Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Лауринчикас, Р. Мацайтене, О совместной универсальности периодических дзета-функций, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 1, 54–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4412>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 10:00:35

О совместной универсальности периодических дзета-функций

А. Лауринчикас, Р. Мацайтене

В статье получена совместная универсальность в смысле Воронина рядов Дирихле с периодическими мультипликативными коэффициентами. Доказательство основано на совместной предельной теореме в пространстве аналитических функций.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Через $\mathbb{P}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ будем обозначать соответственно множества всех простых, целых положительных, действительных и комплексных чисел. Пусть $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ – периодическая с наименьшим периодом $k \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел, а $s = \sigma + it$ – комплексная переменная. Периодическая дзета-функция $\zeta(s; \mathbf{a})$ при $\sigma > 1$ определяется рядом Дирихле

$$\zeta(s; \mathbf{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}.$$

В силу периодичности последовательности $\mathbf{a}$ имеем, что при $\sigma > 1$

$$\zeta(s; \mathbf{a}) = \frac{1}{k^s} \sum_{l=1}^k a_l \zeta\left(s, \frac{l}{k}\right),$$

где

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}, \quad \sigma > 1, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

– классическая дзета-функция Гурвица. Так как функция $\zeta(s, l/k)$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением простого полюса $s = 1$, отсюда получаем, что функция $\zeta(s; \mathbf{a})$ также имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, за исключением, может быть, точки $s = 1$, с вычетом

$$a = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k a_l.$$

Если $a = 0$, то $\zeta(s; \mathbf{a})$ является целой функцией.

В [1]–[3] изучалась универсальность в смысле Воронина (см. [4]–[6]) функции $\zeta(s; \mathbf{a})$. Замечательная теорема Воронина об универсальности для дзета-функции

Работа выполнена при поддержке Фонда науки и студий Литвы.

Римана $\zeta(s)$ утверждает, что всякая аналитическая функция равномерно на некоторых множествах приближается сдвигами функции $\zeta(s)$. Современная формулировка теоремы Воронина следующая. Через $\text{meas}\{A\}$ обозначим меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$, и пусть для краткости при $T > 0$

$$\nu_T(\dots) = \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0; T] : \dots\},$$

где вместо многоточия будем писать условие, которому удовлетворяет τ . Тогда в [7] содержится следующий вариант теоремы Воронина. Пусть

$$D = \left\{ s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1 \right\}.$$

ТЕОРЕМА А. Пусть K – компактное подмножество полосы D , обладающее связным дополнением, а функция $f(s)$ непрерывна, не имеет нулей в K и аналитична внутри K . Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

В [1] была получена универсальность функции $\zeta(s; \mathfrak{a})$, когда k – нечетное простое число, a_m не является кратным характера по модулю k и $a_k = 0$, а в [3], когда последовательность $\mathfrak{a}$ мультипликативна, т.е. $a_{mn} = a_m a_n$ для всех взаимно простых m и n . Сформулируем результат работы [3].

ТЕОРЕМА Б. Предположим, что последовательность $\mathfrak{a}$ мультипликативна и для всех простых p выполняется оценка

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|a_{p^\alpha}|}{p^{\alpha/2}} \leq c < 1.$$

Пусть K и $f(s)$ – те же самые, что и в теореме А. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Цель настоящей заметки – получить совместную универсальность периодических дзета-функций. Отметим, что первый результат о совместной универсальности также принадлежит Воронину. В [8] (см. также [3] и [6]) он получил совместную универсальность L -функции Дирихле.

ТЕОРЕМА В. Пусть $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r$ – попарно неэквивалентные характеры Дирихле, а $L(s, \chi_1), L(s, \chi_2), \dots, L(s, \chi_r)$ – соответствующие L -функции Дирихле. Предположим, что $K_1, \dots, K_r$ – компактные подмножества полосы D , обладающие связным дополнением, а функции $f_1(s), \dots, f_r(s)$ непрерывны, не имеют нулей соответственно в $K_1, \dots, K_r$ и аналитичны внутри $K_1, \dots, K_r$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |L(s + i\tau, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Результаты, аналогичные теореме В, были также получены Гонеком [9] и Багчи [10].

Пусть $\mathbf{a}_j = \{a_{jm} : m \in \mathbb{N}\}$ – периодическая с наименьшим периодом $k_j \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел, а $\zeta(s; \mathbf{a}_j)$ – соответствующая периодическая дзета-функция, $j = 1, \dots, r$, $r > 1$. Через $k = [k_1, \dots, k_r]$ обозначим наименьшее общее кратное периодов $k_1, \dots, k_r$, через $l_1, \dots, l_{\varphi(k)}$ – приведенную систему вычетов по модулю k и определим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{1l_1} & a_{2l_1} & \dots & a_{rl_1} \\ a_{1l_2} & a_{2l_2} & \dots & a_{rl_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1l_{\varphi(k)}} & a_{2l_{\varphi(k)}} & \dots & a_{rl_{\varphi(k)}} \end{pmatrix},$$

где $\varphi(k)$ – функция Эйлера. Предположим, что для всех простых p выполняются неравенства

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|a_{jp^\alpha}|}{p^{\alpha/2}} \leq c_j < 1, \quad j = 1, \dots, r. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что последовательности $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ мультипликативны, $\text{rank}(A) = r$ и выполняются неравенства (1). Пусть $K_1, \dots, K_r$ и $f_1(s), \dots, f_r(s)$ – те же самые, что и в теореме В. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + i\tau; \mathbf{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Доказательство теоремы 1 использует совместную предельную теорему для функций $\zeta(s; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta(s; \mathbf{a}_r)$.

2. Предельная теорема. Совместная предельная теорема для периодических дзета-функций в пространствах аналитических и мероморфных функций была получена в [11]. Для доказательства теоремы 1 нам нужна предельная теорема в пространстве

$$H^r(D) = \underbrace{H(D) \times \dots \times H(D)}_r,$$

где $H(D)$ – пространство аналитических в полосе D функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах.

Через $\mathcal{B}(S)$ обозначим класс борелевских множеств пространства S и определим

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

где $\gamma_p = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$ для всех простых p . По теореме Тихонова бесконечномерный тор Ω с топологией произведения и операцией поточечного перемножения является компактной топологической абелевой группой. Следовательно, на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ может быть определена вероятностная мера Хаара m_H , и мы получаем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Через $\omega(p)$ обозначим проекцию элемента $\omega \in \Omega$ на координатное пространство γ_p , и на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ определим $H^r(D)$ -значный случайный элемент $\underline{\zeta}(s, \omega; \mathbf{a})$ формулой

$$\underline{\zeta}(s, \omega; \mathbf{a}) = (\zeta(s, \omega; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta(s, \omega; \mathbf{a}_r)),$$

где

$$\zeta(s, \omega; \mathbf{a}_j) = \prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a_j p^{\alpha} \omega^{\alpha}(p)}{p^{\alpha s}} \right), \quad j = 1, \dots, r,$$

и $\underline{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r)$. Пусть $P_{\underline{\zeta}}$ – распределение случайного элемента $\underline{\zeta}(s, \omega; \underline{\mathbf{a}})$, т.е.

$$P_{\underline{\zeta}}(A) = m_H(\omega \in \Omega : \underline{\zeta}(s, \omega; \underline{\mathbf{a}}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H^r(D)).$$

Нам нужна слабая сходимость при $T \rightarrow \infty$ вероятностной меры

$$P_T(A) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_T((\zeta(s + i\tau; \mathbf{a}_1), \dots, \zeta(s + i\tau; \mathbf{a}_r)) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H^r(D)).$$

ТЕОРЕМА 2. В условиях теоремы 1 вероятностная мера P_T при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к $P_{\underline{\zeta}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из общего результата, полученного в [11], вытекает, что мера P_T при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к распределению случайного элемента

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{1m} \omega(m)}{m^s}, \dots, \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{rm} \omega(m)}{m^s} \right),$$

где для $m \in \mathbb{N}$

$$\omega(m) = \prod_{p^{\alpha} \parallel m} \omega^{\alpha}(p),$$

а $p^{\alpha} \parallel m$ означает, что степень p^{α} точно входит в каноническое представление числа m . Поскольку в нашем случае последовательности $\mathbf{a}_j$, $j = 1, \dots, r$, мультипликативны, для почти всех $\omega \in \Omega$ имеет место равенство

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{jm} \omega(m)}{m^s} = \prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a_j p^{\alpha} \omega^{\alpha}(p)}{p^{\alpha s}} \right), \quad s \in D, \quad j = 1, \dots, r,$$

причем ряд и произведение для почти всех $\omega \in \Omega$ сходится равномерно на компактных подмножествах полосы D . Это получается таким же путем, что и в [7] для дзета-функции Римана. Теорема доказана.

3. Несколько лемм. В настоящем пункте мы сформулируем утверждения, полезные для доказательства теоремы 1. Через S_X будем обозначать носитель случайного элемента X .

ЛЕММА 1. Пусть $\{\underline{X}_m : m \in \mathbb{N}\}$ – последовательность независимых $H^r(D)$ -значных случайных элементов таких, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \underline{X}_m$$

сходится почти наверное. Тогда носителем суммы этого ряда является замыкание множества всех таких элементов $\underline{g} \in H^r(D)$, которые могут быть представлены в виде сходящегося ряда

$$\underline{g} = \sum_{m=1}^{\infty} \underline{g}_m, \quad \underline{g}_m \in S_{\underline{X}_m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма является частным случаем леммы 5, доказанной в [12].

ЛЕММА 2. *Предположим, что последовательность*

$$\{\underline{g}_m : m \in \mathbb{N}\} = \{g_{1m}, \dots, g_{rm} : m \in \mathbb{N}\} \in H^r(D)$$

удовлетворяет следующим условиям:

1° *если $\mu_1, \dots, \mu_n$ – комплекснозначные меры на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактными носителями, содержащимися в D , такие, что*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^r \int_{\mathbb{C}} g_{jm}(s) d\mu_j(s) \right| < \infty,$$

то для всех $j = 1, \dots, r$ и $l \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\int_{\mathbb{C}} s^l d\mu_j(s) = 0;$$

2° *ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \underline{g}_m$$

сходится в $H^r(D)$;

3° *для всякого компакта $K \subset D$*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^r \sup_{s \in K} |g_{jm}(s)|^2 < \infty.$$

Тогда множество всех сходящихся рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \underline{g}_m$$

с $a_m \in \gamma$ всюду плотно в $H^r(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы является частным случаем леммы 6 работы [12].

ЛЕММА 3. *Пусть μ – комплекснозначная мера на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактным носителем, содержащимся в полуплоскости $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_0\}$, и*

$$g(s) = \int_{\mathbb{C}} e^{sz} d\mu(z).$$

Если $g(s) \not\equiv 0$, то

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |g(x)|}{x} > \sigma_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. лемму 6.4.10 из [7].

ЛЕММА 4. Пусть g – функция экспоненциального типа, причем

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |g(x)|}{x} > -1.$$

Тогда при $(l, k) = 1$

$$\sum_{\substack{p \\ p \equiv l \pmod{k}}} g(\log p) = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы дано в [10; лемма 4.1].

ЛЕММА 5. Пусть $\{g_n(s) : n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность функций, аналитических в области G , ограниченной простым замкнутым контуром, и

$$g_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(s)$$

равномерно в G , причем $g(s) \not\equiv 0$. Тогда внутренняя точка s_0 области G является нулем функции $g(s)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{s_n\} \subset G$ такая, что $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s_0$ и $g_n(s_n) = 0$ при $n > n_0 = n_0(s_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма называется теоремой Гурвица. Доказательство можно найти, например, в [13; п. 3.4.5].

ЛЕММА 6. Пусть K – компактное множество комплексной плоскости, обладающее связным дополнением. Тогда всякая функция $g(s)$, непрерывная в K и аналитическая внутри K , равномерно на K приближается многочленами от s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы содержится, например, в [14].

Используя леммы 1–5, найдем носитель случайного элемента $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}(s, \omega; \mathbf{a})$.

4. Носитель случайного элемента $\underline{\zeta}$. При $|z| < 1$ определим

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots.$$

ЛЕММА 7. В условиях теоремы 1 носитель $H^r(D)$ -значного элемента

$$\sum_p \left(\log \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a_{1p^\alpha} \omega^\alpha(p)}{p^{\alpha s}} \right), \dots, \log \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a_{rp^\alpha} \omega^\alpha(p)}{p^{\alpha s}} \right) \right)$$

совпадает со всем пространством $H^r(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для краткости

$$g_{jp}(s, \omega) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a_{jp^\alpha} \omega^\alpha(p)}{p^{\alpha s}}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Поскольку произведение

$$\prod_p (1 + g_{jp}(s, \omega)), \quad j = 1, \dots, r,$$

для почти всех $\omega \in \Omega$ сходится равномерно на компактных подмножествах полосы D , существует последовательность $\mathbf{b} = \{b_p : b_p \in \gamma\}$ такая, что для всякого фиксированного p_0 ряд

$$\sum_{p > p_0} (g_{1p}(s, \mathbf{b}), \dots, g_{rp}(s, \mathbf{b})) \quad (2)$$

сходится в $H^r(D)$. Ввиду периодичности последовательность $\mathbf{a}_j$, $j = 1, \dots, r$, ограничена. Следовательно, для всякого компактного подмножества K полосы D

$$\sum_{p > p_0} \sum_{j=1}^r \sup_{s \in K} |g_{jp}(s, \mathbf{b})|^2 < \infty. \quad (3)$$

Проверим условие 1° леммы 4. Пусть $\mu_1, \dots, \mu_r$ – комплекснозначные меры на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактными носителями, содержащимися в D , такие, что

$$\sum_{p > p_0} \left| \sum_{j=1}^r \int_{\mathbb{C}} g_{jp}(s, \mathbf{b}) d\mu_j(s) \right| < \infty.$$

Легко видеть, что последнее условие влечет за собой

$$\sum_{p > p_0} \left| \sum_{j=1}^r \int_{\mathbb{C}} \frac{a_{jp} b_p}{p^s} d\mu_j(s) \right| < \infty. \quad (4)$$

Пусть $(l, k) = 1$. Тогда из (4) и периодичности последовательностей $\mathbf{a}_j$, $j = 1, \dots, r$, вытекает, что при $l = 1, \dots, k$

$$\sum_{\substack{p > p_0 \\ p \equiv l \pmod{k}}} \left| \sum_{j=1}^r \int_{\mathbb{C}} \frac{a_{jl}}{p^s} d\mu_j(s) \right| < \infty. \quad (5)$$

Напоминаем, что здесь $k = [k_1, \dots, k_r]$. Для $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ полагаем

$$\nu_l(A) = \sum_{j=1}^r a_{jl} \mu_j(A), \quad l = 1, \dots, k, \quad (l, k) = 1.$$

Тогда $\nu_1, \dots, \nu_k$ – комплекснозначные меры на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактными носителями, содержащимися в D , и в силу (5)

$$\sum_{\substack{p > p_0 \\ p \equiv l \pmod{k}}} \left| \int_{\mathbb{C}} p^{-sz} d\nu_j(s) \right| < \infty, \quad l = 1, \dots, k, \quad (l, k) = 1. \quad (6)$$

Для $z \in \mathbb{C}$ определим функции

$$\rho_l(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\nu_l(s), \quad l = 1, \dots, k, \quad (l, k) = 1.$$

Тогда (6) принимает вид

$$\sum_{\substack{p > p_0 \\ p \equiv l \pmod{k}}} |\rho_l(\log p)| < \infty, \quad l = 1, \dots, k, \quad (l, k) = 1. \quad (7)$$

Кроме того, так как $\rho_l(z)$ – функция экспоненциального типа, в силу леммы 3 или $\rho_l(z) \equiv 0$, или же

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |\rho_l(x)|}{x} > -1, \quad l = 1, \dots, k, \quad (l, k) = 1.$$

Однако, если последнее неравенство имеет место для некоторого l , то из леммы 4 получаем, что для этого l

$$\sum_{\substack{p > p_0 \\ p \equiv l \pmod{k}}} |\rho_l(\log p)| = \infty,$$

что противоречит (7). Это противоречие показывает, что $\rho_l(z) \equiv 0$ для всех $l = 1, \dots, k$, $(l, k) = 1$. Таким образом, мы получаем, что

$$\sum_{j=1}^r a_{jl} \int_{\mathbb{C}} e^{-zs} d\mu_j(s) \equiv 0, \quad l = 1, \dots, k, \quad (l, k) = 1.$$

Теперь, воспользовавшись условием теоремы 1, что $\text{rank}(A) = r$, отсюда находим, что

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-zs} d\mu_j(s) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

Дифференцируя последнее равенство и затем полагая $z = 0$, получаем, что для всех $m \in \mathbb{N}_0$ и $j = 1, \dots, r$

$$\int_{\mathbb{C}} s^m d\mu_j(s) = 0.$$

Это и сходимости рядов (2) и (3) показывают, что все условия леммы 2 выполнены; следовательно, множество всех сходящихся рядов

$$\sum_{p > p_0} \hat{a}(p)(g_{1p}(s, \mathbf{b}), \dots, g_{rp}(s, \mathbf{b}))$$

с $\hat{a}(p) \in \gamma$ всюду плотно в $H^r(D)$. Отсюда заключаем, что множество всех сходящихся рядов

$$\sum_{p > p_0} (g_{1p}(s, \mathbf{a}), \dots, g_{rp}(s, \mathbf{a})) \quad (8)$$

с $\mathbf{a} = \{a(p) : a(p) \in \gamma\}$ также всюду плотно в $H^r(D)$.

Берем произвольный фиксированный элемент $\underline{x}_0(s) = (x_{10}(s), \dots, x_{r0}(s))$ пространства $H^r(D)$, $\varepsilon > 0$ и компактное подмножество K полосы D . Существует p_0 такое, что

$$\max_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K} \sum_{p > p_0} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{|g_{jp}(s, \mathbf{a})|^l}{l} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (9)$$

для всех $\mathbf{a} = \{a(p) : a(p) \in \gamma, p > p_0\}$. Из плотности множества рядов (8) имеем, что найдется последовательность $\hat{\mathbf{a}} = \{\hat{a}(p) : \hat{a}(p) \in \gamma, p > p_0\}$ такая, что

$$\max_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K} \left| x_{j0}(s) - \sum_{p \leq p_0} \log \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a_{jp}}{p^{\alpha s}} \right) - \sum_{p > p_0} g_{jp}(s, \hat{\mathbf{a}}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (10)$$

Положим

$$a(p) = \begin{cases} \widehat{a}(p), & \text{если } p > p_0, \\ 1, & \text{если } p \leq p_0. \end{cases}$$

Тогда неравенства (9), (10) и (1) влекут за собой неравенство

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K} \left| x_{j0}(s) - \sum_p \log \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a_{jp} a(p)}{p^{\alpha s}} \right) \right| \\ & \leq \max_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K} \left| x_{j0}(s) - \sum_{p \leq p_0} \log \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a_{jp}}{p^{\alpha s}} \right) - \sum_{p > p_0} g_{jp}(s, \widehat{\mathbf{a}}) \right| \\ & \quad + \max_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K} \sum_{p > p_0} \sum_{l=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{l-1} g_{jp}(s, \widehat{\mathbf{a}})}{l} \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что множество всех сходящихся рядов

$$\sum_p (\log(1 + g_{1p}(s, \mathbf{a})), \dots, \log(1 + g_{rp}(s, \mathbf{a}))) \quad (11)$$

с $\mathbf{a} = \{a(p) : a(p) \in \gamma\}$ всюду плотно в $H^r(D)$.

Из определения $\omega(p)$ следует, что $\{\omega(p) : p \in \mathbb{P}\}$ – последовательность независимых комплекснозначных случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Тогда

$$\{(\log(1 + g_{1p}(s, \omega)), \dots, \log(1 + g_{rp}(s, \omega))) : p \in \mathbb{P}\}$$

– последовательность независимых $H^r(D)$ -значных случайных элементов на пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Так как носителем каждой случайной величины $\omega(p)$ является единичная окружность γ , носителем $H^r(D)$ -значного случайного элемента $(\log(1 + g_{1p}(s, \omega)), \dots, \log(1 + g_{rp}(s, \omega)))$, является множество

$$\{\underline{g} = (g_1, \dots, g_r) \in H^r(D) : g_j(s) = \log(1 + g_{jp}(s, \mathbf{a})), j = 1, \dots, r\},$$

где $\mathbf{a} = \{a(p) : a(p) \in \gamma\}$. Применяя лемму 1, отсюда находим, что носителем случайного элемента леммы является замыкание множества всех сходящихся рядов (11). Так как последнее множество всюду плотно в $H^r(D)$, лемма полностью доказана.

Пусть

$$S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \text{ или } g(s) \equiv 0\}.$$

ТЕОРЕМА 3. В условиях теоремы 1 носителем случайного элемента $\underline{\zeta}(s, \omega; \underline{\mathbf{a}})$ является множество S^r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $h : H^r(D) \rightarrow H^r(D)$ формулой

$$h(g_1, \dots, g_r) = (e^{g_1}, \dots, e^{g_r}), \quad (g_1, \dots, g_r) \in H^r(D).$$

Тогда h – непрерывная функция, отображающая

$$\left(\sum_p \log(1 + g_{1p}(s, \omega)), \dots, \sum_p \log(1 + g_{rp}(s, \omega)) \right)$$

В

$$\left(\prod_p (1 + g_{1p}(s, \omega)), \dots, \prod_p (1 + g_{rp}(s, \omega)) \right),$$

а также $H^r(D)$ на $(S \setminus \{0\})^r$. Отсюда и из леммы 7 получаем, что носитель случайного элемента $\zeta(s, \omega; \underline{\mathbf{a}})$ содержит множество $(S \setminus \{0\})^r$. Однако носитель случайного элемента $\zeta(s, \omega; \underline{\mathbf{a}})$ – замкнутое множество. Так как в силу леммы 5 замыкание множества $(S \setminus \{0\})^r$ равно S^r , отсюда вытекает, что носитель случайного элемента $\zeta(s, \omega; \underline{\mathbf{a}})$ содержит множество S^r .

В условиях теоремы 1 каждая компонента

$$\prod_p (1 + g_{jp}(s, \omega)), \quad j = 1, \dots, r,$$

случайного элемента $\zeta(s, \omega; \underline{\mathbf{a}})$ является почти наверное сходящимся произведением ненулевых множителей. Поэтому лемма 5 опять показывает, что носитель элемента $\zeta(s, \omega; \underline{\mathbf{a}})$ лежит в множестве S^r . Отсюда и из предыдущего замечания, что носитель элемента $\zeta(s, \omega; \underline{\mathbf{a}})$ содержит множество S^r , вытекает утверждение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала предположим, что функции $f_1(s), \dots, f_r(s)$ имеют ненулевые аналитические продолжения на полосу D . Пусть

$$G = \left\{ (g_1, \dots, g_r) \in H^r(D) : \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |g_j(s) - f_j(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Тогда множество G открыто в $H^r(D)$ и в силу теоремы 3 является подмножеством носителя случайного элемента $\zeta(s, \omega; \underline{\mathbf{a}})$. Поэтому из теоремы 2 и свойств слабой сходимости вероятностных мер (см. [15; теорема 2.1]) находим, что

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + i\tau; \underline{\mathbf{a}}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right) \geq P_{\zeta}(G) > 0. \quad (12)$$

Теперь пусть функции $f_1(s), \dots, f_r(s)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. В силу леммы 6 существуют многочлены $p_1(s), \dots, p_r(s)$, $p_j(s) \neq 0$ в K_j , $j = 1, \dots, r$, такие, что

$$\sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |f_j(s) - p_j(s)| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (13)$$

Хорошо известно, что каждый многочлен $p_j(s)$ имеет только конечное число нулей. Поэтому существует область G_j , обладающая связным дополнением, $K_j \subset G_j$, такая, что $p_j(s) \neq 0$ в G_j , $j = 1, \dots, r$. Поэтому мы можем выбрать непрерывную ветвь $\log p_j(s)$ в G_j , $j = 1, \dots, r$. Опять опираясь на лемму 6, можем найти многочлены $q_1(s), \dots, q_r(s)$ такие, что

$$\sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |p_j(s) - e^{q_j(s)}| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда и из (13) вытекает, что

$$\sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |f_j(s) - e^{q_j(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (14)$$

Однако, $e^{q_j(s)} \neq 0$, $j = 1, \dots, r$. Следовательно, в силу (12)

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + i\tau; \mathbf{a}_j) - e^{q_j(s)}| < \frac{\varepsilon}{2} \right) > 0.$$

Отсюда и из (14) получаем утверждение теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Steuding, *Value-Distribution of L-Functions and Allied Zeta-Functions with an Emphasis on Aspects of Universality*, Habilitationsschrift, J.W. Goethe Universität, Frankfurt, 2003.
- [2] А. Лауринчикас, Д. Шяучюнас, “Замечания об универсальности периодической дзета-функции”, *Матем. заметки*, **80**:4 (2006), 561–568.
- [3] J. Steuding, *Value-Distribution of L-functions*, Lectures Notes in Math., **1877**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 2007.
- [4] С. М. Воронин, “Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:3 (1975), 475–486.
- [5] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994.
- [6] С. М. Воронин, *Избранные труды: математика*, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, М., 2006.
- [7] A. Laurinćikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Math. Appl., **352**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.
- [8] С. М. Воронин, “О функциональной независимости L -функций Дирихле”, *Acta Arith.*, **27** (1975), 493–503.
- [9] S. M. Gonek, *Analytic Properties of Zeta and L-Functions*, Thesis, University of Michigan, 1979.
- [10] B. Bagchi, “A joint universality theorem for Dirichlet L -functions”, *Math. Z.*, **181**:3 (1982), 319–334.
- [11] A. Kačėnas, D. Šiaučiūnas, “On the periodic zeta-function. III”, *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory* (Palanga, 2001), TEV, Vilnius, 2002, 99–108.
- [12] A. Laurinćikas, K. Matsumoto, “The joint universality of zeta-functions attached to certain cusp forms”, *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, **5**, 2002, 58–75.
- [13] Е. К. Титчмарш, *Теория функций*, Наука, М., 1980.
- [14] Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, ИЛ, М., 1961.
- [15] П. Билингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977.

А. Лауринчикас

Вильнюсский университет, Литва

E-mail: antanas.laurincikas@maf.vu.lt

Поступило

12.12.2007

Исправленный вариант

18.04.2008

Р. Мацайтене

Шяуляйский университет, Литва

E-mail: renata.macaitiene@mi.su.lt