Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, Неасимптотические свойства корней функции типа Миттаг-Леффлера, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 405–420

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm44>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:22:18

УДК 517.5

НЕАСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОРНЕЙ ФУНКЦИИ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

А. М. Седлецкий

Полностью решен вопрос о числе положительных и отрицательных корней функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/\rho)}, \quad \rho > 0, \quad \mu \in \mathbb{C},$$

при $\rho > 1$, $\mu \in \mathbb{R}$. Доказано отсутствие корней в левом угле $\pi/\rho \leq |\arg z| \leq \pi$ при $\rho > 1$, $1 \leq \mu < 1 + 1/\rho$. Рассмотрен вопрос о кратных корнях; в частности, показано, что классическая функция Миттаг-Леффлера целого порядка $E_n(z; 1)$ не имеет кратных корней.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. Следуя М. М. Джрбашяну [1], *функцией типа Миттаг-Леффлера* мы называем следующую целую функцию:

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/\rho)}, \quad \rho > 0, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

зависящую от двух параметров ρ и μ . Она превращается в *классическую функцию Миттаг-Леффлера* $E_\alpha(z)$ [2] при $\rho = 1/\alpha$, $\mu = 1$, т.е. $E_\rho(z; 1) = E_{1/\rho}(z)$.

За исключением случая $\rho = 1$, $\mu = -m$, $m \in \{-1\} \cup \mathbb{Z}_+$, когда $E_1(z; -m) = z^{m+1}e^z$, функция (1) имеет бесконечное множество корней [3]. Распределение корней классической функции Миттаг-Леффлера первыми изучали А. Виман [4] и Г. Пойа [5]. Статья [4] содержит утверждение о том, что при $\rho \leq 1/2$ все корни функции $E_\rho(z; 1)$ отрицательны и просты. В [5] то же утверждение доказано для $\rho = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. В работе М. М. Джрбашяна [6] (см. также [7]) показано, что это свойство имеет место и для корней функции $E_{1/2}(z; \mu)$ при $1 < \mu < 3$. В статье И. В. Островского и И. Н. Пересёлковой [8] предъявлено достаточно широкое множество пар параметров ρ и μ , при которых все корни функции (1) отрицательны и просты. В [8] также высказано предположение, что множество таких параметров есть в точности множество $0 < \rho \leq 1/2$, $0 < \mu < 1 + 1/\rho$. Предположение это было, однако, несколько поспешным, как показывают недавние результаты А. Ю. Попова [9], [10]: в каждом из следующих случаев:

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00698, и Программы “Ведущие научные школы”, грант НШ-680.2003.1.

$0.4 < \rho < 0.5$, $\mu \in (0, 2/\rho - 1]$ и $\rho = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, $\mu = 1 + n$, все корни функции (1) отрицательны и просты.

Вопрос об асимптотическом поведении корней функции (1) для частных значений ρ и μ рассматривался в работах [4] и [11] (см. также [1]). Автором [3] были получены асимптотические формулы для корней функции (1) при всех значениях ρ и μ . Из результатов [3], в частности, следует, что за исключением случая $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu = 3$, все корни функции (1), начиная с некоторого, просты. В [12] указан способ нумерации всех корней функции (1), согласованный с асимптотикой [3].

В статье [8] было найдено свойство отсутствия у функции (1) корней в правом угле

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho} \quad (2)$$

при $\rho > 1/2$ и при подходящих значениях $\mu = \mu(\rho)$. Соответствующий результат, касающийся случая $\rho > 1$, таков: если $\rho > 1$, $1 \leq \mu \leq 1 + 1/\rho$, то все корни функции (1) лежат вне угла (2).

До сих пор мы не касались мотивации. Конечно, обширность класса целых функций (1), обладающих замечательным асимптотическим поведением (см. [1]), уже служит достаточным основанием для деятельности по исследованию распределения их корней. Но важно отметить, что потребность в такой деятельности подкрепляется также различными аспектами спектральной теории [7], [13], теории аппроксимации [14], теории обратных задач [15].

В упрощенной форме охарактеризуем основные результаты настоящей статьи.

1) Найдено свойство отсутствия корней функции (1) в левом угле

$$\frac{\pi}{\rho} \leq |\arg z| \leq \pi \quad (3)$$

при $\rho > 1$, $1 \leq \mu \leq 1 + 1/\rho$.

2) Рассмотрен вопрос о кратных корнях функции (1). Как уже отмечалось, за исключением случая $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu = 3$, функция (1) имеет не более конечного числа кратных корней. Однако к настоящему моменту мы располагали лишь двумя примерами кратных корней. Первый из них – это пример корня $z = 0$. Из (1) следует, что наличие у $E_\rho(z; \mu)$ корня $z = 0$ кратности $\geq s > 1$ равносильно тому, что $1/\Gamma(\mu) = 1/\Gamma(\mu + 1/\rho) = 1/\Gamma(\mu + 2/\rho) = \dots = 1/\Gamma(\mu + (s-1)/\rho) = 0$. Последнее возможно тогда и только тогда, когда $1/\rho$ целое. Т.е. при $\rho = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, функция (1) с надлежащим μ имеет кратный корень $z = 0$, причем за счет выбора μ можно добиться сколь угодно высокой кратности. Второй пример (указанный в [3]) таков: у функции $E_{1/2}(z; 3) = (\operatorname{ch} \sqrt{z} - 1)/z$ все корни двукратны.

В статье доказывается, что:

- а) при любом $\rho > 1$ существует счетное множество $M \subset \mathbb{R}_-$ такое, что при $\mu \in M$ функция (1) имеет двукратный положительный корень;
- б) у классической функции Миттаг-Леффлера целого порядка $E_n(z; 1)$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) нет кратных корней.

3) При $\rho > 1$, $\mu \in \mathbb{R}$ полностью решен вопрос о числе отрицательных и положительных корней функции (1).

2. Формулы для функции (1). Всюду в дальнейшем $z = re^{i\theta} = x + iy$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, и под степенной функцией понимаем ее главное значение. Пусть $0 < \beta < \pi$, $\varepsilon > 0$, $\gamma(\varepsilon, \beta)$ – бесконечный контур, состоящий из двух лучей $\arg z = \pm\beta$, $|z| \geq \varepsilon$ и дуги окружности $|z| = \varepsilon$, $|\arg z| \leq \beta$; обход контура предполагается таким, что точка 0 остается слева. Контур $\gamma(\varepsilon, \beta)$ разбивает плоскость на две бесконечные области $D_-(\varepsilon, \beta)$ и $D_+(\varepsilon, \beta)$, лежащие соответственно слева и справа от $\gamma(\varepsilon, \beta)$. Обозначим

$$F(z) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \beta)} \frac{\exp(\zeta^\rho) \zeta^{\rho(1-\mu)}}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D_\pm(\varepsilon, \beta), \quad (4)$$

где $\rho > 1$, $\mu \in \mathbb{C}$. Если $\pi/(2\rho) < \beta \leq \pi/\rho$, то верны формулы [1]

$$E_\rho(z; \mu) = F(z) + \rho z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\rho), \quad z \in D_+(\varepsilon, \beta), \quad (5)$$

$$E_\rho(z; \mu) = F(z), \quad z \in D_-(\varepsilon, \beta). \quad (6)$$

Считая μ вещественным, полагаем в этих формулах $\beta = \pi/\rho$. После чего предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$ деформируем $\gamma(\varepsilon, \beta)$ в контур $\gamma(\pi/\rho)$, состоящий из двух лучей $\arg z = \pm\pi/\rho$, $|z| \geq 0$; это возможно, если выполнено условие $\rho(1-\mu) > -1$, обеспечивающее интегрируемость около нуля и стремление к нулю интеграла по дуге окружности. Тогда

$$F(z) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(\pi/\rho)} \frac{\exp(\zeta^\rho) \zeta^{\rho(1-\mu)}}{\zeta - z} d\zeta, \quad \arg z \neq \pm\frac{\pi}{\rho}. \quad (7)$$

При $\arg z = \pm\pi/\rho$, $z \neq 0$ этот интеграл понимаем как особый (т.е. несобственный) интеграл от функции, неограниченной в проколотой окрестности точки $z = 0$, понимаемый в смысле главного значения). Функция $\exp(\zeta^\rho) \zeta^{\rho(1-\mu)}$ гладкая и потому особый интеграл существует. Значит, если $F(z)$ задается посредством (7), то формулы (5), (6) верны соответственно для $|\arg z| < \pi/\rho$ и $\pi/\rho < |\arg z| < \pi$. Далее, интеграл (7) есть интеграл типа Коши, поэтому применяя к нему формулу Сохоцкого (см., например, [16]), получаем

$$E_\rho(z; \mu) = F(z) + \frac{\rho}{2} \exp(z^\rho) z^{\rho(1-\mu)}, \quad \arg z = \pm\frac{\pi}{\rho}.$$

Таким образом, для $\rho > 1$, $\mu < 1 + 1/\rho$ верны следующие формулы:

$$E_\rho(z; \mu) = F(z), \quad \frac{\pi}{\rho} < |\arg z| < \pi, \quad (8)$$

$$E_\rho(z; \mu) = F(z) + \frac{\rho}{2} \exp(z^\rho) z^{\rho(1-\mu)}, \quad \arg z = \pm\frac{\pi}{\rho}, \quad (9)$$

$$E_\rho(z; \mu) = F(z) + \rho \exp(z^\rho) z^{\rho(1-\mu)}, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{\rho}. \quad (10)$$

Преобразуем формулу (7). Имеем

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{\rho}{2\pi i} \left(\int_0^\infty e^{-t^\rho} t^{\rho(1-\mu)} \frac{e^{i\pi(1-\mu)} e^{i\pi/\rho}}{te^{i\pi/\rho} - z} dt + \int_\infty^0 e^{-t^\rho} t^{\rho(1-\mu)} \frac{e^{-i\pi(1-\mu)} e^{-i\pi/\rho}}{te^{-i\pi/\rho} - z} dt \right) \\ &= \frac{\rho}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-t^\rho} t^{\rho(1-\mu)} \left(\frac{e^{-i\pi\mu}}{ze^{-i\pi/\rho} - t} - \frac{e^{i\pi\mu}}{ze^{i\pi/\rho} - t} \right) dt. \end{aligned}$$

Обозначим

$$f(t) = \frac{e^{-i\pi\mu}}{ze^{-i\pi/\rho} - t} - \frac{e^{i\pi\mu}}{ze^{i\pi/\rho} - t}, \quad g(t) = \frac{t \sin \pi\mu - z \sin \pi(\mu - 1/\rho)}{t^2 - 2tz \cos \pi/\rho + z^2}. \quad (11)$$

Так как $f(t) = 2ig(t)$, то мы получили следующие формулы для $F(z)$:

$$F(z) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-t^\rho} t^{\rho(1-\mu)} f(t) dt, \quad (12)$$

$$F(z) = \frac{\rho}{\pi} \int_0^\infty e^{-t^\rho} t^{\rho(1-\mu)} g(t) dt. \quad (13)$$

При $\rho = 1$ формула (4) верна с $\beta = \pi$, и проведенные рассуждения сохраняют силу для $|\arg z| < \pi$. Значит, подставляя в выражение для $g(t)$ значение $\rho = 1$, видим, что справедливо

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Формула (10) верна и для $\rho = 1$, $\mu < 2$; в этом случае

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \sin \pi\mu \int_0^\infty e^{-t} t^{1-\mu} \frac{dt}{t+z}. \quad (14)$$

Нам понадобятся асимптотические формулы (1): если $\rho > 1$, $\pi/(2\rho) < \alpha < \pi/\rho$, то при $r \rightarrow \infty$

$$E_\rho(z; \mu) = \begin{cases} -\frac{1}{z\Gamma(\mu - 1/\rho)} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), & \alpha \leq |\theta| \leq \pi, \\ -\frac{1}{z\Gamma(\mu - 1/\rho)} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) + \rho z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\rho), & |\theta| \leq \alpha. \end{cases} \quad (15)$$

Мы будем применять также следующие формулы [1]: при $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$

$$E_\rho(z; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} + z E_\rho\left(z; \mu + \frac{1}{\rho}\right), \quad (16)$$

$$E_\rho(z; \mu) = \mu E_\rho(z; \mu + 1) + \frac{z}{\rho} E'_\rho(z; \mu + 1). \quad (17)$$

3. Отрицательные корни.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\rho > 1$. Тогда

1) при

$$\mu \in \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \left[-n + \frac{1}{\rho}, -n + 1 \right] \right) \cup [1, +\infty)$$

у функции $E_\rho(z; \mu)$ нет отрицательных корней;

2) при

$$\mu \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(-n, -n + \frac{1}{\rho} \right)$$

функция $E_\rho(z; \mu)$ имеет единственный отрицательный корень, и этот корень простой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\theta = \pi$, $z = -r$ функция $g(t)$ из (11) имеет вид

$$g(t) = \frac{t \sin \pi \mu + r \sin \pi(\mu - 1/\rho)}{t^2 + 2tr \cos \pi/\rho + r^2}, \quad t > 0.$$

Поэтому, если мы введем функцию

$$g_1(t) = \frac{t \sin \pi \mu + \sin \pi(\mu - 1/\rho)}{\pi(t^2 + 2t \cos \pi/\rho + 1)}, \quad t > 0,$$

то из (8) и (13) будет следовать, что при $\mu < 1 + 1/\rho$

$$E(r) := \frac{1}{\rho} r^{\rho(\mu-1)} E_{\rho}(-r; \mu) = \int_0^{\infty} e^{-(tr)^{\rho}} t^{\rho(1-\mu)} g_1(t) dt, \quad r > 0. \quad (18)$$

Мы видим, что число $-r_0$ (где $r_0 > 0$) тогда и только тогда является отрицательным корнем функции $E_{\rho}(z; \mu)$, когда число r_0 является положительным корнем функции $E(r)$ той же кратности.

Если $-n + 1/\rho \leq \mu \leq -n + 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то у значений $\sin \pi \mu$, $\sin \pi(\mu - 1/\rho)$ знаки либо совпадают, либо одно из этих значений равно нулю. Значит для таких μ функция $g_1(t)$ сохраняет знак на $\mathbb{R}_+$, а именно, $\text{sign } g_1(t) = (-1)^n$, $t > 0$. В силу (18)

$$\text{sign } E_{\rho}(x; \mu) = (-1)^n, \quad x < 0, \quad -n + \frac{1}{\rho} \leq \mu \leq -n + 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (19)$$

и функция $E_{\rho}(z; \mu)$ не обращается в нуль на отрицательной вещественной полуоси. В утверждении 1) осталось рассмотреть значения $\mu > 1$.

Пусть $1 < \mu < 1 + 1/\rho$. Тогда $E_{\rho}(0; \mu) > 0$. Из формулы (15) следует, что $E_{\rho}(x; \mu) > 0$ также и в подходящей окрестности точки $-\infty$. Значит, либо у $E(r)$ положительных корней нет, либо их число (с учетом кратностей) четно.

Предположив, что $r_0 > 0$ – корень $E(r)$, рассмотрим функцию

$$G(t) = \int_t^{\infty} e^{-(r_0 t)^{\rho}} t^{\rho(1-\mu)} g_1(t) dt, \quad t \geq 0. \quad (20)$$

Тогда $G(0) = 0$. Так как $1 < \mu < 1 + 1/\rho$, то $\sin \pi \mu < 0$, $\sin \pi(\mu - 1/\rho) > 0$. Значит, $g_1(t)$ имеет единственный положительный корень t_0 , причем $g_1(t) > 0$ при $0 < t < t_0$ и $g_1(t) < 0$ при $t > t_0$. Из (20) следует, что $\text{sign } G'(t) = -\text{sign } g_1(t)$, и потому $G(t)$ убывает на $[0, t_0]$ и возрастает на $[t_0, +\infty)$. Но $G(0) = 0$ и $G(t) < 0$ при $t > t_0$. Поэтому $G(t) < 0$, $t > 0$. Из (18) следует, что

$$E'(r_0) = \rho r_0^{\rho-1} \int_0^{\infty} t^{\rho} dG(t).$$

Интегрируя здесь по частям, получаем

$$E'(r_0) = -\rho^2 r_0^{\rho-1} \int_0^{\infty} t^{\rho-1} G(t) dt. \quad (21)$$

Отсюда и из отрицательности $G(t)$ вытекает, что производная функции $E(r)$ в ее возможном положительном корне обязательно положительна. А это невозможно, если число положительных корней $E(r)$ четно. Значит, при $1 < \mu < 1 + 1/\rho$ у $E_\rho(z; \mu)$ отрицательных корней нет. При этом $E_\rho(x; \mu) > 0, x < 0$.

Последнее неравенство и формула (19) с $n = 0$ показывают, что $E_\rho(x; \mu) > 0, x < 0$, если $1/\rho \leq \mu < 1 + 1/\rho$. А отсюда и из формулы (17) следует, что если $1/\rho \leq \mu < 1 + 1/\rho$, то производная функции $E_\rho(z; \mu + 1)$ в ее возможном отрицательном корне отрицательна. Но снова функция $E_\rho(x; \mu + 1)$ положительна и в нуле, и (по формуле (15)) в окрестности точки $-\infty$. Следовательно, у функции $E_\rho(z; \mu + 1)$ нет отрицательных корней при $1/\rho \leq \mu < 1 + 1/\rho$, т.е. у функции $E_\rho(z; \mu)$ нет отрицательных корней при $1 + 1/\rho \leq \mu < 2 + 1/\rho$, причем $E_\rho(x; \mu) > 0, x < 0$. Повтор этого рассуждения дает знакоположительность $E_\rho(x; \mu), x < 0$, при $2 + 1/\rho \leq \mu < 3 + 1/\rho$. И так далее. В итоге получаем отсутствие отрицательных корней у функции $E_\rho(z; \mu)$ при $\mu > 1$, и утверждение 1) доказано.

2) Пусть $\mu \in (-n, -n + 1/\rho), n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\text{sign } E_\rho(0; \mu) = \text{sign } \Gamma(\mu) = (-1)^n$, и по формуле (15), $\text{sign } E_\rho(x; \mu) = \text{sign } \Gamma(\mu - 1/\rho) = (-1)^{n-1}, x < -R$, при достаточно большом $R > 0$. То есть в нуле и в окрестности точки $-\infty$ функция $E_\rho(x; \mu)$ принимает значения разных знаков. Поэтому она имеет хотя бы один отрицательный корень. Надо доказать, что он единственный и простой.

Теперь значения $\sin \pi \mu, \sin \pi(\mu - 1/\rho)$ имеют разные знаки, причем $\text{sign } g_1(t) = \text{sign } \sin \pi \mu = (-1)^n, t > t_0$, где t_0 — единственный положительный корень функции $g_1(t)$. Рассуждая так же, как в случае $1 < \mu < 1 + 1/\rho$, делаем вывод, что $\text{sign } G(t) = (-1)^n, t > 0$. В силу (21) производная функции $E(r)$ во всех ее положительных корнях имеет один и тот же знак, что возможно только в случае единственного простого корня. Утверждение 2) верно. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В ходе доказательства мы убедились (см. часть текста после (21)), что если $1 < \mu < 1 + 1/\rho$, то $E_\rho(x; \mu) > 0, x < 0$.

4. Положительные корни. Перед их исследованием нелишне напомнить вытекающие из определения факты: при $\mu \geq 0$ функция $E_\rho(x; \mu)$ положительна при $x > 0$ (и, следовательно, не имеет положительных корней), а при $\mu = -m, m \in \mathbb{Z}_+$, имеет в точке $z = 0$ простой корень при $\rho > 1$ и корень кратности $m + 1$ при $\rho = 1$.

ТЕОРЕМА 2. (I) Пусть $\rho > 1, \mu < 0$. Тогда реализуется одна и следующих возможностей: множество положительных корней функции (1) либо пусто, либо состоит из одной простой точки, либо состоит из двух простых точек, либо состоит из одной точки кратности 2. При этом

- 1) если $\mu \in [-2n - 1, -2n), n \in \mathbb{Z}_+$, то функция (1) имеет единственный положительный корень, являющийся простым;
- 2) существуют последовательности $\nu_n, \mu_n, n \in \mathbb{N}$, такие, что $-2n + 1/\rho < \nu_n \leq \mu_n < -2n + 1$ и
 - а) при $-2n \leq \mu < \nu_n$ у функции (1) нет положительных корней;
 - б) при $\mu_n < \mu < -2n + 1$ функция (1) имеет два простых положительных корня;
 - в) при $\mu = \nu_n, \mu_n$ функция (1) имеет положительный корень кратности два.

(II) Функция $E_1(z; \mu)$ имеет единственный положительный корень являющийся простым, если $\mu \in (-2n - 1, -2n), n \in \mathbb{Z}_+$, и не имеет положительных корней,

если $\mu \in [-2n, -2n + 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (I) Из (10), (13) и (11) с $z = r > 0$ получаем

$$E(r) = E(r; \mu) := \frac{1}{\rho} r^{\rho(\mu-1)} E_{\rho}(r; \mu) = e^{r^{\rho}} + \int_0^{\infty} e^{-(rt)^{\rho}} t^{\rho(1-\mu)} g_1(t) dt, \quad r > 0, \quad (22)$$

где на этот раз

$$g_1(t) = \frac{t \sin \pi \mu - \sin \pi(\mu - 1/\rho)}{\pi(t^2 - 2t \cos \pi/\rho + 1)}, \quad t > 0. \quad (23)$$

1) Пусть $\mu \in (-2n - 1, -2n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\Gamma(\mu) < 0$, $E_{\rho}(0; \mu) < 0$, и так как по определению $E_{\rho}(+\infty; \mu) = \lim_{x \rightarrow +\infty} E_{\rho}(x; \mu) = +\infty$, то функция $E(r)$ ($r > 0$) имеет хотя бы один корень. Если $\mu = -2n - 1$, то $1/\Gamma(\mu) = E_{\rho}(0; \mu) = 0$. Но $\Gamma(\mu + 1/\rho) < 0$ и, значит, $E'_{\rho}(0; \mu) < 0$. Отсюда $E_{\rho}(x; \mu) < 0$ при достаточно малых $x > 0$, и снова $E(r)$ имеет хотя бы один корень. Надо доказать, что при $\mu \in [-2n - 1, -2n)$ этот корень единственный и простой.

Сохраняем за $G(t)$ обозначение (20), где r_0 – (какой-нибудь) положительный корень $E(r)$. Утверждается, что $G(t) < 0$, $t > 0$. Действительно, если $-2n - 1 \leq \mu \leq -2n - 1 + 1/\rho$, то $\sin \pi \mu \leq 0$, $-\sin \pi(\mu - 1/\rho) \leq 0$, причем знак равенства одновременно не достигается. Значит, $g_1(t) < 0$, $t > 0$, и $G(t) < 0$, $t > 0$. Если же $-2n - 1 + 1/\rho < \mu < -2n$, то в (22) положим $r = r_0$. Так как $E(r_0) = 0$, то получим $G(0) = -\exp(r_0^{\rho}) < 0$. Но теперь $\sin \pi \mu < 0$, $-\sin \pi(\mu - 1/\rho) > 0$ и, значит, подобно случаю $1 < \mu < 1 + 1/\rho$ в теореме 1, $g_1(t) < 0$, $t > t_0$, и $g_1(t) > 0$, $0 < t < t_0$, при соответствующем t_0 . Из этих данных о знаке $g_1(t)$ и из $G(0) < 0$ следует, что $G(t) < 0$, $t > 0$ (см. рассуждения после формулы (20)).

В силу (22)

$$E'(r) = E'(r; \mu) = \rho r^{\rho-1} \left(e^{r^{\rho}} - \int_0^{\infty} e^{-(rt)^{\rho}} t^{\rho(2-\mu)} g_1(t) dt \right). \quad (24)$$

Следовательно,

$$E'(r_0) = \rho r_0^{\rho-1} \left(e^{r_0^{\rho}} + \int_0^{\infty} t^{\rho} dG(t) \right),$$

и после интегрирования по частям имеем

$$E'(r_0) = \rho r_0^{\rho-1} \left(e^{r_0^{\rho}} - \rho \int_0^{\infty} t^{\rho-1} G(t) dt \right).$$

Так как $G(t) < 0$, отсюда следует, что производная функции $E(r)$ в ее положительном корне положительна. А это возможно только в случае единственного простого корня. Утверждение 1) доказано.

2) Пусть $\mu \in [-2n, -2n + 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mu - 1 \in [-2n - 1, -2n)$, и по утверждению 1) функция $E(r; \mu - 1)$ имеет единственный положительный корень, являющийся простым. По формуле

$$E'(r; \mu) = \rho r^{\rho-1} E(r; \mu - 1), \quad (25)$$

которая следует из (24), (22), (23), производная $E'(r; \mu)$ при $r > 0$ имеет единственный корень, являющийся простым. Отсюда и из $E(+0; \mu) = E(+\infty; \mu) = +\infty$ вытекает, что у $E(r)$ либо нет корней, либо имеется два простых, либо один корень кратности два.

Если $\mu \in [-2n, -2n + 1/\rho]$, то коэффициенты $\sin \pi \mu$, $-\sin \pi(\mu - 1/\rho)$ неотрицательны и одновременно не обращаются в нуль. Значит, $g_1(t) > 0$, $t > 0$, и из (22) следует, что при таких μ у $E_\rho(z; \mu)$ нет положительных корней.

Пусть $\mu \rightarrow -2n + 1 - 0$, где n фиксировано. Тогда $E_\rho(z; \mu) \rightarrow E_\rho(z; -2n + 1)$ равномерно в каждом круге. Но функция $E_\rho(z; -2n + 1)$ имеет простой корень в точке $z = 0$ и не имеет других корней в достаточно малой окрестности $U(0)$ нуля. По теореме Гурвица при всех μ , достаточно близких к $-2n + 1$, и таких, что $\mu < -2n + 1$, у $E_\rho(z; \mu)$ имеется один и только один корень в $U(0)$. По теореме 1 отрицательных корней у $E_\rho(z; \mu)$ при таких значениях μ нет. Если бы в $U(0)$ находился невещественный корень z_1 , то там же был бы и комплексно сопряженный корень $\bar{z}_1$ (в силу вещественности $E_\rho(x; \mu)$). Значит, в $U(0)$ должен быть простой положительный корень функции $E(r)$. Но в таком случае, в силу вывода, сделанного после формулы (25), $E(r)$ имеет два простых положительных корня, как только $\mu < -2n + 1$ и μ , достаточно близко к $-2n + 1$. Обозначим через μ_n нижнюю грань таких μ .

Имеет место следующее промежуточное утверждение. Пусть при $\mu_0 \in (-2n, -2n + 1)$ функция $E_\rho(x; \mu_0)$ обладает одним из следующих свойств:

- а) она не имеет положительных корней;
- б) она имеет два простых положительных корня.

Тогда для всех μ из некоторой окрестности точки μ_0 функция $E_\rho(x; \mu)$ обладает тем же свойством. Действительно, обозначим $m(\mu) = \min(E_\rho(x; \mu) : x \in [0, +\infty))$. Так как $E_\rho(0; \mu_0) > 0$, $E_\rho(+\infty; \mu_0) = +\infty$, то $m(\mu_0) > 0$ и $m(\mu_0) < 0$ соответственно в случаях а) и б). В силу непрерывности функции $m(\mu)$ эти неравенства сохраняются и в некоторой окрестности точки μ_0 , и сформулированное утверждение верно.

Докажем, что при $\mu = \mu_n$ функция $E_\rho(x; \mu)$ имеет двукратный положительный корень. В самом деле, если бы это было не так, то по выводу, сделанному после формулы (25), функция $E_\rho(x; \mu_n)$ либо имела бы два положительных простых корня, либо не имела бы ни одного. По промежуточному утверждению это относилось бы и к функции $E_\rho(x; \mu)$ для всех μ , из некоторой окрестности точки μ_n . А это противоречило бы смыслу величины μ_n .

Точно так же, если мы обозначим через ν_n верхнюю грань тех $\mu > -2n$, для которых $E_\rho(z; \mu)$ не имеет положительных корней, то $E_\rho(z; \nu_n)$ имеет двукратный положительный корень и $-2n + 1/\rho < \nu_n$. Очевидно, $\nu_n \leq \mu_n$, и часть (I) теоремы 2 доказана.

(II) Пусть $\rho = 1$, $\mu < 0$. Воспользуемся формулой (10) с представлением (14) для $F(z)$. Тогда формула (22) сохраняется, если под $g_1(t)$ понимать функцию $g_1(t) = (\sin \pi \mu)/(\pi(t + 1))$. Если $\mu \in [-2n, -2n + 1]$, $n \in \mathbb{N}$, то $g_1(t) \geq 0$, и в силу (22) $E(r) > 0$, $r > 0$. Значит, для таких μ положительных корней у $E_1(z; \mu)$ нет. Если $\mu \in (-2n - 1, -2n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то $E_1(0; \mu) < 0$. Но $E_1(+\infty; \mu) = +\infty$. Поэтому у $E_1(x; \mu)$ есть хотя бы один положительный корень. То, что он единственный и простой, доказывается так же, как в утверждении 1) части (I), где все опиралось на отрицательность функции $G(t)$, $t > 0$. Но это свойство имеет место и теперь (с $\rho = 1$), так как $g_1(t) < 0$, $t > 0$ при указанных значениях μ . Часть (II) верна. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Утверждение 2) части (I) характеризует положительные корни $E_\rho(z; \mu)$ недостаточно полно. Мы рискуем высказать предположение, что на самом деле $\nu_n = \mu_n$.

5. Поведение вещественных корней. Пусть $\rho > 1$. При $\mu \in (-n, -n + 1/\rho)$,

$n \in \mathbb{Z}_+$, по теореме 1 у $E_\rho(z; \mu)$ имеется единственный отрицательный корень; обозначим его $x_-(\mu)$. При $\mu \in [-2n-1, -2n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, у $E_\rho(z; \mu)$ по теореме 2 имеется единственный положительный корень, являющийся простым; обозначим его $x_+(\mu)$. Два положительных простых корня $E_\rho(z; \mu)$ при $\mu \in (\mu_n, -2n+1)$ обозначаем $x_+^1(\mu)$, $x_+^2(\mu)$, $x_+^1(\mu) < x_+^2(\mu)$. Через $x_+^*(\mu_n)$ обозначаем двукратный положительный корень $E_\rho(z; \mu)$ при $\mu = \mu_n$. Обозначение $x_+(\mu)$ сохраним и для $\rho = 1$, $\mu \in (-2n-1, -2n)$.

ТЕОРЕМА 3. 1) Если $\rho > 1$, то

- а) $x_+(\mu) \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow -2n-0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x_+(\mu) \rightarrow x_+(-2n-1)$, $\mu \rightarrow -2n-1+0$, $n \in \mathbb{Z}_+$;
- б) $x_-(\mu) \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow -n+0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x_-(\mu) \rightarrow -\infty$, $\mu \rightarrow -n+1/\rho-0$, $n \in \mathbb{Z}_+$;
- в) $x_+^1(\mu), x_+^2(\mu) \rightarrow x_+^*(\mu_n)$, $\mu \rightarrow \mu_n+0$, $n \in \mathbb{N}$, $x_+^1(\mu) \rightarrow 0$, $x_+^2(\mu) \rightarrow x_+(-2n+1)$, $\mu \rightarrow -2n+1-0$, $n \in \mathbb{N}$.

2) Если $\rho = 1$, то $x_+(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow -2n-1+0$ и $\mu \rightarrow -2n-0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Точка $x = 0$ — простой корень функции $E_\rho(x; -2n)$. Это значит, что при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ значения $E_\rho(\pm\varepsilon; -2n)$ имеют разные знаки. В силу непрерывности функции $E_\rho(\pm\varepsilon; \mu)$ (переменной μ), при всех μ , достаточно близких к $-2n$ и меньших $-2n$, значения $E_\rho(\pm\varepsilon; \mu)$ имеют разные знаки, и потому в ε -окрестности точки $x = 0$ найдется корень функции $E_\rho(x; \mu)$, очевидно, отличный от этой точки. Но по теореме 1 для таких μ у $E_\rho(x; \mu)$ нет отрицательных корней. Значит, корень, о котором идет речь, есть $x_+(\mu)$, т.е. $x_+(\mu) \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow -2n-0$.

В случае $\mu \rightarrow -2n-1+0$ окрестность точки $x = 0$ заменяется окрестностью точки $x_+(-2n-1)$, и рассуждения аналогичны (и даже проще, так как теорема 1 здесь не нужна). Утверждение а) доказано.

б) По тем же соображениям для μ , достаточно близких к $-n$ и $\mu > -n$, в проколотой окрестности точки $x = 0$ находится корень $E_\rho(x; \mu)$. При четном n , он не может быть положительным по теореме 2, а при нечетном n единственный положительный корень $E_\rho(x; \mu)$ лежит в окрестности точки $x_+(-2n-1)$ по утверждению а) теоремы 3. Значит, этот корень есть $x_-(\mu)$, и $x_-(\mu) \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow -n+0$.

Пусть $\mu \rightarrow -n+1/\rho-0$. Тогда $E_\rho(x; \mu) \rightarrow E_\rho(x; -n+1/\rho)$ равномерно на каждом отрезке. По теореме 1 у $E_\rho(x; -n+1/\rho)$ нет отрицательных корней; очевидно, и точка $x = 0$ не является ее корнем. Допустим, что $-R \leq x_-(\mu) < 0$ при некотором $R > 0$ и для всех μ из некоторой последовательности $\mu_j \rightarrow -n+1/\rho-0$. Тогда некоторая последовательность $x_-(\mu_j) \rightarrow x_- \in [-R, 0]$, и в силу равномерной сходимости x_- — корень $E_\rho(x; -n+1/\rho)$, что невозможно. Это означает, что $x_-(\mu) \rightarrow -\infty$, $\mu \rightarrow -n+1/\rho-0$. Утверждение б) доказано.

в) Первая строка следует из теоремы Гурвица. Вторая строка доказывается так же, как утверждение а). Часть 1) теоремы 3 доказана.

Часть 2) доказывается так же, как первая часть утверждения а). Теорема 3 верна.

6. Отсутствие корней в левом угле. При фиксированных $R, \rho > 0$ обозначим

$$I(x) = \int_0^\infty e^{-Rt^\rho} \frac{t-x}{t^2-2tx+1} dt, \quad x \leq 1, \quad (26)$$

где при $x = 1$ интеграл понимается как особый.

ЛЕММА 1. Функция $I(x)$ убывает при $x \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x < 1$, то $t^2 - 2tx + 1 > 0$, и интегрируя по частям, находим

$$I(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-Rt^\rho} d \log(t^2 - 2tx + 1) = \frac{R\rho}{2} \int_0^\infty e^{-Rt^\rho} t^{\rho-1} \log(t^2 - 2tx + 1) dt. \quad (27)$$

Очевидно, правая часть убывает на полупрямой $x \leq 1$. Но пока мы знаем только, что она совпадает с $I(x)$ при $x < 1$. Поэтому нам надо проверить, что формальная подстановка $x = 1$ в правую часть (27) дает особый интеграл $I(1)$. Обозначив $B(\varepsilon) = \mathbb{R}_+ \setminus (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, по определению особого интеграла имеем

$$I(1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(\varepsilon)} e^{-Rt^\rho} \frac{dt}{t-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(\varepsilon)} e^{-Rt^\rho} d \log |t-1|.$$

Снова интегрируем по частям. Получаем

$$\begin{aligned} I(1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left((e^{-R(1-\varepsilon)^\rho} - e^{-R(1+\varepsilon)^\rho}) \log \varepsilon + \frac{R\rho}{2} \int_{B(\varepsilon)} e^{-Rt^\rho} t^{\rho-1} \log(t-1)^2 dt \right) \\ &= \frac{R\rho}{2} \int_0^\infty e^{-Rt^\rho} t^{\rho-1} \log(t-1)^2 dt, \end{aligned}$$

причем последний интеграл существует в обычном смысле. Мы убедились, что при $x = 1$ правая часть в (27) есть $I(1)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть функция $H(z)$ является гармонической и ограниченной в угле $\theta_0 < \theta < \theta_1$ и непрерывной при $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$. Пусть, кроме того, $H = 0$ на одной стороне угла, а на другой $H > 0$. Тогда $H(z) > 0$ при $\theta_0 < \theta < \theta_1$.

Если данный угол есть полуплоскость $0 < \theta < \pi$, то лемма вытекает из представления функции $H(z)$ интегралом Пуассона от $H(x)$ и из положительности ядра Пуассона. Общий случай сводится к этому конформным отображением угла на полуплоскость.

Обозначим через A_ρ ($\rho > 1$) множество всех $\mu \in \mathbb{R}$ таких, что если $\mu \in A_\rho$, то все ненулевые корни функции $E_\rho(z; \mu)$ лежат вне угла (3).

ТЕОРЕМА 4. Справедливы следующие утверждения:

- 1) $A_\rho \subset (\bigcup_{n=0}^\infty [-n + 1/\rho, -n + 1]) \cup [1, +\infty)$;
- 2) $A_\rho \supset [1, 1 + 1/\rho] \cup (-\mathbb{Z}_+) \cup (-\mathbb{Z}_+ + 1/\rho)$;
- 3) $A_2 \supset (\bigcup_{n=0}^\infty [-n + 1/2, -n + 1]) \cup [1, 3/2]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из теоремы 1. Ясно, что при доказательстве утверждений 2), 3) достаточно рассматривать угол $\pi/\rho \leq \theta < \pi$ вместо угла (3).

2) Пусть $\mu = t = 1, 0 - 1, \dots$. С использованием (11) имеем

$$\begin{aligned} (-1)^{m-1} f(t) &= \frac{1}{(ze^{i\pi/\rho} - t)} - \frac{1}{(ze^{-i\pi/\rho} - t)}, \\ (-1)^{m-1} \operatorname{Re} f(t) &= \frac{r \cos(\theta + \pi/\rho) - t}{r^2 - 2tr \cos(\theta + \pi/\rho) + t^2} - \frac{r \cos(\theta - \pi/\rho) - t}{r^2 - 2tr \cos(\theta - \pi/\rho) + t^2}. \end{aligned}$$

Обозначим $a = \cos(\theta - \pi/\rho)$, $b = \cos(\theta + \pi/\rho)$, $R = r^\rho$. По формуле (12)

$$\begin{aligned} (-1)^{m-1} \operatorname{Im} F(z) &= -\frac{\rho}{2\pi} \int_0^\infty e^{-t^\rho} \operatorname{Re} f(t) dt \\ &= \frac{\rho}{2\pi} \int_0^\infty e^{-Rt^\rho} \left(\frac{t-b}{t^2-2bt+1} - \frac{t-a}{t^2-2at+1} \right) dt = \frac{\rho}{2\pi} (I(b) - I(a)) \end{aligned}$$

в обозначениях (26), причем $a, b \leq 1$. Имеем $a - b = 2 \sin \theta \sin \pi/\rho$ и, значит, $a > b$ при $0 < \theta < \pi$. По лемме 1

$$(-1)^{m-1} \operatorname{Im} F(z) > 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad r > 0. \quad (28)$$

Используя это и формулы (9), (8), видим, что

$$(-1)^{m-1} \operatorname{Im} E_\rho(z; m) > 0, \quad \frac{\pi}{\rho} \leq \theta < \pi, \quad r > 0, \quad (29)$$

и, значит, $(-\mathbb{Z}_+) \cup \{1\} \subset A_\rho$. Из (29) и (16) сразу следует, что $\operatorname{Im}(z E_\rho(z; m + 1/\rho)) \neq 0$, $\pi/\rho \leq \theta < \pi$, $r > 0$, т.е. $m + 1/\rho \in A_\rho$ для $m = 1, 0, -1, \dots$

Чтобы охватить остальное множество параметров $\mu \in (1, 1 + 1/\rho)$ в утверждении 2) при фиксированных $\rho > 1$, $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < s < 1$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$G(z) = G(z; \rho, \mu, s) := E_\rho(z; \mu) - z^s E_\rho\left(z; \mu + \frac{s}{\rho}\right),$$

которая аналитична при $y = \operatorname{Im} z > 0$ и непрерывна при $y \geq 0$. Из (15) следует ограниченность функции $G(z)$ при $y > 0$. Значит, гармоническая функция $H(z) = \operatorname{Im} G(z)$ ($y > 0$) ограничена при $y > 0$ и непрерывна при $y \geq 0$.

Так как значения $E_\rho(x; \mu)$, $E_\rho(x; \mu + s/\rho)$ вещественны при $x \in \mathbb{R}$, то $H(x) = 0$ при $x > 0$ и

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} H(x) &= -\operatorname{sign} \operatorname{Im} \left(|x|^s e^{i\pi s} E_\rho\left(x; \mu + \frac{s}{\rho}\right) \right) \\ &= -\operatorname{sign} E_\rho\left(x; \mu + \frac{s}{\rho}\right), \quad x < 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Фиксируем $\mu = m = 1$. По замечанию 2 $E_\rho(x; 1 + s/\rho) > 0$, $x < 0$. Значит, $H(x) < 0$, $x < 0$. По лемме 2 $H(z) < 0$, $y > 0$. По смыслу функции $G(z)$ это означает, что

$$\operatorname{Im} \left(z^s E_\rho\left(z; 1 + \frac{s}{\rho}\right) \right) > \operatorname{Im} E_\rho(z; 1), \quad y > 0, \quad (31)$$

если $0 < s < 1$. В силу (29) правая часть положительна в угле $\pi/\rho \leq \theta < \pi$. Значит, положительна и левая часть, т.е. функция $E_\rho(z; 1 + s/\rho)$ не обращается в нуль при $\pi/\rho \leq \theta < \pi$, если $0 < s < 1$. Утверждение 2) доказано.

3) Благодаря утверждениям 2), 1), надо доказать, что у функции $E_2(z; \mu)$ нет корней в угле $\pi/2 \leq \theta < \pi$, если

$$\mu \in \left(-m + \frac{1}{2}, -m + 1\right), \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (32)$$

Пусть сначала $\mu = -m + 1/2$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда по формуле (11) $(-1)^m f(t) = i/(iz + t) - i/(iz - t)$. Значит, если $z = iy$, $y > 0$, то $\operatorname{Re} f(t) = 0$, и по формуле (12) $\operatorname{Im} F(z) = 0$ на положительной мнимой полуоси. Тогда в силу (9)

$$\operatorname{sign} \operatorname{Im} E_2(z; \mu) = \operatorname{sign} \operatorname{Im}(e^{-z^2} z^{2(1-\mu)}) = \operatorname{sign} \sin \pi \left(\frac{1}{2} + m \right) = (-1)^m$$

на этой полуоси. Очевидно, $\operatorname{Im} E_2(x; \mu) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. По формуле (15) функция $E_2(z; \mu)$ ограничена в угле $\pi/2 < \theta < \pi$. Итак, гармоническая и ограниченная в угле $\pi/2 < \theta < \pi$ функция $\operatorname{Im} E_2(z; \mu)$ такова, что на одной стороне угла она есть тождественный нуль, а на другой стороне сохраняет знак $(-1)^m$. По лемме 2 всюду в угле $\pi/2 < \theta < \pi$ она сохраняет знак $(-1)^m$. Следовательно,

$$\operatorname{sign} \operatorname{Im} E_2\left(z; -m + \frac{1}{2}\right) = (-1)^m, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (33)$$

Зафиксировав $m \in \mathbb{Z}_+$, рассмотрим вспомогательную функцию $G(z) = G(z; 2, -m + 1/2, s)$, $0 < s < 1$. Напомним, что $H(x) = 0$, $x > 0$. Пусть сначала m четно. Тогда $E_2(x; -m + (1+s)/2) > 0$, $x < 0$, в силу (19), и значит, по формуле (30) $H(x) < 0$, $x < 0$. Отсюда по лемме 2 $H(z) < 0$, $y > 0$, и поэтому

$$\operatorname{Im}\left(z^s E_2\left(z; -m + \frac{(1+s)}{2}\right)\right) > \operatorname{Im} E_2\left(z; -m + \frac{1}{2}\right), \quad y > 0.$$

Благодаря (33), левая часть положительна в угле $\pi/2 \leq \theta < \pi$, и так как четное $m \in \mathbb{Z}_+$ в наших рассуждениях произвольно, мы доказали, что все значения μ из множества (32) с четным m принадлежат A_2 .

Если m нечетно, то в силу (19) $E_2(x; -m + (1+s)/2) < 0$, $x < 0$, и, следовательно, формула (30) на этот раз дает: $H(x) > 0$, $x < 0$, $0 < s < 1$. По лемме 2 $H(z) > 0$, $y > 0$. Но теперь $\operatorname{Im} E_2(z; -m + 1/2) < 0$, $\pi/2 \leq \theta < \pi$, в силу (33). Значит,

$$\operatorname{Im}\left(z^s E_2\left(z; -m + \left(1 + \frac{(1+s)}{2}\right)\right)\right) < \operatorname{Im} E_2\left(z; -m + \frac{1}{2}\right) < 0, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi,$$

и утверждение 3) доказано полностью. Теорема 4 верна.

ТЕОРЕМА 5. При $\rho > 1$ $\mu \in [1, 1 + 1/\rho]$ все корни функции $E_\rho(z; \mu)$ лежат на множестве

$$\frac{\pi}{2\rho} < |\arg z| < \frac{\pi}{\rho}, \quad \pi(2n-1) < |\operatorname{Im} z^\rho| < 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (34)$$

В частности, все корни классической функции Миттаг-Леффлера $E_\rho(z; 1)$ при $\rho > 1$ лежат на множестве (34).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\rho > 1$, $1 \leq \mu \leq 1 + 1/\rho$ все корни функции (1) лежат вне угла (3) (по теореме 4) и вне угла (2) (в силу [8]). Значит, достаточно рассмотреть значения $\pi/(2\rho) < \theta < \pi/\rho$. При $\mu = t = 1$ из формул (9) и (28) следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} E_\rho(z; 1) &= \operatorname{Im} F(z) + \rho \operatorname{Im} e^{z^\rho} > \rho e^{\operatorname{Re} z^\rho} \sin(\operatorname{Im} z^\rho), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{\rho}, \\ \operatorname{Im} E_\rho(z; 1) &> 0, \quad 2\pi n \leq \operatorname{Im} z^\rho \leq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{\rho}, \end{aligned} \quad (35)$$

и для $\mu = 1$ теорема 5 верна. Теперь объединяя (35) сначала с формулой (16), а затем с неравенством (31), получаем утверждение теоремы для $\mu = 1 + 1/\rho$ и $\mu \in (1, 1 + 1/\rho)$. Теорема 5 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $\rho > 1$, $1 \leq \mu \leq 1 + 1/\rho$ у функции (1) нет корней в круге $|z| \leq \pi^{1/\rho}$.

7. Отсутствие кратных корней.

ЛЕММА 3. Если z_0 – кратный корень функции $E_n(z; \mu)$, $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{C}$, то

$$\frac{1}{\Gamma(\mu-1)} + \frac{z_0}{\Gamma(\mu-1+1/n)} + \cdots + \frac{z_0^{n-1}}{\Gamma(\mu-1+(n-1)/n)} = 0. \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть z_0 – кратный корень функции $E_n(z; \mu)$. Тогда по формуле (17) z_0 – корень функции $E_n(z; \mu-1)$, и в силу (16)

$$\frac{1}{\Gamma(\mu-1)} + z_0 E_n\left(z_0; \mu-1 + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Теперь формулу (16) применяем к $E_n(z; \mu-1+1/n)$. Получаем

$$\frac{1}{\Gamma(\mu-1)} + \frac{z_0}{\Gamma(\mu-1+1/n)} + z_0^2 E_n\left(z_0; \mu-1 + \frac{2}{n}\right) = 0.$$

На этот раз формулу (16) применяем к $E_n(z; \mu-1+2/n)$ и так далее. После n шагов с учетом $E_n(z_0; \mu) = 0$ получаем (36).

ТЕОРЕМА 6. 1) У функции $E_1(z; \mu)$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \notin -\mathbb{N}$, нет кратных корней.

2) У функции $E_n(z; \mu)$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $1 \leq \mu < 1 + 1/n$, нет кратных корней. В частности, у классической функции Миттаг-Леффлера $E_n(z; 1)$ целого порядка нет кратных корней.

3) Число кратных корней функции $E_n(z; \mu)$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\mu \in \mathbb{C}$, не превосходит $n-1$.

4) У функции $E_2(z; \mu)$ при $\mu \in \mathbb{R}$ нет кратных неположительных корней, а при $\mu \geq 0$ нет кратных корней.

5) У функции $E_3(z; \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$, нет корней кратности выше двух.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) При $n = 1$ условие (36) означает, что $1/\Gamma(\mu - 1) = 0$. Это возможно только для $\mu = 1, 0, -1, \dots$. Но в этом случае $E_1(z; \mu)$ имеет явный вид (см. введение), из которого следует, что при $\mu = 1, 0$ кратных корней у $E_1(z; \mu)$ нет. А значения $\mu \in -\mathbb{N}$ (когда $z = 0$ – корень кратности $1 - \mu$) мы исключили. Утверждение 1) доказано.

2) Так как $1 \leq \mu \leq 1 + 1/n$ и функция $\Gamma(x)$ убывает на $(0, 1]$, необходимое условие (36) кратного корня есть уравнение

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z_0^{n-1} = 0$$

с монотонными коэффициентами $0 < a_0 < \dots < a_{n-1}$. Хорошо известно [16, гл. 4, § 3], [17, отдел 3, гл. 1, § 2], что все корни такого уравнения лежат в круге $|z| < 1$. Но по следствию 1 у $E_n(z; \mu)$ нет кратных корней в этом круге. Значит, у $E_n(z; \mu)$ нет кратных корней.

3) Следует из (36), являющимся уравнением порядка не выше $n - 1$.

4) По теореме 1 возможный отрицательный корень функции $E_2(z; \mu)$ является простым. Если бы был невещественный кратный корень z_0 , то кратным корнем было бы и число $\bar{z}_0$. А это противоречит утверждению 3). При $\mu \geq 0$ надо учесть теорему 2, по которой у $E_2(z; \mu)$, $\mu \geq 0$, нет положительных корней.

5) Пусть z_0 – корень функции $E_n(z; \mu)$ кратности выше двух. Тогда из формулы (17) следует, что z_0 – кратный корень функции $E_n(z; \mu - 1)$. По лемме 3 наряду с (36) должно выполняться условие

$$\frac{1}{\Gamma(\mu - 2)} + \frac{z_0}{\Gamma(\mu - 2 + 1/n)} + \dots + \frac{z_0^{n-1}}{\Gamma(\mu - 2 + (n - 1)/n)} = 0.$$

При $n = 3$ оба эти условия означают, что z_0 – общий корень двух квадратных уравнений. Из свойства $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$ вытекает, что коэффициенты этих уравнений не являются пропорциональными, поэтому данные уравнения могут иметь не более одного общего корня z_0 . Теперь с одной стороны, $z_0 \notin \mathbb{R}$ по теоремам 1, 2, а с другой – если $z_0 \notin \mathbb{R}$, то и число $\bar{z}_0$ должно быть общим корнем, что невозможно. Утверждение 5) верно. Теорема 6 доказана.

8. Случай $\rho = 1$. Следующие две леммы доказаны в [8].

ЛЕММА 4. Пусть функция $f(t)$ неотрицательна и не возрастает на $\mathbb{R}_+$, причем $f(t)$ убывает на некотором интервале. Пусть $tf(t)/(t + 1) \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Тогда

$$\int_0^\infty f(t) \sin yt \, dt > 0, \quad y > 0.$$

ЛЕММА 5. При $\mu > 0$ справедлива формула

$$\operatorname{Im}(e^{-z} E_1(z; \mu)) = \frac{1 - \mu}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 e^{-xt} t^{\mu-2} \sin yt \, dt, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (37)$$

В [8] доказано, что при $\mu \in (0, 2)$ у функции $E_1(z; \mu)$ нет корней в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. Справедлива

ТЕОРЕМА 7. 1) При $\mu > 2$ все корни функции $E_1(z; \mu)$ лежат на множестве $\operatorname{Re} z > \mu - 2$, $|\operatorname{Im} z| > \pi$.

2) При $1 < \mu < 2$ все корни функции $E_1(z; \mu)$ лежат на множестве

$$\operatorname{Re} z < \mu - 2, \quad |\operatorname{Im} z| > \pi. \quad (38)$$

3) При $0 < \mu < 1$ все корни функции $E_1(z; \mu)$, за исключением единственного отрицательного корня, лежат на множестве (38).

4) При $\mu \in (-n, -n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ у функции $E_1(z; \mu)$ существует единственный отрицательный корень и этот корень простой.

Заметим, что положительные корни функции $E_1(z; \mu)$ охарактеризованы в теореме 1, и напомним, что при $\mu = 1, 0, -1, \dots$ эта функция имеет явный вид (см. введение).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [12] доказано, что в случаях 1), 2) все корни $E_1(z; \mu)$ лежат соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Re} z \geq \mu - 2$.

Пусть $0 < \mu < 1$. При фиксированном $x \in \mathbb{R}$ положим

$$f(t) = e^{-xt} t^{\mu-2}, \quad t \in (0, 1), \quad f(t) = 0, \quad t \geq 1$$

и покажем, что при $x \geq \mu - 2$ функция $f(t)$ удовлетворяет условиям леммы 4. Условие $tf(t)/(t+1) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ очевидно. Далее,

$$f'(t) = e^{-xt} t^{\mu-3}(-xt + (\mu - 2)), \quad 0 < t < 1.$$

Если $x \geq 0$, то $f'(t) < 0$ на $(0, 1)$, так как $\mu - 2 < 0$. Если $x < 0$, то $-xt + \mu - 2 < -x + \mu - 2$, $t \in (0, 1)$. Значит, $f'(t) < 0$ на $(0, 1)$ также и при $\mu - 2 \leq x < 0$. Итак, $f(t)$ убывает на $(0, 1)$. В итоге при $x \geq \mu - 2$ все условия леммы 4 выполнены. Применяя эту лемму к интегралу (37), получаем, что $E_1(z; \mu) \neq 0$ при $x \geq \mu - 2$, $y \neq 0$.

Пусть $0 < y \leq \pi$, $\mu > 0$, $\neq 1$. Тогда $\sin yt > 0$ при $t \in (0, 1)$, и формула (37) показывает, что $E_1(z; \mu) \neq 0$ при $0 < y \leq \pi$, а значит, и при $0 < |y| \leq \pi$. То есть во всех случаях 1)–3) у функции $E_1(z; \mu)$ нет корней при $0 < |y| \leq \pi$. А из формулы

$$E_1(z; \mu + 1) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 e^{zt} (1-t)^{\mu-1} dt, \quad \mu > 0$$

[1] следует, что $E_1(z; \mu)$ не имеет вещественных корней при $\mu > 1$, и утверждения 1), 2) доказаны. При $0 < \mu < 1$ у $E_1(z; \mu)$ нет положительных корней (что следует из (1)), а по утверждению 4) имеется единственный отрицательный корень, и 3) также доказано.

4) Пусть $\mu \in (-n, -n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда значения $\Gamma(\mu)$, $\Gamma(\mu - 1)$ имеют разные знаки. Но $E_1(0; \mu) = 1/\Gamma(\mu)$, а $\operatorname{sign} E_1(-\infty, \mu) = \operatorname{sign} \Gamma(\mu - 1)$ в силу (15). Значит, у $E_1(x; \mu)$ есть хотя бы один отрицательный корень. По теореме 6 он является простым. Докажем его единственность.

Предположим противное: у $E_1(x; \mu)$ имеется хотя бы два отрицательных корня x_1 , x_2 . По теореме 6 оба они просты. Так как $E_\rho(z; \mu) \rightarrow E_1(z; \mu)$, $\rho \rightarrow 1 + 0$ равномерно в каждом круге, по теореме Гурвица при ρ , достаточно близких к 1, в достаточно малых окрестностях точек x_1 , x_2 содержится ровно по одному корню функции $E_\rho(z; \mu)$. Из парности комплексно сопряженных корней следует, что оба они вещественны, что противоречит теореме 1. Мы доказали единственность отрицательного корня. Утверждение 4) верно. Теорема 7 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
- [2] Mittag-Leffler G. M. Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$ // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 2. 1903. V. 137. P. 554–558.
- [3] Sedletsii A. M. Asymptotic formulas for zeros of functions of Mittag-Leffler type // Anal. Math. 1994. V. 20. P. 117–132.
- [4] Wiman A. Über die Nullstellen der Funktionen $E_\alpha(x)$ // Acta Math. 1905. V. 29. P. 217–234.
- [5] Polya G. Bemerkung über die Mittag-Lefflerschen Funktionen $E_\alpha(z)$ // Tôhoku Math. J. 1921. V. 19. P. 241–248.
- [6] Джрбашян М. М. Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Матем. 1984. Т. 19. С. 81–181.
- [7] Djrbashian M. M. Harmonic analysis and boundary value problems in the complex domain. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 1993.
- [8] Ostrovskii I. V., Peresolkova I. N. Nonasymptotic results on distribution of zeros of the function $E_\rho(z; \mu)$ // Anal. Math. 1997. V. 23. P. 283–296.
- [9] Popov A. Yu. On the Ostrovskii-Peresolkova conjecture about zeros of the Mittag-Leffler functions // Proc. Steklov Inst. Math. 2001. Suppl. 1. P. 167–182.
- [10] Попов А. Ю. О спектральных значениях одной краевой задачи и нулях функций Миттаг-Леффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. №5. С. 611–621.
- [11] Джрбашян М. М., Нерсисян А. Б. О построении некоторых специальных биортонормальных систем // Изв. АН АрмССР. Матем. 1959. Т. 12. С. 17–42.
- [12] Седлецкий А. М. О нулях функции типа Миттаг-Леффлера // Матем. заметки. 2000. Т. 68. №5. С. 710–724.
- [13] Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000.
- [14] Седлецкий А. М. Аппроксимативные свойства систем экспонент на прямой и полупрямой // Матем. сб. 1998. Т. 189. С. 125–140.
- [15] Тихонов И. З., Эйдельман Ю. С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. №5. С. 637–644.
- [16] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1. М.: Наука, 1967.
- [17] Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. 1. М.: Наука, 1978.