Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Г. Ильинский, Стационарные подалгебры общего положения для локально сильно эффективных действий, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 5, 689–707

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4408>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:05:14

Стационарные подалгебры общего положения для локально сильно эффективных действий

Д. Г. Ильинский

В данной статье проведена классификация всех локально сильно эффективных действий полупростой алгебраической группы на конечномерном комплексном векторном пространстве с нетривиальной подалгеброй общего положения.

Библиография: 7 названий.

1. Введение

Пусть G – редуктивная комплексная алгебраическая группа, V – конечномерное комплексное векторное пространство с линейным действием группы G . По [1; теорема 7.2] для этого действия существует стабилизатор общего положения H (сокращенно СОП). Будем его обозначать так: $G_*(V)$.

В теории инвариантов для линейного представления алгебраической группы G на конечномерном пространстве V существует несколько так называемых “хороших” свойств (подробности см. в [1]). Такими, прежде всего, являются следующие: свобода алгебры инвариантов, одинаковая размерность слоев морфизма факторизации, конечность числа орбит в каждом слое морфизма факторизации. Оказывается, что с этими свойствами коррелирует следующее: стабилизатор общего положения линейного действия $G : V$ нетривиален. В частности, для связных простых неприводимых линейных групп все вышеперечисленные свойства эквивалентны. В общем случае этот факт неверен. Тем не менее, для пояснения общей ситуации изучение представлений с нетривиальными стабилизаторами общего положения представляет несомненный интерес. Кроме этого, из нетривиальности СОП следует нетривиальность стабилизаторов типичных замкнутых орбит (и их совпадение с СОП в случае редуктивности последнего для полупростой G), а это дает редукцию для вычисления алгебры инвариантов по теореме Луны–Ричардсона (см. [2]).

Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G . Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ стабилизатора общего положения $H = G_*(V)$ является стационарной подалгеброй общего положения (сокращенно СПОП, обозначение: $\mathfrak{g}_*(V)$). Это означает, что существует открытое множество $U \subset V$ такое, что для любого вектора $v \in U$ стационарная подалгебра $\mathfrak{g}_v = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \xi v = 0\}$ сопряжена с $\mathfrak{h}$ относительно присоединенного действия группы G . Мы немного упростим задачу и будем изучать линейные действия $G : V$ с нетривиальной стационарной подалгеброй общего положения.

В 1967 г. в статье [3] были классифицированы все связные простые неприводимые линейные группы с нетривиальной стационарной подалгеброй общего положения. Более того, было найдено необходимое условие нетривиальности СПОП для общего случая в терминах индекса данного представления. Напомним, что *индексом* $l_{G,V}$ представления ρ простой алгебраической группы G в пространстве V называется отношение

$$\frac{\text{Tr } d\rho(X)^2}{\text{Tr}(\text{ad } X)^2}, \quad X \in \mathfrak{g},$$

которое не зависит от X . Здесь $d\rho$ – соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, ad – присоединенное представление $\mathfrak{g}$.

Сформулируем результат статьи [3] в следующем виде.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1 (Необходимое условие нетривиальности СОП) [3; теорема 1]. *Пусть G – полупростая алгебраическая группа, действующая в пространстве V . Если СПОП нетривиальна, то существует простой нормальный делитель H группы G такой, что выполнено следующее неравенство:*

$$l_{H,V} \leq 1.$$

В 1972 г. Элашвили описал все стационарные подалгебры общего положения в случаях, когда G простая, V любое (см. [4]) и когда G полупростая, V неприводимое (см. [5]).

Естественно поставить задачу описания СПОП в общем случае. Однако, рассматривая произвольные действия полупростых алгебраических групп, как несложно показать, можно строить сколь угодно сложные представления с нетривиальной СПОП.

А именно, рассмотрим представление группы

$$\text{SL}_{n_1} \times \cdots \times \text{SL}_{n_k} \times G : \mathbb{C}^{n_1} \otimes V_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^{n_k} \otimes V_k \oplus V,$$

где $G : V_i$ – произвольные представления, $G : V$ – представление с нетривиальной СПОП, $n_i \geq m_i = \dim V_i$ (подразумевается, что на представление $\mathbb{C}^{n_i} \otimes V_i$ нетривиально действуют только группы SL_{n_i} и G).

Применяя [5; теорема 4] и [4; лемма 2], мы получаем, что СОП данного представления нетривиален и изоморфен

$$\text{SL}_{n_1-m_1} \times R_{m_1(n_1-m_1)} \times \cdots \times \text{SL}_{n_k-m_k} \times R_{m_k(n_k-m_k)} \times G_*(V),$$

где R_N – унитарный радикал размерности N . Итерируя конструкцию, описанную выше, можно строить сколь угодно сложные представления с нетривиальной СПОП.

Поэтому в данной статье рассматриваются не все действия, а только действия специального вида, локально сильно эффективные в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Линейное действие $G : V$ полупростой группы G называется *локально сильно эффективным*, если каждый простой нормальный делитель алгебраической группы G нетривиально действует на каждом неприводимом подмодуле $W \subseteq V$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поясним происхождение данного термина. В теории представлений алгебраических групп *локально эффективно* называются действия с конечным ядром; “*сильно*” же означает “на любом подмодуле”. Для полупростых групп объединение этих условий дает в точности определение, написанное выше.

Основным результатом данной статьи является полное описание локально сильно эффективных действий полупростой алгебраической группы G в пространстве V с нетривиальной стационарной подалгеброй общего положения.

2. Обозначения, схема решения задачи и формулировка результатов

2.1. Обозначения. В этом тексте везде, если не сказано иное, принимаются следующие обозначения:

- G – полупростая комплексная алгебраическая группа, V – конечномерный комплексный G -модуль;
- $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G ;
- $G_*(V)$ – стабилизатор общего положения представления $G : V$, $\mathfrak{g}_*(V)$ – стационарная подалгебра общего положения представления $\mathfrak{g} : V$;
- $l_{H,V}$ – индекс пространства V относительно действия простой алгебраической группы H .

Обозначения для представлений простой алгебраической группы или алгебры Ли:

- π_i – i -й фундаментальный вес;
- $\mathbf{V}(\Lambda)$ – неприводимое представление со старшим весом Λ ;
- $\mathbf{V}(\Lambda^*)$ – сопряженное представление к $\mathbf{V}(\Lambda)$;
- 1 – одномерное тривиальное представление.

Нумерация фундаментальных весов соответствует нумерации в книге [6].

Для классических групп и алгебр Ли положим $G_*^{(k)} = G_*(kU)$, $\mathfrak{g}_*^{(k)} = \mathfrak{g}_*(kU)$, где U – тавтологическое представление G или $\mathfrak{g}$.

Через $\mathfrak{t}_n$ будем обозначать алгебру Ли n -мерного тора, через $\mathfrak{u}_n$ будем обозначать n -мерную коммутативную унитарную алгебру Ли, $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ – линейная оболочка векторов $v_1, \dots, v_n$.

2.2. Схема решения задачи и формулировка результатов. Пусть действие $G : V$ локально сильно эффективно, СПОП $\mathfrak{g}_*(V) \neq 0$. Случай, когда G проста или V неприводимо, описан в работах [4], [5]. Перед формулировкой основного результата напомним следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Представления $\rho_i : G_i \rightarrow \mathrm{GL}(V_i)$ ($i = 1, 2$) называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм векторных пространств $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ такой, что $\varphi \cdot \rho_1(G_1) \cdot \varphi^{-1} = \rho_2(G_2)$.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. *Предположим, что представление $G : V$ локально сильно эффективно, где G – полупростая, но не простая алгебраическая группа, V приводимо и СПОП $\mathfrak{g}_*(V)$ нетривиальна. Тогда с точностью до эквивалентности либо данное представление указано в таблице 1, либо оно имеет следующий вид:*

$$G = \mathrm{SL}(U) \times G_2, \quad V = U \otimes W,$$

где W – представление G_2 , $n = \dim U < \dim W < 2n$. В последнем случае можно указать представление $\tilde{G} : \tilde{V}$ с той же СПОП, где $\dim \tilde{G} < \dim G$, $\dim \tilde{V} < \dim V$ (см. теорема 4.3), что позволяет вычислять СПОП индукцией по размерности.

Доказательство первой части теоремы устроено следующим образом: мы разобьем все представления на различные “типы” и будем изучать их по отдельности. Опишем подробнее, как и почему мы будем разделять представления на типы.

Так как $\mathfrak{g}_*(V) \neq 0$, в силу утверждения 1.1 существует простая нормальная подгруппа $H \subset G$ такая, что $l_{H,V} \leq 1$. В статье [3] приведен список всех неприводимых простых групп с индексом строго меньше 1. Из этого списка видно, что самые маленькие индексы у тавтологических представлений SL_n , SO_n , Sp_n (индексы этих представлений равны $1/(2n)$, $1/(n-2)$ и $1/(n+2)$ соответственно). Остальные индексы не меньше $1/5$. Поэтому естественно рассмотреть два случая: когда существует простая подгруппа с индексом не больше 1, которая действует с большим индексом на какой-то неприводимой компоненте V , и когда такой подгруппы не существует. Точнее, введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем называть представление $G : V$ *классическим*, если для любой простой нормальной подгруппы $H \subset G$ выполнено:

- (1) $H = SL(U)$, $SO(U)$ или $Sp(U)$;
- (2) если $H \neq SL(U)$, то V при ограничении на H дает прямую сумму представлений, изоморфных U ;
- (3) если $H = SL(U)$, то V при ограничении на H дает прямую сумму представлений, изоморфных U или U^* .

Если представление $G : V$ не является классическим, будем называть его *особым*.

В разделе 3 мы докажем некоторые вспомогательные утверждения. Далее в разделе 4 разбирается случай, когда представление $G : V$ классическое и все простые нормальные подгруппы с индексом не больше 1 изоморфны SL_n . Классические представления $G : V$, у которых хотя бы одна простая нормальная подгруппа с индексом не больше 1 изоморфна SO_n или Sp_n , исследованы в разделе 5. Особым представлениям посвящен раздел 6. Наконец, в разделе 7 приведено доказательство теоремы 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В разделах 4, 5, 6 везде, если не сказано иного, подразумевается, что представление $G : V$ удовлетворяет предпосылкам теоремы 2.1.

3. Вспомогательные утверждения

Прежде чем разбирать случаи, докажем несколько утверждений, которые понадобятся нам в дальнейшем. Прежде всего напомним два утверждения из работы [4], с помощью которых можно находить стационарные подалгебры общего положения.

ЛЕММА 3.1 [4; лемма 1]. Пусть полупростая алгебра $\mathfrak{g}$ действует в пространстве V . Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ есть СПОП тогда и только тогда, когда существует вектор $v \in V$ такой, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_v$ и $V = \mathfrak{g}v + V^{\mathfrak{h}}$.

ЛЕММА 3.2 [4; лемма 2]. Пусть полупростая алгебра $\mathfrak{g}$ действует в пространстве V , $V = V_1 \oplus V_2$ – разложение пространства V в прямую сумму двух $\mathfrak{g}$ -модулей. Пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_*(V_1)$. Тогда, если существует $\mathfrak{h}_*(V_2)$, то $\mathfrak{g}_*(V) = \mathfrak{h}_*(V_2)$.

ТАБЛИЦА 1. Список представлений $G : V$, где G не проста, V приводимо и $\mathfrak{g}_*(V) \neq 0$

Группа G	Представление V	Условия	...
$\mathrm{SL}(U) \times G_2$	$U \otimes W$	$l \leq n$	...
$\mathrm{SL}(U) \times G_2$, $G_2 \neq \mathrm{SL}(W)$	$U \otimes W \oplus U^* \otimes W'$	$0 < l' \leq l < n$	...
$\mathrm{SL}(U) \times \mathrm{SL}(W)$	$U \otimes W \oplus U^* \otimes W^*$	$l \leq n$	...
$\mathrm{SL}(U) \times \mathrm{SL}(W)$	$U \otimes W \oplus U^* \otimes W$	$l \leq n$	...
$\mathrm{SL}(U) \times \mathrm{SL}(W)$	$U \otimes W \oplus U \otimes W$	$l = n$	...
$\mathrm{SO}(U) \times G_2$	$U \otimes W$	$l \leq n - 2$	...
$\mathrm{Sp}(U) \times G_2$	$U \otimes W$	$l \leq n - 1$	...
$\mathrm{Sp}(U) \times \mathrm{SL}_2$	$U \otimes W$	$l \leq n - 1$	...
$\mathrm{Sp}(U) \times \mathrm{SL}_2$	$U \otimes (\mathbf{V}(\pi_1) \oplus \mathbf{V}(\pi_1))$		...
$\mathrm{Spin}_8 \times \mathrm{SL}_2$	$\mathbf{V}(\pi_3) \otimes \mathbf{V}(\pi_1) \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}(\pi_1)$		...
$\mathrm{Spin}_{10} \times \mathrm{SL}_2$	$\mathbf{V}(\pi_4) \otimes \mathbf{V}(\pi_1) \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}(\pi_1)$		...

Группа G	...	$\mathfrak{g}_*(V)$	Вложение $\mathfrak{g}_*(V)$ в $\mathfrak{g}$
$\mathrm{SL}(U) \times G_2$	...	$\mathfrak{u}_{(n-l)l} \oplus (\mathfrak{sl}_{n-l} \oplus \mathfrak{g}_2)$	$\left(\left(\begin{array}{c c} \mathfrak{sl}_{n-l} & 0 \\ \hline \mathfrak{u}_{(n-l)l} & d\rho^*(\mathfrak{g}_2) \end{array} \right), \mathfrak{g}_2 \right)$
$\mathrm{SL}(U) \times G_2$, $G_2 \neq \mathrm{SL}(W)$	...	$\mathfrak{sl}_{n-l} \oplus \mathfrak{u}_{(l-l')(n-l)}$	$\left(\left(\begin{array}{c c} \mathfrak{sl}_{n-l} & 0 \\ \hline \mathfrak{u}_{(l-l')(n-l)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), 0 \right)$
$\mathrm{SL}(U) \times \mathrm{SL}(W)$	...	$\mathfrak{sl}_{n-l} \oplus \mathfrak{t}_{l-1}$	$\left(\left(\begin{array}{c c} \mathfrak{sl}_{n-l} & 0 \\ \hline 0 & \mathfrak{t}_{l-1} \end{array} \right), -\mathfrak{t}_{l-1} \right)$
$\mathrm{SL}(U) \times \mathrm{SL}(W)$	...	$\mathfrak{sl}_{n-l} \oplus \mathfrak{t}_{[l/2]}$	$\left(\left(\begin{array}{c c} \mathfrak{sl}_{n-l} & 0 \\ \hline 0 & \mathfrak{t}_{[l/2]} \end{array} \right), -\mathfrak{t}_{[l/2]} \right)$
$\mathrm{SL}(U) \times \mathrm{SL}(W)$	...	$\mathfrak{t}_{n-1}$	$(\mathfrak{t}_{n-1}, -\mathfrak{t}_{n-1})$
$\mathrm{SO}(U) \times G_2$	...	$\mathfrak{so}_{n-l}$	$(\mathfrak{so}_n)_*^{(l)} \subset \mathfrak{so}_n$
$\mathrm{Sp}(U) \times G_2$	...	$(\mathfrak{sp}_n)_*^{(l)}$	$(\mathfrak{sp}_n)_*^{(l)} \subset \mathfrak{sp}_n$
$\mathrm{Sp}(U) \times \mathrm{SL}_2$	...	$(\mathfrak{sp}_n)_*^{(l)}$	$(\mathfrak{sp}_n)_*^{(l)} \subset \mathfrak{sp}_n$
$\mathrm{Sp}(U) \times \mathrm{SL}_2$	...	$\mathfrak{sp}_{n-4} \oplus \mathfrak{t}_1$	$\left(\left(\begin{array}{c c} \mathfrak{sp}_{n-4} & 0 \\ \hline 0 & \mathfrak{t}_1 \end{array} \right), \mathfrak{t}_1 \right)$
$\mathrm{Spin}_8 \times \mathrm{SL}_2$	...	$\mathfrak{sl}_2$	$\mathfrak{g}_*(V) \subset \mathfrak{g}_1, 2\mathbf{V}(\pi_1) \oplus 4$
$\mathrm{Spin}_8 \times \mathrm{SL}_2$	...	$\mathfrak{sl}_2$	$\mathfrak{g}_*(V) \subset \mathfrak{g}_1, 2\mathbf{V}(\pi_1) \oplus 6$

В таблице использованы следующие обозначения: W, W' – представления G_2 , $\dim U = n$, $\dim W = l$, $\dim W' = l'$. В столбце “Вложение” указано из каких элементов $\mathfrak{g}$ состоит $\mathfrak{g}_*(V)$, значок каждой алгебры Ли обозначает произвольный элемент алгебры Ли, один и тот же повсюду, где встречается данный значок. Все торы $\mathfrak{t}_k$ в $\mathfrak{g}_*(V)$ состоят из диагональных матриц, тор $\mathfrak{t}_{[l/2]}$ вложен как максимальный тор алгебры $\mathfrak{so}_l$. В последних двух представлениях указано ограничение векторного представления $\mathfrak{g}_1$ на алгебру $\mathfrak{g}_*(V)$.

Перейдем к доказательству подготовительных утверждений.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть G – полупростая комплексная алгебраическая группа, V и W – два локально сильно эффективных G -модуля. Тогда, если СПОП $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_*(V \otimes W)$ нетривиальна, то $G = \mathrm{SL}_n$, $V = \mathbb{C}^n$, $W = V$ или V^* , а $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}_k$, где $k = [n/2]$ или $n - 1$, соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Частный случай:* G – простая группа, V, W – неприводимые модули. Рассмотрим старшую компоненту U представления $V \otimes W$. Тогда из нетривиальности $\mathfrak{h}$ следует, что $l_{G,U} \leq l_{G,V \otimes W} \leq 1$. Так как у U старший вес не является фундаментальным, то из [4; таблица 1] (список всех неприводимых представлений простой группы с индексом, меньшим 1) и списка присоединенных представлений (только для них индекс в точности равен 1) получаем, что возможны лишь три варианта:

- (1) $G = \mathrm{SL}_n$, $U = \mathbf{V}(\pi_1 + \pi_{n-1})$; в этом случае $V = \mathbf{V}(\pi_1)$, $W = V^*$, $V \otimes W = U \oplus 1$ и, таким образом, $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{t}_{n-1}$;
- (2) $G = \mathrm{SL}_n$, $U = \mathbf{V}(2\pi_1)$; в этом случае $V = W = \mathbf{V}(\pi_1)$, $V \otimes W = U \oplus \mathbf{V}(\pi_2)$ и из [4; таблица 2] получаем, что $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{t}_k$, где $k = [n/2]$;
- (3) $G = \mathrm{Sp}_{2l}$, $U = \mathbf{V}(2\pi_1)$; в этом случае $V = W = \mathbf{V}(\pi_1)$, $V \otimes W = U \oplus \mathbf{V}(\pi_2) \oplus 1$; индекс $l_{G,V \otimes W} = 1 + (l-1)/(l+1) + 0 > 1$ и, значит, алгебра $\mathfrak{g}_*(V \otimes W)$ тривиальна.

Несложно показать, что в первых двух случаях индекс $l_{G,V \otimes W} = 1$. Поэтому верно следующее утверждение: в случае, когда G проста, а V, W – нетривиальные неприводимые G -модули, из того, что $l_{G,V \otimes W} \leq 1$, следует, что $l_{G,V \otimes W} = 1$ и $\mathfrak{g}_*(V \otimes W) \neq 0$.

Общий случай. Пусть $V = V^{(1)} \oplus \dots \oplus V^{(l)}$, $W = W^{(1)} \oplus \dots \oplus W^{(l')}$ – разложение V, W на неприводимые слагаемые. Представим G в виде почти прямого произведения нормальных простых делителей: $G = G_1 \times \dots \times G_k$. Если алгебра $\mathfrak{h}$ нетривиальна, то существует нормальный простой делитель (без ограничения общности это G_1) с $l_{G_1,V \otimes W} \leq 1$.

В случае $k = 1$, l или $l' > 1$ из нетривиальности $V^{(i)}$ и $W^{(i)}$ следует, что

$$l_{G_1,V^{(1)} \otimes W^{(1)}} < l_{G_1,V \otimes W} \leq 1.$$

С другой стороны, предположим, что $k \geq 2$. Обозначим неприводимую компоненту $V^{(1)}$ (соответственно $W^{(1)}$) относительно G_1 через $V_1^{(1)}$ (соответственно $W_1^{(1)}$). Имеем

$$l_{G_1,V_1^{(1)} \otimes W_1^{(1)}} < l_{G_1,V^{(1)} \otimes W^{(1)}} \leq l_{G_1,V \otimes W} \leq 1.$$

Таким образом, мы получаем, что $l_{G_1,V_1^{(1)} \otimes W_1^{(1)}} < 1$, что невозможно в силу доказанного выше. Полученное противоречие доказывает тривиальность алгебры $\mathfrak{h}$ в этом случае. Теорема доказана.

Нам потребуются следующие следствия теоремы 3.3.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть G – полупростая комплексная алгебраическая группа, V и W – два локально сильно эффективных G -модуля. Тогда, если $\dim V \neq \dim W$, то $\mathfrak{g}_*(V \otimes W) = 0$.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть G – полупростая комплексная алгебраическая группа, действующая приводимо и локально сильно эффективно в пространстве V . Тогда $\mathfrak{g}_*(S^2(V)) = \mathfrak{g}_*(\wedge^2(V)) = 0$ за исключением случая $G = \mathrm{SL}_2$, $V = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$, когда $\mathfrak{g}_*(\wedge^2(V)) = \mathfrak{t}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что одна из алгебр $\mathfrak{g}_*(S^2(V))$, $\mathfrak{g}_*(\wedge^2(V))$ нетривиальна. Пусть $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ – разложение на неприводимые компоненты.

Тогда представление $V_1 \otimes V_2$ является подмодулем представлений $S^2(V)$ и $\wedge^2(V)$. Так как V_1 и V_2 – локально сильно эффективные G -модули, то по теореме 3.3 алгебра $\mathfrak{g}_*(V_1 \otimes V_2)$ нетривиальна, только если $G = \mathrm{SL}_n$, и в этом случае $l_{G, V_1 \otimes V_2} = 1$.

Если представления $S^2(V_1)$ и $\wedge^2(V_1)$ нетривиальны, то индексы $l_{G, S^2(V)}$ и $l_{G, \wedge^2(V)}$ больше 1 и соответствующая стационарная подалгебра тривиальна. Иначе, $G = \mathrm{SL}_2$, $V_1 = \dots = V_s = \mathbb{C}^2$,

$$\wedge^2(V_1 \oplus \dots \oplus V_s) = \sum_{1 \leq i < j \leq s} (V_i \otimes V_j) \oplus s \cdot 1.$$

Так как $l_{G, V_i \otimes V_j} = 1$, то такая пара ровно одна, а значит, $V = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$.

Вторым вспомогательным утверждением этого раздела является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть $G : V$ – линейное представление полупростой алгебраической группы G , $G = G_1 \times \dots \times G_k$ – разложение в почти прямое произведение простых делителей. Если для $1 \leq i \leq j$ индекс $l_{G_i, V} = 1$, а для $j+1 \leq i \leq k$ индекс $l_{G_i, V} > 1$, то СПОП $\mathfrak{g}_*(V)$ – m -мерный тор $\mathfrak{t}_m$, содержащийся в $\mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству [5; теорема 2], где рассматривается случай неприводимого V .

4. Специальная линейная группа

В этой части рассматривается следующая ситуация: $G : V$ – классическое представление, у нормальной подгруппы $G_1 = \mathrm{SL}_n = \mathrm{SL}(U)$ индекс не больше 1; все остальные простые нормальные подгруппы с индексом не больше 1 изоморфны SL_m .

Положим $G = G_1 \times G_2$ – почти прямое произведение. По определению классического представления все неприводимые подпредставления V при ограничении на G_1 дают прямую сумму U или U^* . Поэтому V представляется в виде $U \otimes W \oplus U^* \otimes W'$, где W, W' – представления G_2 . Обозначим $l = \dim W$, $l' = \dim W'$. Перенумерацией простых корней G_1 можно добиться того, чтобы выполнялось неравенство $l \geq l'$.

Так как $l_{G_1, U} = l_{G_1, U^*} = 1/(2n)$, то

$$1 \geq l_{G_1, V} \geq (\dim W + \dim W') l_{G_1, U} = \frac{l + l'}{2n}.$$

Поэтому $l + l' \leq 2n$. Рассмотрим сначала следующий частный случай.

ЛЕММА 4.1. Если $l = 2n$ и $\mathfrak{g}_*(V) \neq 0$, то $G_2 = \mathrm{SL}_n$ и $W = 2\mathbf{V}(\pi_1)$ или $\mathbf{V}(\pi_1) \oplus \mathbf{V}(\pi_1^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индекс G_1 в данном случае равен 1. Предположим, что существует простая нормальная подгруппа $H_2 = \mathrm{SL}_m = \mathrm{SL}(\widetilde{W}) \subset G_2$, индекс которой не больше 1.

Так как представление $G : V$ классическое, H_2 -модуль W разлагается в прямую сумму нескольких копий $\widetilde{W}$ и $\widetilde{W}^*$. По условию $\dim W = 2n$ и W приводим, а значит, $m \leq n$ и

$$l_{H_2, W} \geq \frac{2}{2m} = \frac{1}{m}, \quad 1 \geq l_{H_2, V} = n \cdot l_{H_2, W} \geq \frac{n}{m},$$

что равносильно $m \geq n$. Поэтому $m = n$, $G_2 = H_2 = \mathrm{SL}_n$, а $W = 2\mathbf{V}(\pi_1)$ или $\mathbf{V}(\pi_1) \oplus \mathbf{V}(\pi_1^*)$. СПОП в этом случае равна $\mathfrak{t}_{n-1}$ или $\mathfrak{t}_{[n/2]}$.

Остается случай, когда группы H_2 не существует, т.е. у всех простых нормальных подгрупп, кроме G_1 индекс строго больше 1. В силу теоремы 3.6 получаем, что $\mathfrak{g}_*(V) \subset \mathfrak{g}_1$. Следовательно, $\mathfrak{g}_*(V) = (\mathfrak{g}_1)_*(V) = (\mathfrak{g}_1)_*(2n \cdot U) = 0$ (см. [4; таблица 2]). Поэтому в этом случае стационарная подалгебра общего положения тривиальна.

Теперь рассмотрим случай, когда $l' = 0, n < l < 2n$. Тогда можно применить следующую лемму, являющейся переформулировкой [5; следствие 1].

ЛЕММА 4.2. Пусть H – СОП представления $\mathrm{SL}(U) \times G_2$ на $U \otimes W$, где G_2 – подгруппа в $\mathrm{SL}(W)$, $\dim W \geq \dim U$. Тогда СОП H' представления $\mathrm{SL}(U') \times G_2$ на $U' \otimes W^*$ ($\dim U' = \dim W - \dim U$) изоморфен H .

ТЕОРЕМА 4.3. В данных обозначениях, если $l' = 0, n < l < 2n$, то представление $G : V$ можно заменить на другое представление $\tilde{G} : \tilde{V}$ с той же СПОП, при этом $\dim \tilde{G} < \dim G, \dim \tilde{V} < \dim V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из леммы 4.2, можно заменить данное представление на представление $\tilde{G} = \mathrm{SL}(U') \times G_2$ на $\tilde{V} = U' \otimes W^*$. При этом $\dim U' < \dim U$, а значит, $\dim \tilde{G} < \dim G, \dim \tilde{V} < \dim V$.

В остальных случаях мы будем пользоваться переформулировкой другого утверждения из [5].

ЛЕММА 4.4 [5; теорема 4]. Пусть $\tilde{U}$ – n -мерное комплексное векторное пространство, полупростая группа G – почти прямое произведение групп $G_1 = \mathrm{SL}(\tilde{U})$ и G_2 , $\rho : G_2 \rightarrow \mathrm{SL}(\tilde{W})$ – линейное представление G_2 в m -мерном пространстве $\tilde{W}$, $m \leq n$. Зафиксируем базис $u_1, \dots, u_n$ пространства $\tilde{U}$. Тогда СОП H действия $G_1 \times G_2 : \tilde{U} \otimes \tilde{W}$ устроен следующим образом.

$$H = \left\{ \left(\left(\begin{array}{c|c} \frac{\rho^*(g)}{0} & * \\ \hline & h \end{array} \right), g \right) \mid g \in G_2, h \in \mathrm{SL}_{n-m} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 4.5. В данных обозначениях, если $l' \neq 0$ или $l \leq n$, алгебру $\mathfrak{g}_*(V)$ можно найти при помощи таблицы 2.

ТАБЛИЦА 2

G	Доп. условия	$\mathfrak{g}_*(V)$
$\mathrm{SL}(U) \times G_2$	$l \leq n, l' = 0$	$\mathfrak{u}_{(n-l)l} \oplus (\mathfrak{sl}_{n-l} \oplus \mathfrak{g}_2)$
$\mathrm{SL}(U) \times G_2, G_2 \neq \mathrm{SL}(W), l \leq n$	$0 < l' \leq l < n$	$\mathfrak{sl}_{n-l} \oplus \mathfrak{u}_{(l-l')(n-l)}$
$\mathrm{SL}(U) \times \mathrm{SL}(W)$	$W' = W^*, l \leq n$	$\mathfrak{sl}_{n-l} \oplus \mathfrak{t}_{l-1}$
$\mathrm{SL}(U) \times \mathrm{SL}(W)$	$W' = W, l \leq n$	$\mathfrak{sl}_{n-l} \oplus \mathfrak{t}_{[l/2]}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $l \leq n, l' = 0$, то, применяя лемму 4.4 для $\tilde{U} = U, \tilde{W} = W, m = l$, находим $\mathfrak{g}_*(V)$.

Осталось рассмотреть случай, когда $l' \neq 0$. Воспользуемся леммой 4.4 для $\tilde{U} = U^*, \tilde{W} = W', m = l'$. Обозначим через $\mathfrak{h}$ алгебру Ли H . Согласно лемме 3.2 $\mathfrak{g}_*(V) = \mathfrak{h}_*(U \otimes W)$. Рассмотрим базис $v_1, \dots, v_n$ пространства U , двойственный к базису

$u_1, \dots, u_n$ (см. условие леммы 4.4). Вложение $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{sl}(U)$ устроено следующим образом: в базисе $v_1, \dots, v_n$ элементы $\mathfrak{h}$ – матрицы следующего вида:

$$\left(\begin{array}{c|c} d\rho(\mathfrak{g}_2) & 0 \\ \hline * & \mathfrak{sl}_{n-l'} \end{array} \right).$$

Представим алгебру Ли $\mathfrak{h}$ в виде $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{r}$, где $\mathfrak{r}$ – радикал $\mathfrak{h}$ (на рисунке это $*$), $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{sl}_{n-l'}$, $\mathfrak{h}_2 = d\rho(\mathfrak{g}_2)$. Подпространство $\langle v_1, \dots, v_{l'} \rangle$ естественно отождествить с W' , через U' обозначим подпространство $\langle v_{l'+1}, \dots, v_n \rangle$. Положим $V' = U \otimes W$.

ЛЕММА 4.6. *Имеем*

$$\mathfrak{h}_*(V') = (\mathfrak{sl}_{n-l'})_*^{(l-l')} \oplus (\mathfrak{g}_2)_*(W' \otimes W).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим действие $\mathfrak{g}_2 : W' \otimes W$. Пусть S – множество векторов $v \in W' \otimes W$ таких, что $v = v_1 \otimes w_1 + \dots + v_{l'} \otimes w_{l'}$ с линейно независимыми векторами $w_1, \dots, w_{l'}$. Так как S открыто в $W' \otimes W$, найдется вектор $v_0 \in S$ со стационарной подалгеброй $(\mathfrak{g}_2)_{v_0} = (\mathfrak{g}_2)_*(W' \otimes W)$. Будем считать, что $v_0 = v_1 \otimes w_1 + \dots + v_{l'} \otimes w_{l'}$.

Дополним векторы $w_1, \dots, w_{l'}$ до базиса $w_1, \dots, w_l$ в W . Возьмем вектор $v = v_0 + v_{l'+1} \otimes w_{l'+1} + \dots + v_k \otimes w_k$, где $k = \min(n, l)$ и докажем, что $\mathfrak{h}_v = \mathfrak{h}_*(V')$. Для этого по лемме 3.1 достаточно показать, что $\mathfrak{h}v + (V')^{\mathfrak{h}_v} = V'$.

Сначала найдем $\mathfrak{h}_v$. Пусть $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_r \in \mathfrak{h}_v$, где $\xi_1 \in \mathfrak{h}_1$, $\xi_2 \in \mathfrak{h}_2$, $\xi_r \in \mathfrak{r}$. Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \xi v = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_r)(v_0 + v_{l'+1} \otimes w_{l'+1} + \dots + v_k \otimes w_k) \\ &= \xi_1 v_0 + \xi_2 v_0 + \xi_r v_0 + \xi(v_{l'+1} \otimes w_{l'+1} + \dots + v_k \otimes w_k) \\ &= \xi_2 v_0 + \xi_r v_0 + \xi_1 v_{l'+1} \otimes w_{l'+1} + \dots + \xi_1 v_k \otimes w_k + v_{l'+1} \otimes \xi_2 w_{l'+1} + \dots + v_k \otimes \xi_2 w_k, \end{aligned}$$

так как $\xi_1 v_0 = 0$,

$$(\xi_2 + \xi_r)(v_{l'+1} \otimes w_{l'+1} + \dots + v_k \otimes w_k) = v_{l'+1} \otimes \xi_2 w_{l'+1} + \dots + v_k \otimes \xi_2 w_k.$$

Заметим, что $\xi_2 v_0$ лежит в подпространстве $W' \otimes W$, в то время как все остальные слагаемые лежат в дополнительном подпространстве. Следовательно, $\xi_2 v_0 = 0$, что равносильно $\xi_2 \in (\mathfrak{g}_2)_*(W' \otimes W)$. Слагаемые $v_{l'+1} \otimes \xi_2 w_{l'+1} + \dots + v_k \otimes \xi_2 w_k$ возникают только в случае $l \neq l'$. Но при $l \neq l'$ из следствия 3.4 получаем, что $\xi_2 = 0$, и значит, $v_{l'+1} \otimes \xi_2 w_{l'+1} + \dots + v_k \otimes \xi_2 w_k = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_1 v_{l'+1} \otimes w_{l'+1} + \dots + \xi_1 v_k \otimes w_k + \xi_r v_0 \\ &= \xi_r v_1 \otimes w_1 + \dots + \xi_r v_{l'} \otimes w_{l'} + \xi_1 v_{l'+1} \otimes w_{l'+1} + \dots + \xi_1 v_k \otimes w_k \end{aligned}$$

(так как $w_1, \dots, w_k$ линейно независимые векторы)

$$\begin{aligned} \iff & \begin{cases} \xi_r v_i = 0 & \text{для всех } i = 1, \dots, l', \\ \xi_1 v_j = 0 & \text{для всех } j = l' + 1, \dots, k, \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \xi_r = 0, \\ \xi_1 \in (\mathfrak{sl}_{n-l'})_*^{(k-l')}. \end{cases} \end{aligned}$$

В итоге $\mathfrak{h}_v = (\mathfrak{sl}_{n-l'})_*^{(k-l')} \oplus (\mathfrak{g}_2)_*(W' \otimes W)$.

По определению $k = \min(n, l)$. Рассмотрим сначала случай $l \geq n = k$. Тогда либо $\mathfrak{h}_v = 0$ (и тогда $\mathfrak{h}_v = \mathfrak{h}_*$), либо $l = l' = n$, откуда $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{h}_v = (\mathfrak{g}_2)_*(W' \otimes W)$, а значит, $\mathfrak{h}_v = \mathfrak{h}_*$.

Остается случай, когда $k = l < n$. Найдем $\mathfrak{h}v + (V')^{\mathfrak{h}_v}$. В первую очередь покажем, что $\mathfrak{h}v \supseteq U' \otimes W$. Возьмем произвольный вектор $v' = \mu_{l'+1}v_{l'+1} + \dots + \mu_lv_l \in U'$. Определим η_i , $i = 1, \dots, l$ по следующему правилу:

$$\eta_i = \begin{cases} \sum_{j=l'+1}^l \mu_j E_{ji}, & \text{если } i \leq l', \\ \sum_{j=l'+1}^l \mu_j E_{ji} - \mu_i E_{nn}, & \text{если } i > l', \end{cases}$$

где $E_{ij} \in \mathfrak{gl}(U)$ – матричная единица.

Непосредственными вычислениями несложно показать, что $\eta_i \in \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{r}$, и что $\eta_i v_j = \delta_{ij} v'$. Имеем

$$(\lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_l \eta_l)v = v' \otimes (\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_l w_l),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ – произвольные коэффициенты. Так как $w_1, \dots, w_l$ – базис W , из v указанными операторами можно получить любой вектор вида $v' \otimes w$, $w \in W$. Значит, $\mathfrak{h}v \supseteq U' \otimes W$.

Очевидно, что $(V')^{\mathfrak{h}_v} \supseteq (W' \otimes W)^{(\mathfrak{g}_2)_*(W' \otimes W)}$. С другой стороны, $\mathfrak{h}v \supseteq \mathfrak{h}_2 v$, но $\xi v = \xi v_0 + \xi(v - v_0)$ для всех $\xi \in \mathfrak{h}_2$. Так как $\xi(v - v_0) \in U' \otimes W$, а по доказанному выше $\mathfrak{h}v \supseteq U' \otimes W$, получаем, что $\mathfrak{h}v \supseteq \mathfrak{h}_2 v_0 = \mathfrak{g}_2 v_0$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}v + (V')^{\mathfrak{h}_v} &\supseteq (U' \otimes W) \oplus \mathfrak{g}_2 v_0 \oplus (W' \otimes W)^{(\mathfrak{g}_2)_*(W' \otimes W)} \\ &= (U' \otimes W) \oplus (W' \otimes W) = U \otimes W = V'. \end{aligned}$$

Таким образом, используя лемму 4.6 и теорему 3.3, можно явно указать СПОП. Результаты сведены в таблице 2.

5. Ортогональная и симплектическая группы

Здесь рассматривается следующая ситуация: представление $G = G_1 \times G_2 : V$ классическое, $G_1 = \mathrm{SO}_n = \mathrm{SO}(U)$ или $G_1 = \mathrm{Sp}_n = \mathrm{Sp}(U)$, $l_{G_1, V} \leq 1$.

В силу определения классического представления V имеет вид $U \otimes W$, где W – представление G_2 ; положим $\dim W = l$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $G_1 = \mathrm{SO}_n = \mathrm{SO}(U)$ или $G_1 = \mathrm{Sp}_n = \mathrm{Sp}(U)$. Тогда для представления $G_1 \times G_2 : U \otimes W$, где $n = \dim U \geq l = \dim W$, имеет место точная последовательность групп $1 \rightarrow H_1 \rightarrow G_*(V) \rightarrow H_2 \rightarrow 1$, где $H_1 = (G_1)_*^{(l)}$, $H_2 = (G_2)_*(S^2 W)$ или $(G_2)_*(\wedge^2 W)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеется естественный изоморфизм $V \cong \mathrm{Hom}(W^*, U)$. Типичная точка V – инъективный оператор $\phi : W^* \hookrightarrow U$, на образе которого (косо) скалярное умножение имеет максимальный возможный ранг. Имеем

$$(g_1, g_2) \in G_\phi \iff g_1 \phi g_2^{-1} = \phi \iff g_1 \text{ сохраняет } U' = \mathrm{Im} \phi \text{ и } g_2 = (\bar{\phi})^{-1} \bar{g}_1 \bar{\phi},$$

где $\bar{\phi} : W^* \rightarrow U'$ совпадает с ϕ , а $\bar{g}_1 = g_1|_{U'}$. Это равносильно тому, что g_2 лежит в пересечении G_2 с группой изометрий (косо)скалярного умножения на W^* , перенесенного с U' посредством $\bar{\phi}$, а $\bar{g}_1$ отождествляется с g_2 , $g_2 \in H_2$. Учитывая, что

ядро гомоморфизма $g_1 \mapsto \bar{g}_1$ есть H_1 , получаем вышеуказанную точную последовательность.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $G_1 = \mathrm{SO}(U)$ или l четно, то эта точная последовательность расщепляется: H_2 продолжается с U' на U , действуя тривиально на $(U')^\perp$.

ТЕОРЕМА 5.2. В обозначениях, данных выше, стационарная подалгебра $\mathfrak{g}_*(U \otimes W) = (\mathfrak{g}_1)_*^{(l)}$, кроме случая, когда $G_1 = \mathrm{Sp}_n$, $G_2 = \mathrm{SL}_2$, $W = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$ и $\mathfrak{g}_*(U \otimes W) = \mathfrak{sp}_{n-4} \oplus \mathfrak{t}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем доказательство на два случая. К первому случаю отнесем все варианты, кроме следующего: $G_1 = \mathrm{Sp}(U)$, $G_2 = \mathrm{SL}_2$.

Предположим сначала, что $l \leq n$. Применяя теоремы 5.1 и 3.5, получаем, что $\mathfrak{g}_*(U \otimes W) = \mathfrak{h}_1 = (\mathfrak{g}_1)_*^{(l)}$.

Теперь предположим, что $l > n$. Так как $1 \geq l_{G_1, V} = \dim W \cdot l_{G_1, U} = l \cdot l_{G_1, U}$, то $G_1 = \mathrm{Sp}(U)$ и $l \leq n + 2$. Нам надо доказать, что $\mathfrak{g}_*(V) = 0$ в этом случае.

Предположим противное. Если для подмодуля $\widetilde{W} \subset W$ размерности l' выполнено равенство $\mathfrak{g}_*(U \otimes \widetilde{W}) = (\mathfrak{g}_1)_*^{(l')}$, то

$$\mathfrak{g}_*(U \otimes W) \subset \mathfrak{g}_*(U \otimes \widetilde{W}) \subset \mathfrak{g}_1 \quad \text{и} \quad \mathfrak{g}_*(U \otimes W) = (\mathfrak{g}_1)_*^{(l)} = 0.$$

Поэтому, если алгебра $\mathfrak{g}_*(V)$ нетривиальна, то по теореме 5.1 $(\mathfrak{g}_2)_*(\wedge^2 \widetilde{W}) \neq 0$ для любого подмодуля $\widetilde{W} \subset W$ такого, что $\dim \widetilde{W} \leq n$. В силу нашего предположения и теоремы 3.5 каждый такой подмодуль $\widetilde{W}$ должен быть неприводим, а значит, $W = W_1 \oplus W_2$, где W_i , $i = 1, 2$, – неприводимы и $(\mathfrak{g}_2)_*(\wedge^2 W_i) \neq 0$.

Из [5; таблица 3] видно что, если $G_2 \neq \mathrm{SL}_2, \mathrm{SL}_4$, то представления W_i для фиксированной G_2 имеют одинаковую размерность, а значит, $\dim W_1 = \dim W_2 < n$, $\dim W = 2 \dim W_1 = n + 2$. Случай $G_2 = \mathrm{SL}_2$ рассмотрен отдельно, а для $G_2 = \mathrm{SL}_4$ достаточно рассмотреть только следующую ситуацию: $G_1 = \mathrm{Sp}_8$, $G_2 = \mathrm{SL}_4$, а $W = \mathbf{V}(\pi_1) \oplus \mathbf{V}(\pi_2)$. Заметим, что и в этом случае $\dim W_1, \dim W_2 < n$, $\dim W = n + 2$.

Пусть $H \subset G$ – простая нормальная подгруппа, отличная от G_1 . Без ограничения общности, $l_{H, W_1} \leq l_{H, W_2}$. Имеем

$$l_{H, U \otimes W} = \dim U \cdot l_{H, W} \geq 2 \dim U \cdot l_{H, W_1} = 2nl_{H, W_1} > 1,$$

так как $\dim W_1 < n$, а значит, $l_{H, W_1} > 1/(2n)$. Поэтому из всех простых нормальных подгрупп только G_1 имеет индекс не больше 1, причем в данном случае он строго равен 1. Применяя теорему 3.6 получаем, что $\mathfrak{g}_*(V) = (\mathfrak{g}_1)_*(V) = 0$.

Теперь разберем ситуацию, когда $G_1 = \mathrm{Sp}(U)$, $G_2 = \mathrm{SL}_2$. Если $(\mathfrak{g}_2)_*(\wedge^2 W) \neq 0$, то $W = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$. Имеем $(\mathfrak{g}_2)_*(\wedge^2 W) = \mathfrak{t}_1$; в силу теоремы 5.1 и того, что $\dim W$ четно, мы получаем, что $\mathfrak{g}_*(U \otimes W) = \mathfrak{sp}_{n-4} \oplus \mathfrak{t}_1$.

Предположим теперь, что $(\mathfrak{g}_2)_*(\wedge^2 W) = 0$. Если $l \leq n$ или существует подмодуль $\widetilde{W} \subset W$ размерности не больше n такой, что $(\mathfrak{g}_2)_*(\wedge^2 \widetilde{W}) = 0$, то утверждение теоремы верно. Иначе любой собственный подмодуль W изоморфен $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$, $S^2 \mathbb{C}^2$. Тогда $n = 4$, $W = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$, $W = S^2 \mathbb{C}^2 \oplus S^2 \mathbb{C}^2$ или $W = \mathbb{C}^2 \oplus S^2 \mathbb{C}^2$. В первых двух случаях индекс G_1 равен 1, а индекс G_2 больше 1, и по теореме 3.6 $\mathfrak{g}_*(V) = (\mathfrak{g}_1)_*(V) = 0$. В последнем случае $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_*(\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^2) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$, а ограничение представления $\mathfrak{g} : \mathbb{C}^4 \otimes S^2 \mathbb{C}^2$ на $\mathfrak{h}$ даст представление

$$\mathbb{C}^2 \otimes S^2 \mathbb{C}^2 \oplus 1 \otimes (\mathbb{C}^2 \otimes S^2 \mathbb{C}^2) = \mathbb{C}^2 \otimes S^2 \mathbb{C}^2 \oplus 1 \otimes (\mathbb{C}^2 \oplus S^3 \mathbb{C}^2)$$

(мы воспользовались формулой Клебша–Гордона для разложения представления $\mathfrak{sl}_2 : \mathbb{C}^2 \otimes S^2 \mathbb{C}^2$). Поэтому СПОП $\mathfrak{h}$ на втором слагаемом даст первую $\mathfrak{sl}_2$, а значит, $\mathfrak{g}_*(V) = (\mathfrak{sl}_2)_*(3\mathbb{C}^2) = 0$.

6. Особые представления

Здесь рассматривается случай, когда представление $G : V$ особое. Мы сначала выделим список представлений, у которых, возможно, СПОП нетривиальна.

По определению особого представления, существует простая нормальная подгруппа G_1 с $l_{G_1, V} \leq 1$, для которой не выполнено одно из условий для классического представления. Зафиксируем нумерацию фундаментальных весов G_1 .

Введем следующее обозначение: $G = G_1 \times G_2$ – почти прямое произведение. Представление V разлагается в прямую сумму неприводимых подпредставлений: $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$. Каждая неприводимая компонента V_i пространства V представляется в виде тензорного произведения неприводимых представлений групп G_1, G_2 : $V_i = U_i \otimes W_i$, $i = 1, \dots, s$, где U_i (соответственно W_i) – неприводимый G_1 -модуль (соответственно G_2 -модуль).

Согласно определению особого представления либо $G_1 = \text{Spin}_8$, либо существует представление U_i , которое неизоморфно ни $\mathbf{V}(\pi_1)$, ни $\mathbf{V}(\pi_1^*)$. Во втором случае будем считать, что $i = 1$. Для $G_1 = \text{Spin}_8$ в качестве U_1 выберем любое представление, отличное от $\mathbf{V}(\pi_1)$. Пусть l – индекс представления $G_1 : U_1$, $l_{\min}$ – минимально возможный индекс G_1 (он равен индексу представления $\mathbf{V}(\pi_1)$ в случае, если $G_1 \neq \text{Spin}_5, \text{Spin}_6$).

Так как индекс l_{G_1, V_1} меньше 1, то достаточно проверить все группы из [4; таблица 1]. Прежде чем перебирать все возможные G_1 , найдем ограничение на G_2 . А именно, выполнено следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. В данных обозначениях $G_2 = \text{SL}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $G_2 \neq \text{SL}_2$. В этом случае минимальная размерность неприводимого локально эффективного G_2 -модуля не меньше 3. Имеем

$$1 \geq l_{G_1, V} \geq \dim W_1 \cdot l_{G_1, U_1} + \dim W_2 \cdot l_{G_1, U_2} \geq 3l + 3l_{\min} = 3(l + l_{\min}).$$

В частности, $l < 1/3$. В таблице 3 приведен список всех неприводимых представлений простых алгебраических групп с индексом $l < 1/3$, за исключением представлений $\mathbf{V}(\pi_1)$ и $\mathbf{V}(\pi_1^*)$ классических групп.

ТАБЛИЦА 3

G_1	U_1	l	$l_{\min}$	$l + l_{\min}$
SL_4	$\mathbf{V}(\pi_2)$	$1/4$	$1/8$	$3/8 > 1/3$
SL_5	$\mathbf{V}(\pi_2)$	$3/10$	$1/10$	$2/5 > 1/3$
Spin_7	$\mathbf{V}(\pi_3)$	$1/5$	$1/5$	$2/5 > 1/3$
Spin_9	$\mathbf{V}(\pi_4)$	$2/7$	$1/7$	$3/7 > 1/3$
Spin_8	$\mathbf{V}(\pi_3)$ или $\mathbf{V}(\pi_4)$	$1/6$	$1/6$	$1/3$
Spin_{10}	$\mathbf{V}(\pi_4)$	$1/4$	$1/8$	$3/8 > 1/3$
G_2, E_6	$\mathbf{V}(\pi_1)$	$1/4$	$1/4$	$1/2 > 1/3$

Из таблицы 3 видно, что единственный возможный случай – $G_1 = \text{Spin}_8$. Но в этом случае $3(l + l_{\min}) = 1$, откуда $\dim W_1 = \dim W_2 = 3$, а значит, $G_2 = \text{SL}_3$. У данного представления индекс G_2 равен $8 \cdot 2 \cdot (1/6) > 1$, у G_1 в точности равен 1. Применяя теорему 3.6, получаем, что

$$\mathfrak{g}_*(V) \subset (\mathfrak{so}_8)_*(V) = (\mathfrak{so}_8)_*(3\mathbf{V}(\pi_1) + 3\mathbf{V}(\pi_3)) = 0.$$

Будем пользоваться также следующей леммой.

ЛЕММА 6.2. *В данных выше обозначениях следующее условие необходимо для нетривиальности СОП: $2(l + l_{\min}) \leq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$2(l + l_{\min}) \leq \dim W_1 \cdot l_{G_1, U_1} + \dim W_2 \cdot l_{G_1, U_2} = l_{G_1, V_1} + l_{G_1, V_2} \leq 1.$$

Так как во всех случаях группа $G_2 = \text{SL}_2$, представления $G_2 : W_i$ однозначно задаются размерностями пространств $\dim W_i$.

Ниже приводится перебор всех групп G_1 с $l_{G_1, V_1} < 1$. Список получившихся представлений $G : V$ с точностью до внешнего автоморфизма приведен в таблице 4. При этом принимаются следующие обозначения: Λ – старший вес представления $G_1 : U_1$, $m = \dim W_1$. Кроме того, для представлений SL_2 будем обозначать пространство $\mathbf{V}(k\pi_1)$ через $\mathbf{V}_k$.

- (1) Случай $G_1 = \text{SL}_n$, $\Lambda = 2\pi_1$: $l = (n+2)/(2n)$ – не удовлетворяет условию $2l < 1$.
- (2) Случай $G_1 = \text{SL}_6$, $\Lambda = \pi_3$: $l = 1/2$ – не удовлетворяет условию $2l < 1$.
- (3) Случай $G_1 = \text{SL}_7$, $\Lambda = \pi_3$: $l = 5/7$ – не удовлетворяет условию $2l < 1$.
- (4) Случай $G_1 = \text{SL}_8$, $\Lambda = \pi_3$: $l = 15/16$ – не удовлетворяет условию $2l < 1$.
- (5) Случай $G_1 = \text{SL}_n$, $\Lambda = \pi_2$: $l = (n-2)/(2n)$.

Так как при $n = 2$ веса π_2 нет, а при $n = 3$ $\mathbf{V}(\pi_2) = \mathbf{V}(\pi_1^*)$ не подходит под определение U_1 , можно считать, что $n \geq 4$.

Предположим, что представление $G_1 : U_2$ не изоморфно ни $\mathbf{V}(\pi_1)$, ни $\mathbf{V}(\pi_1^*)$. Тогда $U_2 = \mathbf{V}(\pi_2)$ (все остальные случаи рассмотрены выше). В этом случае

$$2 \frac{2n-4}{2n} = \frac{2n-4}{n} \leq l_{G_1, V} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2n-4 \leq n \quad \Longleftrightarrow \quad n \leq 4.$$

Значит, $G_1 = \text{SL}_4$, $l_{G_1, V} \geq 2(1/4 + 1/4) = 1$, а значит, $s = 2$, $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$. Но тогда представление $G : V$ является классическим, так как представление $\mathbf{V}(\pi_2)$ группы SL_4 изоморфно представлению $\mathbf{V}(\pi_1)$ группы Spin_6 .

Пусть $\dim W_1 = 2$, все представления $G_1 : U_i$, $i = 2, \dots, s$, изоморфны $\mathbf{V}(\pi_1)$ или $\mathbf{V}(\pi_1^*)$. Это означает, что

$$\frac{2n-4}{2n} + \frac{\sum_{i=2}^s \dim W_i}{2n} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=2}^s \dim W_i \leq 4.$$

Таким образом, возможны следующие варианты:

$$\begin{aligned} s = 2, \quad \dim W_2 = 2, \quad s = 3, \quad \dim W_2 = 2, \quad \dim W_3 = 2, \\ s = 2, \quad \dim W_2 = 3, \quad s = 2, \quad \dim W_2 = 4. \end{aligned}$$

Несложно заметить, что осталось рассмотреть случай $\dim W_1 = 3$, $\dim W_2 = 2$, $U_2 = \mathbf{V}(\pi_1)$ или $\mathbf{V}(\pi_1^*)$. Действительно, если $\dim W_1 \geq 3$, $\dim W_2 \geq 3$, то по соображениям, аналогичным доказательству утверждения 6.1, такое невозможно при $G_1 = \mathrm{SL}_n$; случай $\dim W_1 \geq 4$ аналогичен уже рассмотренному с $U_2 = \mathbf{V}(\pi_2)$ (и в этом случае мы получаем, что $V = V_1$ — неприводимо). Имеем

$$3 \frac{n-2}{2n} + 2 \frac{1}{2n} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 3n - 6 + 2 \leq 2n \quad \Longleftrightarrow \quad n \leq 4 \rightarrow n = 4.$$

Таким образом, это возможно только в случае $G_1 = \mathrm{SL}_4$, $s = 2$.

(6) Случай $G_1 = \mathrm{Spin}_7$, $\Lambda = \pi_3$, $l = 1/5$. В этом случае $l_{\min} = l = 1/5$. Чтобы индекс $l_{G_1, V}$ был не больше 1 необходимо, чтобы $\sum_{i=1}^s \dim W_i \leq 5$. Поэтому $s = 2$ и либо $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$, либо $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 3$, либо $\dim W_1 = 3$, $\dim W_2 = 2$.

(7) Случай $G_1 = \mathrm{Spin}_8$. В этом случае $U_i = \mathbf{V}(\pi_1)$, $\mathbf{V}(\pi_3)$ или $\mathbf{V}(\pi_4)$. Из того, что $l_{G_1, U_i} = 1/6$ следует, что $\sum_{i=1}^s \dim W_i \leq 6$. Так как $\dim W_i \geq 2$, $s \geq 2$, то возможны следующие варианты (с точностью до перенумерации W_i):

$$\begin{aligned} \dim W_1 = 4, \quad \dim W_2 = 2, \quad \dim W_1 = \dim W_2 = 3, \quad \dim W_1 = 3, \quad \dim W_2 = 2, \\ \dim W_1 = \dim W_2 = \dim W_3 = 2, \quad \dim W_1 = \dim W_2 = 2. \end{aligned}$$

Что же касается представлений Spin_8 , то мы можем выбрать нумерацию простых корней так, как нам удобно. Поэтому список представлений исчерпывается представленным в таблице 4.

(8) Случай $G = \mathrm{Spin}_9$, $\Lambda = \pi_4$, $l = 2/7$. Если хотя бы одно из представлений $G_1 : U_i$ при $i \geq 2$ не тавтологическое, то общий индекс $l_{G_1, V} \geq 2(2/7 + 2/7) > 1$. Поэтому все представления $G_1 : U_i$ при $i \geq 2$ тавтологические.

Так как $l_{\min} = 1/7$, условия на общий индекс выражаются следующим неравенством: $2 \dim W_1 + \sum_{i=2}^s \dim W_i \leq 7$. Это возможно только в случае $\dim W_1 = 2$; следовательно $s = 2$, $\dim W_2 = 2$ или 3.

(9) Случай $G_1 = \mathrm{Spin}_{10}$, $\Lambda = \pi_4$, $l = 1/4$.

Ситуация, когда хотя бы одно из представлений $G_1 : U_i$ при $i \geq 2$ не тавтологическое, возможна только в случае $s = 2$, $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$ (это случай с наименьшими возможными размерностями $\dim W_i$, а индекс в этом случае равен 1). В противном случае, так как $l_{\min} = 1/8$, то ограничение на размерности пространств W_i следующее:

$$2 \dim W_1 + \sum_{i=2}^s \dim W_i \leq 8.$$

В этом случае возможны следующие варианты:

$$\begin{aligned} s = 2, \quad \dim W_1 = 3, \quad \dim W_2 = 2, \quad s = 2, \quad \dim W_1 = \dim W_2 = 2, \\ s = 2, \quad \dim W_1 = 2, \quad \dim W_2 = 3, \quad s = 2, \quad \dim W_1 = 2, \quad \dim W_2 = 4, \\ s = 3, \quad \dim W_1 = \dim W_2 = \dim W_3 = 2. \end{aligned}$$

(10) Случай $G_1 = \mathrm{Spin}_{11}$, $\Lambda = \pi_5$, $l = 4/9$. Так как $l_{\min} = 1/9$, то $2(l + l_{\min}) > 1$; следовательно, этот случай отпадает.

(11) Случай $G_1 = \text{Spin}_{12}$, $\Lambda = \pi_5$, $l = 2/5$. Так как $2(l + l) = 8/5 > 1$, то нетавтологических представлений $G_1 : U_i$ при $i \geq 2$ нет. В оставшемся случае имеем следующее неравенство:

$$\frac{2}{5} \dim W_1 + \frac{1}{10} \sum_{i=2}^s \dim W_i \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 4 \dim W_1 + \sum_{i=2}^s \dim W_i \leq 10.$$

Отсюда, $s = 2$, $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 2$.

(12) Случай $G_1 = \text{Spin}_{13}$, $\Lambda = \pi_6$, $l = 8/11$.

(13) Случай $G_1 = \text{Spin}_{14}$, $\Lambda = \pi_7$, $l = 2/3$.

В случаях (12) и (13) $l > 1/2$.

(14) Случай $G_1 = \text{Sp}_n$, $\Lambda = \pi_2$, $l = (n - 2)/(n + 2)$. Так как $l_{\min} = 1/(n + 2)$, в силу леммы 6.2 имеем $2(l + l_{\min}) = (2n - 2)/(n + 2) \leq 1$, что равносильно $n \leq 4$. В случае $n = 4$ $l = 1/3$, $l_{\min} = 1/6$. Поэтому единственно возможный случай – $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$. Так как $\text{Sp}_4 \cong \text{Spin}_5$, запишем получившееся представление как представление группы $\text{Spin}_5 \times \text{SL}_2$.

(15) Случай $G_1 = \text{Sp}_6$, $\Lambda = \pi_3$, $l = 5/8$. В этом случае $l > 1/2$.

(16) Случай $G_1 = G_2$, $\Lambda = \pi_1$, $l = 1/4$.

(17) Случай $G_1 = E_6$, $\Lambda = \pi_1$, $l = 1/4$.

Так как в обоих случаях $l = l_{\min}$, $2(l + l) = 1$, единственный возможный вариант – $s = 2$, $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$.

(18) Случай $G_1 = F_4$, $\Lambda = \pi_1$, $l = 1/3$.

(19) Случай $G_1 = E_7$, $\Lambda = \pi_1$, $l = 1/3$.

В случаях (18) и (19) $l = l_{\min}$, $2(l + l) > 1$.

При нахождении $\mathfrak{g}_*(V)$ мы сводим представления к уже изученным, используя лемму 3.2 и результаты работы [5], в некоторых случаях указывая вектор $v \in V$ такой, что $\mathfrak{g}_v = 0$ (из этого следует, что $\mathfrak{g}_*(V) = 0$). В статье будут рассмотрены только случаи, когда алгебра $\mathfrak{g}_*(V_1)$ не редуцируема или алгебра $\mathfrak{g}_*(V)$ нетривиальна.

6.1. Алгебра $\mathfrak{g}_*(V_1)$ не редуцируема. Единственный случай, который надо рассмотреть здесь – когда $G = \text{SL}_{2k+1} \times \text{SL}_2$, $V = \mathbf{V}(\pi_2) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus V'$, где V' – одно из возможных представлений из таблицы 4.

Случай $V' = \mathbf{V}(\pi_1) \otimes W'$, где $W' = \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ или $\mathbf{V}_3$. Выберем базис $e_1, \dots, e_{2k+1}$ пространства U , где $\mathfrak{sl}_{2k+1} = \mathfrak{sl}(U)$; w_1, w_2 (w'_1, w'_2) – старший и младший векторы представления $\mathbf{V}_1$ (W') алгебры $\mathfrak{sl}_2$. Рассмотрим векторы

$$\begin{aligned} v_1 &= (e_1 \wedge e_2 + \dots + e_{2k-1} \wedge e_{2k}) \otimes w_1 + (e_2 \wedge e_3 + \dots + e_{2k} \wedge e_{2k+1}) \otimes w_2, \\ v_2 &= (e_1 + e_3) \otimes w'_1 + e_{2k+1} \otimes w'_2, \\ v &= v_1 + v_2. \end{aligned}$$

Докажем, что $\mathfrak{g}_v = 0$.

Пусть $\xi \in \mathfrak{g}_v$, $\xi v = 0$. Согласно [5; таблица 6, N1] стационарная подалгебра вектора v_1 совпадает с СПОП, т.е. $\xi \in \mathfrak{h}$, где

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{u}_{2k} = \mathfrak{g}_*(\mathbf{V}(\pi_2) \otimes \mathbf{V}_1).$$

Таблица 4. Список особых представлений, у которых $\mathfrak{g}_*(V)$ может быть нетривиальной.

Группа G	Представление V
$\mathrm{SL}_k \times \mathrm{SL}_2, k \geq 4$	$\mathbf{V}(\pi_2) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1, \mathbf{V}(\pi_2) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1^*) \otimes \mathbf{V}_1,$ $\mathbf{V}(\pi_2) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus 2\mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1, \mathbf{V}(\pi_2) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus 2\mathbf{V}(\pi_1^*) \otimes \mathbf{V}_1,$ $\mathbf{V}(\pi_2) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1^*) \otimes \mathbf{V}_1,$ $\mathbf{V}(\pi_2) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_2, \mathbf{V}(\pi_2) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1^*) \otimes \mathbf{V}_2,$ $\mathbf{V}(\pi_2) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_3, \mathbf{V}(\pi_2) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1^*) \otimes \mathbf{V}_3$
$\mathrm{SL}_4 \times \mathrm{SL}_2$	$\mathbf{V}(\pi_2) \otimes \mathbf{V}_2 \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1$
$\mathrm{Spin}_5 \times \mathrm{SL}_2$	$\mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_2) \otimes \mathbf{V}_1$
$\mathrm{Spin}_7 \times \mathrm{SL}_2$	$\mathbf{V}(\pi_3) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1, 2\mathbf{V}(\pi_3) \otimes \mathbf{V}_1,$ $\mathbf{V}(\pi_3) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_2, \mathbf{V}(\pi_3) \otimes (\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2),$ $\mathbf{V}(\pi_3) \otimes \mathbf{V}_2 \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1$
$\mathrm{Spin}_8 \times \mathrm{SL}_2$	$\mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_3) \otimes \mathbf{V}_1,$ $\mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_3) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_4) \otimes \mathbf{V}_1,$ $\mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_3) \otimes \mathbf{V}_1,$ $\mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_3 \oplus \mathbf{V}(\pi_3) \otimes \mathbf{V}_1, \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_2 \oplus \mathbf{V}(\pi_3) \otimes \mathbf{V}_2,$ $\mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_2 \oplus \mathbf{V}(\pi_3) \otimes \mathbf{V}_1$
$\mathrm{Spin}_9 \times \mathrm{SL}_2$	$\mathbf{V}(\pi_4) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1, \mathbf{V}(\pi_4) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_2$
$\mathrm{Spin}_{10} \times \mathrm{SL}_2$	$2\mathbf{V}(\pi_4) \otimes \mathbf{V}_1, (\mathbf{V}(\pi_4) \oplus \mathbf{V}(\pi_4^*)) \otimes \mathbf{V}_1, \mathbf{V}(\pi_4) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1,$ $\mathbf{V}(\pi_4) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus 2\mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1, \mathbf{V}(\pi_4) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_2,$ $\mathbf{V}(\pi_4) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_3, \mathbf{V}(\pi_4) \otimes \mathbf{V}_2 \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1$
$\mathrm{Spin}_{12} \times \mathrm{SL}_2$	$\mathbf{V}(\pi_5) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1$
$G_2 \times \mathrm{SL}_2$	$2\mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1$
$E_6 \times \mathrm{SL}_2$	$2\mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1, \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_1^*) \otimes \mathbf{V}_1$

Выпишем явно вложение $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Алгебра $\mathfrak{u}_{2k}$ вкладывается в $\mathfrak{sl}_{2k+1}$ следующим образом:

$$\mathfrak{u}_{2k} = \langle E_{21}, E_{41} + E_{23}, \dots, E_{2k,1} + E_{2k-2,3} + \dots + E_{2,2k-1}, E_{2k,2k+1}, \\ E_{2k-2,2k+1} + E_{2k,2k-1}, \dots, E_{2,2k+1} + E_{4,2k-1} + \dots + E_{2k,3} \rangle;$$

алгебра $\mathfrak{sl}_2$ вложена диагонально, причем проекции $\tilde{e}, \tilde{f}, \tilde{h}$ образующих e, f, h в алгебре $\mathfrak{sl}_{2k+1}$ равны соответственно

$$\tilde{e} = kE_{31} + (k-1)E_{53} + \dots + E_{2k+1,2k-1} - (k-1)E_{24} - (k-2)E_{46} - \dots - E_{2k-2,2k}, \\ \tilde{f} = E_{13} + 2E_{35} + \dots + kE_{2k-1,2k+1} - E_{42} - 2E_{64} - \dots - (k-1)E_{2k,2k-2}, \\ \tilde{h} = -kE_{11} + (2-k)E_{33} + (4-k)E_{55} + \dots + kE_{2k+1,2k+1} \\ + (k-1)E_{22} + (k-3)E_{44} + \dots + (1-k)E_{2k,2k}.$$

Положим $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где $\xi_1 \in \mathfrak{u}_{2k}$, $\xi_2 \in \mathfrak{sl}_2$. Непосредственной проверкой видно, что при действии на вектор v_2 алгеброй $\mathfrak{sl}_2$ ($\mathfrak{u}_{2k}$) мы получим линейную комбинацию векторов вида $u' \otimes w'$, где $w' \in W'$, $u' \in \langle e_1, e_3, \dots, e_{2k+1} \rangle$ ($\langle e_2, e_4, \dots, e_{2k} \rangle$ соответственно). Таким образом, из равенства $\xi v_2 = 0$ следует, что $\xi_1 v_2 = \xi_2 v_2 = 0$.

Рассмотрим действие h на v_2 . Так как

$$\begin{aligned} h((e_1 + e_3) \otimes w'_1 + e_{2k+1} \otimes w'_2) \\ = (-k + L)e_1 \otimes w'_1 + (2 - k + L)e_3 \otimes w'_1 + (k - L)e_{2k+1} \otimes w'_2, \end{aligned}$$

где L – старший вес W' , то $hv_2 \neq 0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} ev_2 &= (ke_3 + (k - 1)e_5) \otimes w'_1 + e_{2k+1} \otimes ew'_2, \\ fv_2 &= e_1 \otimes w'_1 + (e_1 + e_3) \otimes fw'_1 + ke_{2k-1} \otimes w'_2. \end{aligned}$$

Видно, что векторы ev_2 , fv_2 , hv_2 линейно независимы, а значит, $\xi_2 = 0$.

Перейдем к вектору $\xi_1 v_2$. Если действовать базисными операторами из $\mathfrak{u}_{2k}$, то мы получим вектор вида $u_1 \otimes w'_1 + u_2 \otimes w'_2$. Образы векторов $(e_1 + e_3, e_{2k+1})$ при этом действии базисными операторами равны соответственно

$$(e_2, 0), \quad (e_4 + e_2, 0), \quad \dots, \quad (e_{2k} + e_{2k-2}, 0), \quad (0, e_{2k}), \quad (0, e_{2k-2}), \quad \dots, \quad (e_{2k}, e_2),$$

откуда образы v_2 при действии базисными векторами $\mathfrak{u}_{2k}$ линейно независимы и поэтому $\xi = \xi_1 = 0$.

Случай $V' \neq \mathbf{V}(\pi_1) \otimes W'$. Если $V' = \mathbf{V}(\pi_1^*) \otimes W'$, то можно аналогичным образом построить вектор v с $\mathfrak{g}_v = 0$, надо в качестве v_2 взять вектор

$$e_2^* \otimes w'_1 + (e_{2k-2}^* + e_{2k}^*) \otimes w'_2,$$

где $e_1^*, \dots, e_{2k+1}^*$ – базис в U^* , двойственный к базису $e_1, \dots, e_{2k+1}$ в U .

В остальных случаях V' содержит один из двух вышеописанных модулей, а значит, $\mathfrak{g}_*(V) = 0$.

6.2. Группа $G = \text{Spin}_8 \times \text{SL}_2$, $V = \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_3) \otimes \mathbf{V}_1$. Обозначим через $V_1 = \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1$, $V_2 = \mathbf{V}(\pi_3) \otimes \mathbf{V}_1$. В силу теоремы 5.1

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_*(\mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1) = \mathfrak{so}_6 \oplus \mathfrak{t}_1,$$

причем ограничение представления $\mathfrak{so}_8 : \mathbf{V}(\pi_1)$ на $\mathfrak{h}$ устроено следующим образом: $\mathfrak{so}_6$ действует тавтологически на 6-мерном подпространстве U , а $\mathfrak{t}_1$ – с весами ± 1 на дополнительном к U 2-мерном подпространстве. На $\mathbf{V}_1$ тор $\mathfrak{t}_1$ действует с теми же весами ± 1 .

Теперь рассмотрим, как действует $\mathfrak{h}$ на $\mathbf{V}(\pi_3) \otimes \mathbf{V}_1$. Несложно понять, что при ограничении представления $\mathfrak{so}_8 : \mathbf{V}(\pi_3)$ на $\mathfrak{so}_6$ мы получим представление $\mathbf{V}(\pi_2) \oplus \mathbf{V}(\pi_3)$, причем тор $\mathfrak{t}_1$ действует на этих подмодулях с весами $\pm 1/2$. Значит, искомое представление эквивалентно представлению $\mathfrak{sl}_4 \oplus \mathfrak{t}_1 : (U' \oplus (U')^*) \otimes S$, где $U' = \mathbf{V}(\pi_1)$, $\dim S = 2$, тор действует на S с весами ± 1 , на U' , $(U')^*$ с весами $\pm 1/2$.

Пространство V_2 как $(\mathfrak{sl}_4 \oplus \mathfrak{t}_1)$ -модуль распадается в сумму двух копий U' с весами тора $-1/2$, $3/2$ и двух копий $(U')^*$ с весами тора $1/2$, $-3/2$. На сумму копий U' и $(U')^*$ с весами тора $\mp 1/2$ можно смотреть как на представление $\mathfrak{gl}_4$ в $\mathbb{C}^4 \oplus (\mathbb{C}^4)^*$. СПОП этого представления равна $\mathfrak{gl}_3$. В ограничении оставшихся копий U' и $(U')^*$ на $\mathfrak{gl}_3$ содержатся два одномерных представления ненулевых весов, а значит, СПОП

$$\mathfrak{g}_*(V) = (\mathfrak{sl}_3)_*(\mathbb{C}^3 \oplus (\mathbb{C}^3)^*) = \mathfrak{sl}_2.$$

6.3. Группа $G = \text{Spin}_{10} \times \text{SL}_2$, $V = \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}(\pi_4) \otimes \mathbf{V}_1$. Обозначим через $V_1 = \mathbf{V}(\pi_1) \otimes \mathbf{V}_1$, $V_2 = \mathbf{V}(\pi_4) \otimes \mathbf{V}_1$. Согласно теореме 5.1 алгебра

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_*(V_1) = \mathfrak{so}_8 \oplus \mathfrak{t}_1.$$

Вычислим ограничение представления V_2 на $\mathfrak{h}$. Спинорное представление $\mathbf{V}(\pi_4)$ алгебры $\mathfrak{so}_{10}$ в ограничении на $\mathfrak{so}_8 \oplus \mathfrak{t}_1$ дает представление $\mathbf{V}(\pi_3) \oplus \mathbf{V}(\pi_4)$, где $\mathfrak{t}_1$ действует на $\mathbf{V}(\pi_3), \mathbf{V}(\pi_4)$ с весами $\pm 1/2$. В итоге, V_2 как $\mathfrak{so}_8 \oplus \mathfrak{t}_1$ -модуль изоморфен $(\mathbf{V}(\pi_3) \oplus \mathbf{V}(\pi_4)) \otimes S$, где на S тор действует с весами ± 1 , а значит, веса векторов из V_2 относительно тора равны $\pm 1/2, \pm 3/2$.

Подвергнув $\mathfrak{so}_8$ внешнему автоморфизму, можно заменить $\mathbf{V}(\pi_3)$ на $\mathbf{V}(\pi_1)$. СПОП представления $\mathfrak{so}_8 \oplus \mathfrak{t}_1 : \mathbf{V}(\pi_1) \otimes S$ равна $\mathfrak{so}_6$: она является стационарной подалгеброй вектора $u = u_1 \otimes s_1 + u_2 \otimes s_2$, где $\langle s_1, s_2 \rangle$ – базис S , $\langle u_1, \dots, u_8 \rangle$ – базис тавтологического представления $\mathfrak{so}_8$, в котором матрицы этой алгебры – кососимметрические матрицы.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_*(V) &= (\mathfrak{so}_6)_*(2\mathbf{V}(\pi_2) \oplus 2\mathbf{V}(\pi_3)) = (\mathfrak{sl}_4)_*(2\mathbf{V}(\pi_1) \oplus 2\mathbf{V}(\pi_3)) \\ &= (\mathfrak{sl}_4)_*(2\mathbf{V}(\pi_1) \oplus 2\mathbf{V}(\pi_1)^*) = \mathfrak{sl}_2. \end{aligned}$$

7. Доказательство основной теоремы

Здесь приведено доказательство теоремы 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если представление $G : V$ удовлетворяет предпосылкам теоремы, то возможен только один из следующих вариантов.

(1) Представление $G : V$ особое. Тогда в силу доказанного в разделе 6 только у представлений из таблицы 1 (строчки 10 и 11) алгебра $\mathfrak{g}_*(V)$ нетривиальна.

(2) Представление $G : V$ классическое и среди простых нормальных подгрупп с индексом не больше 1 есть группа SO_n или Sp_n . По теореме 5.2 алгебру $\mathfrak{g}_*(V)$ можно вычислить при помощи таблицы 1 (строчки 6, 7, 8 и 9).

(3) Представление $G : V$ классическое и все простые нормальные подгруппы с индексом не больше 1 изоморфны SL_n . Из леммы 4.1 и теоремы 4.5 следует, что либо мы можем явно вычислить стационарную подалгебру о.п., либо это представление особого вида: $G = \text{SL}(U) \times G_2$, $V = U \otimes W$, где W – представление G_2 , $\dim U = n < \dim W < 2n$.

По теореме 4.3 мы можем указать представление $\tilde{G} : \tilde{V}$ с той же СПОП, где $\dim \tilde{G} < \dim G$, $\dim \tilde{V} < \dim V$ и $G_*(V) = \tilde{G}_*(\tilde{V})$. Если новое представление имеет “особый” вид, то снова заменим представление. Так как размерность представления конечна, через конечное число таких замен мы получим представление, которое уже не будет иметь “особого” вида. Если в полученном представлении G проста или V неприводимо, то СПОП можно найти при помощи работ [4], [5]. Иначе мы снова попадаем в условие теоремы, и либо данное представление имеет тривиальную СПОП, либо оно попадает в таблицу 1.

Автор благодарит своего научного руководителя Д. А. Тимашева за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов, “Теория инвариантов”, *Алгебраическая геометрия – 4*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **55**, ВИНИТИ, М., 1989, 137–309.
- [2] D. Luna, R. W. Richardson, “A generalization of the Chevalley restriction theorem”, *Duke Math. J.*, **46**:3 (1979), 487–496.
- [3] Е.М. Андреев, Э.Б. Винберг, А.Г. Элашвили, “Орбиты наибольшей размерности полупростых линейных групп Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **1**:4 (1967), 3–7.
- [4] А.Г. Элашвили, “Канонический вид и стационарные подалгебры точек общего положения для простых линейных групп Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **6**:1 (1972), 51–62.
- [5] А.Г. Элашвили, “Стационарные подалгебры точек общего положения для неприводимых линейных групп Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **6**:2 (1972), 65–78.
- [6] Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988.
- [7] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory. A First Course*, Grad. Texts in Math., **129**, Springer-Verlag, New York, 1991.

Д. Г. Ильинский

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: nograh01@gmail.ru

Поступило

19.12.2007

Исправленный вариант

04.06.2010