{\ln^m(1/\delta)}.$$

Окончательно получаем

$$|\Delta F| \leq (8\pi + 4) \cdot 3^{2m} \frac{1}{\ln^m(1/\delta)}.$$

Оценка (1) доказана.

Автор выражает благодарность профессору М. И. Дьяченко за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fefferman C. On the convergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. № 5. P. 744–745.
- [2] Fefferman C. On the divergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. № 2. P. 191–195.
- [3] Бахбук М., Никишин Е. М. О сходимости двойных рядов Фурье от непрерывных функций // Сиб. матем. ж. 1973. Т. 14. № 6. С. 1189–1199.
- [4] Осколков К. И. Оценка скорости приближения непрерывной функции и ее сопряженной суммами Фурье на множестве полной меры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38. № 6. С. 1373–1407.
- [5] Жижиашвили Л. В. О сходимости кратных тригонометрических рядов Фурье // Сообщ. АН ГССР. 1975. Т. 80. № 1. С. 17–19.
- [6] Дьяченко М. И. Некоторые проблемы теории кратных тригонометрических рядов // УМН. 1992. Т. 47. № 5. С. 97–162.
- [7] Бахвалов А. Н. О расходимости всюду рядов Фурье непрерывных функций многих переменных // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 8. С. 45–62.
- [8] Bojanic R. An estimate of the rate of convergence for Fourier series of functions of bounded variation // Publ. Inst. Math. (Belgrade). 1979. V. 26. № 40. P. 57–60.
- [9] Жижиашвили Л. В. О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических рядов // УМН. 1973. Т. 28. № 2. С. 65–119.