Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, Дробные моменты и нули $\zeta(s)$ на критической прямой, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 4, 502–508

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm439>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 18:01:00

УДК 511

ДРОБНЫЕ МОМЕНТЫ И НУЛИ $\zeta(s)$ НА КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

А. А. Карацуба

Установлена связь между дробными моментами дзета-функции Римана и количеством ее нулей, лежащих на критической прямой.

Библиография: 10 названий.

Пусть $N_0(T)$ – количество нулей $\zeta(1/2 + it)$ на промежутке $0 < t \leq T$. Здесь и ниже $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, $s = \sigma + it$, $i^2 = -1$, σ, t – вещественные числа, $T \geq T_1 > 0$, прямая $\operatorname{Re} s = 1/2$ на s -плоскости называется *критической прямой*.

Харди и Литтлвуд [1] доказали, что справедливо следующее неравенство:

$$N_0(T) \geq cT, \quad (1)$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная.

Сельберг [2] получил правильный порядок нижней оценки для $N_0(T)$:

$$N_0(T) \geq cT \log T. \quad (2)$$

При доказательстве [2] Сельберг пользуется оригинальной идеей умножения $\zeta(s)$ на “успокаивающую” функцию $\varphi(s)\varphi(1-s)$ такую, что множество нечетных нулей новой функции $F(s) = \zeta(s)\varphi(s)\varphi(1-s)$ совпадает с множеством нечетных нулей $\zeta(s)$ на рассматриваемом промежутке, а сама $F(s)$ “в среднем” близка к константе. Это позволяет “погасить” неточности применяемых неравенств и получить (2).

Цель настоящей статьи – показать, что знание правильного порядка дробного момента $\zeta(s)$ на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$ дает возможность получить результат более точный, чем (1) (правда, менее точный, чем (2)), теми средствами, которыми пользовались Харди и Литтлвуд.

Для доказательства теоремы понадобятся две леммы: одна – о дробных моментах $|\zeta(1/2 + it)|$, другая – о приближении функции Римана на $Z(t)$ начальным отрезком ряда Дирихле.

ЛЕММА 1. При любом натуральном числе m справедливы следующие неравенства:

$$T(\log T)^{1/m^2} \ll \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{2/m} dt \ll T(\log T)^{1/m^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы см., например, в [3], где упомянуты, кроме работ Баласубраманиана и Рамачандры, статья Хиз-Брауна [4] и статья Ютилы [5], в которой доказано, что постоянные в знаках $\ll$ леммы 1 абсолютные.

ЛЕММА 2. Пусть $Z(t)$ – функция Римана, т.е.

$$Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right), \quad e^{i\theta(t)} = \pi^{-it/2} \frac{\Gamma(1/4 + it/2)}{|\Gamma(1/4 + it/2)|}.$$

Тогда функция $Z(t)$ при вещественных t принимает вещественные значения, ее вещественные нули являются нулями $\zeta(s)$, лежащими на критической прямой, и при $t \geq 2\pi$ справедлива следующая формула:

$$Z(t) = 2 \sum_{n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(t \log \sqrt{\frac{t}{2\pi}} - t \log n - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + O(t^{-1/4} \log t), \quad (3)$$

причем постоянная в знаке O абсолютная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы см., например, в [6].

Упростим правую часть (3), предполагая, что t меняется на коротком промежутке. Пусть $T \leq t \leq T + H$, $H \leq T \log^{-1} T$. Рассмотрим две функции $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$:

$$\theta_1(t) = t \log \sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8}, \quad \theta_2(t) = t \log \sqrt{\frac{T}{2\pi}} - \frac{T}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{(t-T)^2}{4t}.$$

Пользуясь формулой Тейлора и теоремой Лагранжа о конечных приращениях, последовательно находим

$$\begin{aligned} \theta_1(t) - \theta_2(t) &= t \log \sqrt{\frac{t}{T}} - \frac{t-T}{2} - \frac{(t-T)^2}{4t} \\ &= -\frac{1}{2} t \log\left(1 - \frac{t-T}{t}\right) - \frac{t-T}{2} - \frac{(t-T)^2}{4t} = O(H^3 T^{-2}), \\ \cos(\theta_1(t) - t \log n) - \cos(\theta_2(t) - t \log n) &= O(H^3 T^{-2}), \\ Z(t) &= 2 \sum_{n \leq P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(t \log \frac{P}{n} + \varphi(t)\right) + O(H^3 T^{-7/4}) + O(T^{-1/4} \log T), \end{aligned}$$

где

$$P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}, \quad \varphi(t) = -\frac{T}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{(t-T)^2}{4t}.$$

Если, кроме того, $0 \leq u \leq 1$, то

$$\begin{aligned} \varphi(t+u) - \varphi(t) &= O(HT^{-1}), \\ Z(t+u) &= 2 \sum_{n \leq P} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left((t+u) \log \frac{P}{n} + \varphi(t)\right) \\ &\quad + O(H^3 T^{-7/4}) + O(T^{-1/4} \log T) + O(HT^{-3/4}). \end{aligned} \quad (4)$$

Последней формулой для $Z(t+u)$ мы и будем пользоваться ниже.

ТЕОРЕМА. Существует постоянная $c > 0$ такая, что при $T \geq T_1 > 0$ выполняется неравенство

$$N_0(T) \geq cT \log^{1/8} T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $T \geq T_1 > 0$, $\log \log T \leq h^{-1} = h^{-1}(T) \leq \log T$. Более точно значение $h = h(T)$ определим позднее. Рассмотрим два интеграла $j_1(t)$ и $j_2(t)$:

$$j_1(t) = \int_0^h |Z(t+u)| du, \quad j_2(t) = \left| \int_0^h Z(t+u) du \right|.$$

Определим множество E чисел t , $0 < t \leq T$, следующим образом: $t \in E$, если выполняется неравенство

$$j_1(t) > j_2(t).$$

Заметим, что если $t \in E$, то функция $Z(t+u)$ на промежутке $0 < u < h$ меняет знак, т.е. на этом промежутке $Z(t+u)$ имеет нуль нечетного порядка.

Пользуясь определением E , последовательно получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{j_1(t)} &\geq \sqrt{j_1(t)} - \sqrt{j_2(t)}, \\ \int_E \sqrt{j_1(t)} dt &\geq \int_E (\sqrt{j_1(t)} - \sqrt{j_2(t)}) dt = \int_0^T (\sqrt{j_1(t)} - \sqrt{j_2(t)}) dt \\ &= \int_0^T \sqrt{j_1(t)} dt - \int_0^T \sqrt{j_2(t)} dt. \end{aligned}$$

Применяя к интегралу левой части последнего соотношения неравенство Коши, приходим к основному неравенству:

$$I_1 \leq I_2 + \sqrt{\mu(E)I_3}, \quad (5)$$

где

$$I_1 = \int_0^T \sqrt{j_1(t)} dt, \quad I_2 = \int_0^T \sqrt{j_2(t)} dt, \quad I_3 = \int_0^T j_1(t) dt,$$

$\mu(E)$ – мера множества E .

2. Оценим I_1 снизу. Прежде всего, имеем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^h \sqrt{|Z(t+u)|} du \right)^2 &\leq h \int_0^h |Z(t+u)| du, \\ \int_0^h \sqrt{|Z(t+u)|} du &\leq \sqrt{h} \sqrt{j_1(t)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из определения I_1 приходим к такой оценке:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^T \sqrt{j_1(t)} dt \geq h^{-1/2} \int_0^T \int_0^h |Z(t+u)|^{1/2} du dt \\ &\geq \sqrt{h} \int_h^T |Z(t)|^{1/2} dt \geq \sqrt{h} \int_1^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{1/2} dt. \end{aligned}$$

Наконец, пользуясь леммой 1 при $m = 4$, получаем нужную нам оценку I_1 снизу:

$$I_1 \gg \sqrt{h} T \log^{1/16} T. \quad (6)$$

3. Оценим I_3 сверху. Пользуясь определением I_3 и в нужном месте леммой 1 при $m = 2$, последовательно получаем

$$I_3 = \int_0^T \int_0^h |Z(t+u)| du dt \leq h \int_0^{T+1} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| dt \ll hT \log^{1/4} T. \quad (7)$$

4. Оценим I_2 сверху. Возводя I_2 в четвертую степень и применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$I_2^4 \leq T^3 \int_0^T j_2^2(t) dt = T^3(A_1 + A_2), \quad (8)$$

где

$$A_1 = \int_0^{TL_1} j_2^2(t) dt, \quad A_2 = \int_{TL_1}^T j_2^2(t) dt, \quad L_1 = \log^{-1} T.$$

Так как

$$j_2^2(t) = \left| \int_0^h Z(t+u) du \right|^2 \leq h \int_0^h |Z(t+u)|^2 du,$$

то

$$A_1 \ll h^2 \int_0^{TL_1} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt \ll h^2 T \ll hT. \quad (9)$$

Возьмем $H = T^{7/12} L_1$, $\nu_1 = [T^{5/12}]$, $\nu_2 = [T^{5/12} L]$, $L = \log T$. Очевидно следующее неравенство:

$$A_2 \leq \sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_2} B_\nu, \quad (10)$$

где

$$B_\nu = \int_{H\nu}^{H\nu+H} j_2^2(t) dt. \quad (11)$$

Будем оценивать сверху B_ν . Полагая $T_1 = H\nu$, $T_1 \leq t \leq T_1 + H$, $P_1 = \sqrt{T_1/(2\pi)}$, по формуле (4) находим

$$Z(t+u) = 2 \sum_{n \leq P_1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left((t+u) \log \frac{P_1}{n} + \varphi(t)\right) + O(L^{-9}), \quad (12)$$

где

$$\varphi(t) = -\frac{T_1}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{(t-T_1)^2}{4t}.$$

Преобразуем сначала $j_2(t)$. Разбивая промежуток суммирования по n в (12) на два: $n \leq P_2$, где $P_2 = P_1 e^{-1/h}$, и $P_2 < n \leq P_1$, получаем

$$\begin{aligned} j_2(t) &= \left| \int_0^h Z(t+u) du \right| \\ &\ll \left| \int_0^h \sum_{n \leq P_2} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left((t+u) \log \frac{P_1}{n} + \varphi(t)\right) du \right| \\ &\quad + \left| \int_0^h \sum_{P_2 < n \leq P_1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left((t+u) \log \frac{P_1}{n} + \varphi(t)\right) du \right| + hL_1^3. \end{aligned}$$

В последних формулах запишем косинус в виде суммы двух экспонент. Проводя интегрирование в первом интеграле, а затем переходя к неравенствам, приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} j_2(t) &\ll \left| \sum_{n \leq P_2} \frac{1}{\sqrt{n} \log(P_1/n)} n^{i(t+h)} \right| + \left| \sum_{n \leq P_2} \frac{1}{\sqrt{n} \log(P_1/n)} n^{it} \right| \\ &\quad + \int_0^h \left| \sum_{P_2 < n \leq P_1} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{i(t+u)} \right| du + hL_1^3. \end{aligned}$$

Возведем обе части последнего неравенства в квадрат и применим неравенство Коши. Вспомогая определение B_ν , находим

$$\begin{aligned} B_\nu &\ll D_1 + D_2 + D_3 + D_4, \\ D_1 &= D_1(h) = \int_{T_1}^{T_1+H} \left| \sum_{n \leq P_2} \frac{1}{\sqrt{n} \log(P_1/n)} n^{i(t+h)} \right|^2 dt, \quad D_2 = D_1(0), \\ D_3 &= h^2 \int_{T_1}^{T_1+H} \left| \sum_{P_2 < n \leq P_1} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{i(t+u_1)} \right|^2 dt, \quad 0 \leq u_1 \leq h, \quad D_4 = h^2 H L_1^6 \ll hH. \end{aligned} \tag{13}$$

Так как H больше корня квадратного из T_1 , то интегралы D_1, D_2, D_3 оцениваются “диагонально”. Оценим, например, D_1 . Следующие преобразования очевидны:

$$\begin{aligned} D_1 &\ll \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t/H)^2} \left| \sum_{n \leq P_2} \frac{1}{\sqrt{n} \log(P_1/n)} n^{i(T_1+h+t)} \right|^2 dt \\ &= \sum_{n, m \leq P_2} \frac{1}{\sqrt{nm} \log(P_1/n) \log(P_1/m)} \left(\frac{n}{m}\right)^{i(T_1+h)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t/H)^2 + it \log(n/m)} dt \\ &= \sqrt{\pi} H \sum_{n, m \leq P_2} \frac{1}{\sqrt{nm} \log(P_1/n) \log(P_1/m)} \left(\frac{n}{m}\right)^{i(T_1+h)} e^{-((H/2) \log(n/m))^2} \\ &\ll H \sum_{n \leq P_2} \frac{1}{n \log^2(P_1/n)} \\ &\quad + H \sum_{m \neq n \leq P_2} \frac{1}{\sqrt{nm} \log(P_1/n) \log(P_1/m)} e^{-((H/2) \log(n/m))^2}. \end{aligned}$$

Так как функция $x \log^2(P_1/x)$ при $1 \leq x \leq P_2$ монотонно возрастает, то первая сумма оценивается сверху интегралом, т.е.

$$\sum_{n \leq P_2} \frac{1}{n \log^2(P_1/n)} \leq \frac{1}{\log^2 P_1} + \int_1^{P_2} \frac{dx}{x \log^2(P_1/x)} \ll \log^{-1} \frac{P_1}{P_2} \ll h.$$

Далее, при $n \neq m$ очевидны неравенства ($n > m$):

$$\left| \log \frac{n}{m} \right| = \left| \log \left(1 + \frac{n-m}{m} \right) \right| \geq \log \left(1 + \frac{1}{m} \right) \geq \log \left(1 + \frac{1}{P_2} \right) \geq \frac{1}{2P_2} \geq \frac{1}{\sqrt{T_1}},$$

$$H \sum_{n \neq m \leq P_2} \frac{1}{\sqrt{nm} \log(P_1/n) \log(P_1/m)} e^{-((H/2) \log(n/m))^2} \ll 1.$$

Тем самым, для D_1, D_2 получили оценки

$$D_1 \ll Hh, \quad D_2 \ll Hh.$$

Точно так же оценивается D_3 :

$$D_3 \ll h^2 H \sum_{P_2 < n \leq P_1} \frac{1}{n} \ll h^2 H \log \frac{P_1}{P_2} \ll hH.$$

Таким образом, из оценок $D_j, 1 \leq j \leq 4$, и формул (13), (10), (9), (8) последовательно получаем

$$B_\nu \ll hH, \quad A_2 \ll hT, \quad I_2^4 \ll hT^4, \quad I_2 \ll h^{1/4}T.$$

Тем самым, мы пришли к нужной оценке I_2 .

5. Оценим снизу $\mu(E)$. Для этого подставим найденные оценки для I_1, I_2, I_3 в (5). Вводя абсолютные положительные постоянные c_1, c_2, c_3 , которые содержатся в знаках $\ll$ соответствующих оценок для $I_j, j = 1, 2, 3$, получаем

$$c_1 \sqrt{h} T \log^{1/16} T - c_2 h^{1/4} T \leq \sqrt{c_3 \mu(E) h T \log^{1/4} T},$$

$$\sqrt{c_3 \mu(E) T \log^{1/4} T} \geq T(c_1 \log^{1/4} T - c_2 h^{-1/4}).$$

Возьмем теперь $h = h(T)$ таким:

$$h = \left(\frac{2c_2}{c_1} \right)^4 \log^{-1/4} T. \quad (14)$$

Тогда будем иметь неравенство

$$c_1 \log^{1/16} T - c_2 h^{-1/4} \geq \frac{1}{2} c_1 \log^{1/16} T$$

и, следовательно,

$$\mu(E) \geq \frac{1}{c_3} \left(\frac{c_1}{2} \right)^2 T \log^{-1/8} T.$$

Отсюда и из (14) уже следует утверждение теоремы. Действительно, разобьем промежутки $(0, T)$ на промежутки вида $(h\nu, h\nu + h)$, $\nu = 0, 1, \dots, \nu_3 = [Th^{-1}]$. По крайней мере K из этих промежутков, где

$$K = \left[\left(\frac{1}{c_3} \left(\frac{c_1}{2} \right)^2 T \log^{-1/8} T \right) h^{-1} \right],$$

содержат хотя бы одну точку t из E . Если бы это было не так, то для $\mu(E)$ получилась бы верхняя граница, которая меньше нижней. Но точки $t \in E$ характеризуются тем, что на промежутке $(t, t+h)$ функция $Z(u)$ меняет знак, т.е. на этом промежутке существует нуль нечетного порядка $Z(u)$. Следовательно, количество нулей $Z(t)$ на $(0, T)$ будет не меньше, чем

$$\frac{1}{2}K - 1 \geq c_4 T \log^{1/8} T, \quad c_4 > 0.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Идея сравнивать величины $j_1^\alpha(t)$ и $j_2^\alpha(t)$, $0 < \alpha < 1$, дала возможность изучать нули линейных комбинаций L -функций Дирихле и нули $\zeta(s)$ на очень коротких промежутках критической прямой (см. [7]–[10]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hardy G. H., Littlewood J. E. The zeros of Riemann's zeta-functions on the critical line // Math. Z. 1921. V. 10. P. 283–317.
- [2] Selberg A. On the zeros of Riemann's zeta-function // Skr. Norske Vid. Akad. V. 10. Oslo, 1942.
- [3] Ramachandra K. On the mean-value and omega-theorems for the Riemann zeta-function. Bombay: Tata Inst. of Fundam. Research, 1995.
- [4] Heath-Brown D. R. Fractional moments of the Riemann zeta-function // J. London Math. Soc. 1981. V. 24. P. 65–78.
- [5] Jutila M. On the value distribution of the zeta-function on the critical line // Bull. London Math. Soc. 1983. V. 15. P. 513–518.
- [6] Карацуба А. А. Дзета-функция Римана и ее нули // УМН. 1985. Т. 40. № 5 (245). С. 19–70.
- [7] Карацуба А. А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 2. С. 303–315.
- [8] Карацуба А. А. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 3. С. 483–514.
- [9] Карацуба А. А. О количестве нулей дзета-функции Римана, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 2. С. 372–397.
- [10] Карацуба А. А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле // Тр. МИАН. 1994. Т. 207. С. 180–196.