Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Т. Лупашко, Н. И. Санду, Об автоморфизмах коммутативных луп Муфанг с условием минимальности, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 3, 407–421

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4413>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 18:15:13

Об автоморфизмах коммутативных луп Муфанг с условием минимальности

Н. Т. Лупашко, Н. И. Санду

В работе рассматриваются коммутативные лупы Муфанг Q с мультипликативной группой $\mathfrak{M}$, удовлетворяющие условию минимальности для подлуп. Такие лупы, а также класс таких луп, характеризуются с помощью различных подгрупп групп автоморфизмов $\text{Aut } Q$, $\text{Aut } \mathfrak{M}$. Исследуется строение групп $\text{Aut } Q$, $\text{Aut } \mathfrak{M}$ и доказывается, что группы $\text{Aut } Q$, $\mathfrak{M}$ обладают матричным представлением.

Библиография: 13 названий.

В общем случае группы автоморфизмов алгебр содержат мало сведений о самих этих алгебрах, однако положение меняется, если на алгебрах наложить какие-то ограничения (например, для абелевых групп см. [1]). В данной работе рассматриваются группы автоморфизмов более широкого класса чем абелевы группы, а именно, класс коммутативных луп Муфанг (кратко КЛМ), который является наиболее изученным классом неассоциативных луп [2]. КЛМ с условием минимальности для подлуп (в дальнейшем выражение “для подлуп” опустим) характеризуются с помощью различных подгрупп их групп автоморфизмов и с помощью различных подгрупп групп автоморфизмов их мультипликативных групп. Описывается строение таких групп автоморфизмов.

Приведем некоторые понятия и результаты из теории КЛМ, которые, в основном, можно найти в [2]. КЛМ $(Q, \cdot) \equiv Q$ характеризуется тождеством $x^2 \cdot yz = xy \cdot xz$. Мультипликативная группа $\mathfrak{M}(Q)$ КЛМ Q – это группа, порожденная всеми трансляциями $L(a)$, где $L(a)x = ax$, КЛМ Q . Группа внутренних подстановок $I(Q)$ КЛМ Q порождается всеми внутренними подстановками $L(x, y) = L^{-1}(xy)L(x)L(y)$ КЛМ Q .

ЛЕММА 1. Для произвольной КЛМ Q с мультипликативной группой $\mathfrak{M}$ группа внутренних подстановок $I(Q)$, коммутант $\mathfrak{M}'$ группы $\mathfrak{M}$ и фактор-группа $\mathfrak{M}/Z(\mathfrak{M})$ группы $\mathfrak{M}$ по его центру $Z(\mathfrak{M})$ являются локально конечными 3-группами.

Подлупа H нормальна в Q , если $I(Q)H = H$. В КЛМ внутренние подстановки являются ее автоморфизмами. Тогда любая характеристическая подлупа КЛМ является ее нормальной подлупой.

Ассоциатор (a, b, c) элементов a, b, c КЛМ Q определяется равенством $ab \cdot c = (a \cdot bc)(a, b, c)$. Для подмножеств $A, B, C \subseteq Q$ через (A, B, C) обозначим подлупу КЛМ Q , порожденную всеми ассоциаторами (a, b, c) , где $a \in A, b \in B, c \in C$. Ассоциаторная подлупа Q' КЛМ Q – это нормальная подлупа (Q, Q, Q) , а центр $Z(L)$ произвольной лупы L – это нормальная подлупа

$$Z(L) = \{x \in L \mid x \cdot yz = xy \cdot z, y \cdot xz = yx \cdot z, z \cdot yx = zy \cdot x, xy = yx \text{ для всех } y, z \in L\}.$$

ЛЕММА 2. Для произвольной КЛМ Q ассоциаторная подлупа Q' и фактор-лупа $Q/Z(Q)$ являются локально конечными 3-лупами.

ЛЕММА 3. Периодическая КЛМ локально конечна.

ЛЕММА 4 ([3], [4]). Любая периодическая КЛМ Q разлагается в прямое произведение своих максимальных p -подлуп Q_p , причем при $p \neq 3$ Q_p принадлежат центру $Z(Q)$ КЛМ Q , а ее мультипликативная группа $\mathfrak{M}$ разлагается в прямое произведение своих максимальных p -подгрупп $\mathfrak{M}_p \cong \mathfrak{M}(Q_p)$ и при $p \neq 3$ $\mathfrak{M}_p$ принадлежат центру $Z(\mathfrak{M})$ группы $\mathfrak{M}$.

Теперь перенесем лемму 4 на группы автоморфизмов КЛМ и ее мультипликативной группы. Но вначале сделаем несколько простых замечаний более общего характера.

Если B – характеристическая подлупа КЛМ Q и $\alpha \in \text{Aut } Q$, то сужение α на B – автоморфизм КЛМ B и $aB \rightarrow \alpha a \cdot B$ – автоморфизм КЛМ Q/B .

Если КЛМ Q разлагается в прямое произведение $Q = A \times B$, то группу $\text{Aut } A$ можно рассматривать как подгруппу группы $\text{Aut } Q$, отождествив $\text{Aut } A$ с множеством всех $\alpha \in \text{Aut } Q$, для которых $\alpha B = B$. Это отождествление зависит от выбора сомножителя B .

Если $Q = \prod_{i \in I} Q_i$ – прямое произведение, то, применяя отождествление, указанное выше, каждую подгруппу $\text{Aut } Q_i$ можно рассматривать как подгруппу группы $\text{Aut } Q$. Более того, декартово произведение $\prod_{i \in I} \text{Aut } Q_i$ всех групп $\text{Aut } Q_i$ является подгруппой группы $\text{Aut } Q$. Эта подгруппа состоит из всех автоморфизмов $\alpha \in \text{Aut } Q$, которые каждую подлупу Q_i отображают на себя. В частности, если каждое Q_i – вполне характеристическая подлупа КЛМ Q , то $\text{Aut } Q = \prod_{i \in I} \text{Aut } Q_i$.

Пусть теперь Q – периодическая КЛМ с мультипликативной группой $\mathfrak{M}$. Каждая максимальная p -подлупа Q_p (соответственно p -подгруппа $\mathfrak{M}_p$) является вполне характеристической подлупой (соответственно подгруппой) КЛМ Q (соответственно группы $\mathfrak{M}$). Тогда из леммы 4 следует.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Q – неассоциативная периодическая КЛМ (соответственно ее мультипликативная группа $\mathfrak{M}$) с максимальными p -подлупами Q_p (соответственно p -подгруппами $\mathfrak{M}_p$), $p \in P$. Тогда $\text{Aut } Q = \prod_{p \in P} \text{Aut } Q_p$ (соответственно $\text{Aut } \mathfrak{M} = \prod_{p \in P} \text{Aut } \mathfrak{M}_p$) и при $p \neq 3$ Q_p (соответственно $\mathfrak{M}_p$) являются абелевыми группами.

Теперь усилим предложение 1 в случае, когда КЛМ Q удовлетворяет условию минимальности. Такие КЛМ подробно изучены в [4]–[6]. В частности, верна следующая лемма 5 для которой эквивалентность условий 1), 2) доказана в [5], [6], а условий 1), 3) – в [4].

ЛЕММА 5. Для КЛМ Q с мультипликативной группой $\mathfrak{M}$ следующие условия эквивалентны:

- 1) КЛМ Q удовлетворяет условию минимальности для подлуп;
- 2) КЛМ Q разлагается в прямое произведение конечного числа квазициклических групп $D = \prod_{p \in P} C(p^\infty)$, лежащих в центре $Z(Q)$ КЛМ Q , и конечной КЛМ H ;
- 3) группа $\mathfrak{M}$ разлагается в прямое произведение конечного числа квазициклических групп $D = \prod_{p \in P} C(p^\infty)$, лежащих в центре $Z(\mathfrak{M})$ группы $\mathfrak{M}$, и конечной группы G .

Пусть $C(p^\infty)$ – квазициклическая p -группа. Известно [7], что группа $\text{Aut } C(p^\infty)$ изоморфна мультипликативной группе обратимых элементов $Z_{p^\infty}^*$ кольца целых p -адических чисел Z_{p^∞} . Группа $Z_{p^\infty}^*$ состоит из целых p -адических чисел $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$, у которых свободный член a_0 отличен от нуля и имеет мощность континуума. Тогда из предложения 1 и леммы 5 следует.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $Q = H \times \prod_{p \in P} C(p^\infty)$ и $\mathfrak{M} = G \times \prod_{p \in P} C(p^\infty)$ – разложения КЛМ Q и ее мультипликативной группы $\mathfrak{M}$, рассмотренные в лемме 5. Тогда

$$\text{Aut } Q = \text{Aut } H \times \prod_{p \in P} \text{Aut } C(p^\infty), \quad \text{Aut } \mathfrak{M} = \text{Aut } G \times \prod_{p \in P} \text{Aut } C(p^\infty),$$

причем группы $\text{Aut } H$, $\text{Aut } G$ конечны, а группы $\text{Aut } C(p^\infty)$, $p \in P$, имеют мощность континуума.

КЛМ $(Q, \cdot)$ называется делимой, если для любого целого числа $n > 0$ и любого элемента $a \in Q$ уравнение $x^n = a$ имеет в Q хотя бы одно решение. Если $n \neq 3$, то из тождеств $(x^p, y^r, z^s) = (x, y, z)^{prs}$, $(x, y, z)^3 = 1$ [2] легко следует, что делимые подлупы КЛМ Q принадлежат центру $Z(Q)$ и, следовательно, являются абелевыми группами. КЛМ, не имеющая неединичных делимых подлуп, называется редуцированной.

Пусть $Q = D \times H$ – КЛМ, рассмотренная в лемме 5, пусть $\mu: Q \rightarrow Q$ – мономорфизм КЛМ Q и пусть μ_D – ограничение μ на D . Абелева группа D делима, а КЛМ H конечна. Тогда из строения делимых абелевых групп [8] следует, что D – максимальная делимая подлупа КЛМ Q . Эпиморфный образ делимой группы является делимой группой. Тогда $\mu_D(D) \subseteq D$ и по [8; упр. 4, с. 133] мономорфизм $\mu_D: D \rightarrow D$ будет автоморфизмом, $\mu_D(D) = D$. Пусть μ_H – ограничение мономорфизма μ на КЛМ H . Так как $D \cap H = 1$, то $\mu(D) \cap \mu(H) = 1$. Поэтому μ_H будет мономорфизмом H в H . КЛМ H конечна; тогда μ_H будет автоморфизмом КЛМ H , $\mu_H(H) = H$. Поскольку и $\mu_D = D$, то $\mu(Q) = Q$. Следовательно, любой мономорфизм КЛМ в себя, удовлетворяющей условию минимальности, будет автоморфизмом. Если $\mathfrak{M}$ – мультипликативная группа такой КЛМ, то аналогично доказывается, что любой мономорфизм группы $\mathfrak{M}$ в себя будет автоморфизмом $\mathfrak{M}$.

Введем следующее понятие. Пусть L – лупа, G – абелева группа, α, β – гомоморфизмы L в G . Определим сумму $\alpha + \beta$, положив $(\alpha + \beta)a = \alpha a \cdot \beta a$ для всякого $a \in L$. Легко проверить, что $\alpha + \beta: L \rightarrow G$ также гомоморфизм и что множество всех гомоморфизмов из L в G относительно введенной операции образуют абелеву группу. Обозначим ее через $\text{Hom}(L, G)$. Нулем этой группы является тривиальный гомоморфизм лупы L в группу G ; обратный элемент $-\alpha$ для элемента $\alpha: L \rightarrow G$

переводит элемент $x \in L$ в элемент $(\alpha x)^{-1} = \alpha x^{-1} \in G$. Как и в случае абелевых групп [8] верна

ЛЕММА 6. *Предположим, что луна L разлагается в прямое произведение $L = \prod_{i \in I} L_i$, а абелева группа G разлагается в прямое произведение $G = \prod_{j \in J} G_j$. Тогда $\text{Hom}(L, G) \cong \prod_{i \in I} \prod_{j \in J} \text{Hom}(L_i, G_j)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничение гомоморфизма $\alpha: \prod L_i \rightarrow G$ на L_i – это гомоморфизм $\alpha_i: L_i \rightarrow G$. Таким способом мы получаем отображение $(\dots, \alpha_i, \dots)$ группы $\text{Hom}(\prod L_i, G)$ в группу $\prod \text{Hom}(L_i, G)$, которое является некоторым гомоморфизмом φ . Ясно, что φ переводит в $(0, \dots, 0, \dots)$ только элемент $\alpha = 0$, т.е. φ – мономорфизм. Так как любое множество $\{\alpha_i\}_{i \in I}$, где $\alpha_i \in \prod \text{Hom}(L_i, G)$, определяет такой элемент $\alpha \in \text{Hom}(\prod L_i, G)$, что сужение α на L_i совпадает с α_i , то φ – эпиморфизм. Поэтому $\text{Hom}(\prod_{i \in I} L_i, G) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(L_i, G)$. Аналогично доказывается, что $\text{Hom}(L, \prod_{j \in J} G_j) \cong \prod_{j \in J} \text{Hom}(L, G_j)$. Следовательно, $\text{Hom}(L, G) \cong \prod_{i \in I} \prod_{j \in J} \text{Hom}(L_i, G_j)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Q – периодическая КЛМ с r -компонентами Q_p , пусть $\mathfrak{M}$ – ее мультипликативная группа с r -компонентами $\mathfrak{M}_p$, $p \in P$, и пусть G_p – это r -компоненты абелевой группы G . Тогда

$$\text{Hom}(Q, G) \cong \prod_{p \in P} \text{Hom}(Q_p, G_p), \quad \text{Hom}(\mathfrak{M}, G) \cong \prod_{p \in P} \text{Hom}(\mathfrak{M}_p, G_p).$$

ЛЕММА 7. *Если подлуна H принадлежит центру $Z(L)$ луны L , то подгруппа $\sum_L(L/H, H)$ группы $\text{Aut } L$, состоящая из всех автоморфизмов из $\text{Aut } L$, которые индуцируют тождественное отображение на группе H и фактор-луна L/H , изоморфна группе $\text{Hom}(L/H, H)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим автоморфизмы $\alpha, \beta \in \sum_L(L/H, H)$. Тогда для элемента $a \in L$ при некоторых $b, c \in H$ имеет место $\alpha a = ab$, $\beta a = ac$. Теперь $\alpha\beta a = \alpha(ac) = ab \cdot c$. Отображения $\bar{\alpha}: aH \rightarrow (\alpha - 1)a = b$, $\bar{\beta}: aH \rightarrow (\beta - 1)a = c$ являются такими гомоморфизмами из L/H в H , что $\bar{\alpha}\bar{\beta}: aH \rightarrow bc$. Отсюда следует, что отображение $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ является гомоморфизмом $\sum_L(L/H, H) \rightarrow \text{Hom}(L/H, H)$, ядро которого тривиально. Далее, легко заметить, что при данном $\varphi \in \text{Hom}(L/H, H)$ отображение $\alpha: a \rightarrow a\varphi(aH)$ принадлежит $\sum_L(L/H, H)$. Следовательно, $\sum_L(L/H, H) \cong \text{Hom}(L/H, H)$.

ЛЕММА 8. *Пусть B – нормальная подлуна КЛМ Q , A – подлуна КЛМ Q такая, что $A \subseteq B \cap Z(Q)$, и пусть $\sum = \sum_Q(A, B)$ группа всех автоморфизмов КЛМ Q , действующих тождественно на Q/A и B . Тогда*

$$\sum_Q(A, B) \cong \text{Hom}(Q/B, A) \cong \text{Hom}(Q/BQ', A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если σ – автоморфизм из $\sum$, то $\sigma - 1$, где $(\sigma - 1)x = \sigma x \cdot x^{-1}$, является однозначным отображением Q в A , поскольку

$$(\sigma - 1)(gA) = \sigma(gA) \cdot (gA)^{-1} = gA \cdot g^{-1}A = gg^{-1} \cdot AA = A$$

для любого элемента $g \in Q$. Если x, y – элементы из Q , то, используя тождество

$$(x, y, uv) = (x, y, u)((x, y, u), u, v)(x, y, v)((x, y, v), v, u)$$

(см. [2]), получим

$$\begin{aligned} (\sigma - 1)(xy) &= (\sigma x \sigma y)(y^{-1}x^{-1}) = (\sigma x(\sigma x, \sigma y, y^{-1}x^{-1}))(\sigma y \cdot y^{-1}x^{-1}) \\ &= (\sigma x(\sigma x, \sigma y, x^{-1}))(x^{-1}(x^{-1}, y^{-1}, \sigma y) \cdot y^{-1}\sigma y). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} (\sigma x, \sigma y, y^{-1}x^{-1}) &= (\sigma x, \sigma y, y^{-1})((\sigma x, \sigma y, y^{-1}), y^{-1}, x^{-1})(\sigma x, \sigma y, x^{-1})((\sigma x, \sigma y, x^{-1}), x^{-1}, y^{-1}) \end{aligned}$$

и $(\sigma x, \sigma y, x^{-1}) = (\sigma x \cdot x^{-1}, \sigma y, x^{-1}) = 1$, поскольку $\sigma x \cdot x^{-1} = (\sigma - 1)x \in A \subseteq Z(Q)$. Следовательно,

$$(\sigma - 1)(xy) = \sigma x(x^{-1}(\sigma - 1)y) = (\sigma x \cdot x^{-1}) \cdot (\sigma - 1)y = (\sigma - 1)x \cdot (\sigma - 1)y.$$

Поэтому, если σ – элемент из Σ , то $\sigma - 1$ индуцирует гомоморфизм σ^* из Q/B в B : $\sigma^*(gB) = (\sigma - 1)g$. Пусть $\alpha, \beta \in \Sigma, g \in Q$. Тогда

$$\begin{aligned} (\alpha\beta - 1)g &= (\alpha\beta)g \cdot g^{-1} = ((\alpha\beta)g \cdot \alpha g^{-1}\alpha g)g^{-1} \\ &= (\alpha((\beta - 1)g)\alpha g)g^{-1} = ((\beta - 1)g \cdot \alpha g)g^{-1} = (\beta - 1)g \cdot (\sigma - 1)g, \end{aligned}$$

поскольку $(\beta - 1)g \in A \subseteq Z(Q)$ и $(\beta - 1)g \in A \subseteq B$, а любой элемент из B остается инвариантным при автоморфизме α . Следовательно, $(\alpha\beta)^* = \alpha^* + \beta^*$ для всех $\alpha, \beta \in \Sigma$. Итак $\sigma \rightarrow \sigma^*$ является гомоморфизмом Σ в $\text{Hom}(Q/B, A)$. Если $\sigma^* = 0$ и $g \in Q$, то $1 = \sigma^*(gB) = (\sigma - 1)g$. Это влечет $g = \sigma g$ для любого $g \in Q$, т.е. $\sigma = 1$. Следовательно, отображение $\sigma \rightarrow \sigma^*$ является мономорфизмом Σ в $\text{Hom}(Q/B, A)$.

Для любого γ из $\text{Hom}(Q/B, A)$ определим однозначное отображение $\delta: Q \rightarrow Q$ по правилу $\delta g = \gamma(gB)g$ для любого $g \in Q$. Если $x, y \in Q$, то

$$\delta(xy) = \gamma(xy \cdot B) \cdot xy = (\gamma(cB) \cdot \gamma(yB)) \cdot xy = \gamma(xB)x \cdot \gamma(yB)y = \sigma x \cdot \sigma y,$$

поскольку $\gamma(Bx)$ принадлежит $A \subseteq Z(Q)$. Тогда σ является эндоморфизмом КЛМ Q . Если $\sigma x = 1$, то $\gamma(Bx)x = 1$. Это означает, что $x \in B$, поскольку $\gamma(Bx) \in A \subseteq B$. Итак $\gamma(Bx) = \gamma(B) = 1$, поэтому $x = 1$. Следовательно, δ является мономорфизмом Q в Q . Так как $\gamma B = 1$, $\gamma(gB) \in A$, то очевидно, что δ индуцирует тождественное отображение в B и Q/A . Пусть $g \in Q$ и пусть $x = \gamma(Bg^{-1})g$. Тогда

$$\delta x = \gamma(Bx)x = \gamma[B(\gamma(Bg^{-1})g)] \cdot \gamma(Bg^{-1})g = \gamma(Bg)[\gamma(Bg)^{-1}g] = g.$$

Так как $\gamma(Bg^{-1}) \in A \subseteq B$, это показывает, что δ является автоморфизмом КЛМ Q , принадлежащим Σ . Наконец, $(\sigma - 1)g = \gamma(Bg)$ для любого $g \in Q$. Следовательно, $\sigma^* = \gamma$ и $\sigma \rightarrow \sigma^*$ является изоморфизмом Σ в $\text{Hom}(Q/B, A)$. Изоморфизм $\text{Hom}(Q/B, A) \cong \text{Hom}(Q/Q'B, A)$ очевиден в силу ассоциативности подлупы $A \subseteq Z(Q)$. Лемма доказана.

Пусть теперь Q – КЛМ с мультипликативной группой $\mathfrak{M}$, удовлетворяющая условию минимальности. По лемме 5 $Q = D \times H$, $\mathfrak{M} = D \times G$, где $D = \prod_{p \in S} C(p^\infty)$, H – конечная КЛМ, G – конечная группа. Ввиду леммы 4 $H = \prod_{p \in T} H_p$, $G = \prod_{p \in T} G_p$, где $G_p \cong \mathfrak{M}(H_p)$, и если КЛМ Q неассоциативна, то только максимальная 3-подлупа H_3 неассоциативна и максимальная 3-подгруппа G_3 некоммутативна. Множества простых чисел S , T конечны. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть Q – КЛМ, удовлетворяющая условию минимальности для подлуп и пусть $\mathfrak{M}$ – ее мультипликативная группа. Тогда группы автоморфизмов $\text{Aut } Q$ (соответственно $\text{Aut } \mathfrak{M}$) являются полупрямым произведением конечной абелевой группы $\sum_Q(H, D) \cong \prod_{p \in S \cap T} \text{Hom}(H_p, C(p^\infty))$ (соответственно $\sum_Q(G, D) \cong \prod_{p \in S \cap R} \text{Hom}(G_p, C(p^\infty))$) и подгруппы $\text{Aut } D \times \prod_{p \in T} \text{Aut } H_p$ (соответственно подгруппы $\text{Aut } D \times \prod_{p \in T} \text{Aut } G_p$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомоморфный образ делимой КЛМ является делимой КЛМ. Подлупа D является максимальной делимой подлупой КЛМ Q , поэтому она вполне характеристическая подлупа КЛМ Q . Тогда любой автоморфизм $\alpha \in \text{Aut } Q$ индуцирует некоторые автоморфизмы $\alpha_D \in \text{Aut } D$ и $\alpha_H \in \text{Aut}(Q/D) = \text{Aut } H$. Соответствие $\alpha \rightarrow (\alpha_D, \alpha_H)$ является гомоморфизмом $\varphi: \text{Aut } Q \rightarrow \text{Aut } D \times \text{Aut } H$, ядро которого совпадает с $\sum_Q(Q/D, D) = \sum_Q(H, D)$. Поскольку $\sum_Q(Q/D, D) \cap \varphi(\text{Aut } Q) = 1$, то $\text{Aut } Q$ – полупрямое произведение подгрупп $\sum_Q(H, D)$ и $\text{Aut } D \times \prod_{p \in T} \text{Aut } H_p$.

Разложение $\text{Aut } H = \prod_{p \in T} \text{Aut } H_p$ следует из предложения 1, а изоморфизм $\sum_Q(H, D) \cong \prod_{p \in S \cap T} \text{Hom}(H_p, D_p)$ вытекает из леммы 8 и следствия леммы 6. Порядок подлупы H_p равен p^k . Квазициклическая группа $C(p^\infty)$ содержит конечное число подгрупп порядка $\leq p^k$. Поэтому $\text{Hom}(H_p, C(p^\infty))$ – конечная абелева группа, а тогда и $\prod_{p \in T} \text{Hom}(H_p, C(p^\infty))$ – конечная абелева группа. Аналогично доказывается утверждение и для группы $\text{Aut } \mathfrak{M}$. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Q – КЛМ с мультипликативной группой $\mathfrak{M}$, удовлетворяющая условию минимальности для подлуп. Тогда группы автоморфизмов $\text{Aut } Q$, $\text{Aut } \mathfrak{M}$ изоморфно представимы матрицами над конечной прямой суммой колец $GL_n(Z(p^\infty))$ целых p -адических чисел. Более точно, здесь $p \in S$, где S – это совокупность простых чисел, определенная в предложении 2, а n – их количество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{Aut } D \times \prod_{p \in T} \text{Aut } H_p$, $\sum_Q(H, D)$, $\text{Aut } D \times \prod_{p \in T} \text{Aut } G_p$, $\sum_{\mathfrak{M}}(G, D)$ – подгруппы групп $\text{Aut } Q$, $\text{Aut } \mathfrak{M}$, рассмотренные в предложении 2. По [9] группа $\text{Aut } D$ изоморфно представима матрицами над конечной прямой суммой колец $GL_n(Z(p^\infty))$ целых p -адических чисел ($p \in S$). В [10; с. 136] показано, что если некоторая группа G имеет подгруппу конечного индекса, которая допускает изоморфное представление матрицами, то сама группа G допускает изоморфное матричное представление над тем же кольцом. Подгруппы $\text{Aut } H$, $\sum_Q(H, D)$, $\text{Aut } G$, $\sum_{\mathfrak{M}}(G, D)$ конечны. Тогда группы $\text{Aut } Q$, $\text{Aut } \mathfrak{M}$ имеют такое же матричное представление, что и их подгруппа $\text{Aut } D$. Теорема доказана.

Напомним, что лупа почти вся обладает некоторым свойством, если она содержит нормальную подлупу конечного индекса, обладающую этим свойством. Тогда как и в случае групп [9] из теоремы 1 следует.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Q – КЛМ с мультипликативной группой $\mathfrak{M}$, удовлетворяющая условию минимальности для подлуп. Тогда группа автоморфизмов $\text{Aut } Q$

(соответственно $\text{Aut } \mathfrak{M}$) почти вся не имеет кручения и почти вся аппроксимируется конечными нильпотентными p -группами.

Теперь переходим к характеристизации КЛМ с условием минимальности (конечных КЛМ) с помощью их групп автоморфизмов. Для этой цели нам нужны.

ЛЕММА 9. *Редуцированная коммутативная p -луна Муфанг $(Q, +, 0)$ с конечным Q/pQ , где $pQ = \{pa \mid a \in Q\}$, конечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как Q/pQ конечна, существует конечно порожденная подлуна L КЛМ Q такая, что $Q = L + pQ$. По лемме 3 p -луна L конечна. Тогда существует такое число n , что $p^n L = 0$. Следовательно, $p^n Q = p^n L + p^{n+1} Q = p(p^n Q)$ является делимой КЛМ. Но Q – редуцированная КЛМ, поэтому $p^n Q = 0$. Из равенства $Q = L + pQ$ получаем

$$Q = L + pL + p^2 Q = L + p^2 Q = \dots = L + p^n Q = L,$$

т.е. КЛМ Q конечна.

ЛЕММА 10. *Пусть Q – КЛМ и B – абелева группа, удовлетворяющие условию минимальности для подгрупп. Тогда периодическая группа из $\text{Hom}(Q, B)$ конечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 5 КЛМ Q является прямой суммой конечной КЛМ L и делимой абелевой группой D . Тогда существует такое целое число n , что $nL = 0$. Пусть $F = \{a \in B \mid na = 0\}$. Так как B удовлетворяет условию минимальности, то F конечна. Если α – элемент из $\text{Hom}(Q, B)$ порядка r , то в силу определения операции $(+)$ в $\text{Hom}(Q, B)$ получаем

$$\alpha D = \alpha(rD) = r(\alpha D) = \underbrace{\alpha D + \dots + \alpha D}_r = (r\alpha)D = 0D = 0,$$

$$n(\alpha Q) = n(\alpha L + \alpha D) = \alpha(nL + nD) = \alpha(nD) = n(\alpha D) = 0.$$

Итак, $\alpha Q \subseteq F$. Следовательно, периодическая группа из $\text{Hom}(Q, B)$ равносильна подгруппе группы гомоморфизмов конечной КЛМ $Q/D \cong L$ в конечную группу F . Отсюда следует ее конечность.

ЛЕММА 11. *Если КЛМ $(Q, +, 0)$ является прямой суммой бесконечного множества подлуп Q_α , то группа автоморфизмов КЛМ Q содержит несчетную элементарную абелеву 2-группу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С каждой подгруппой Q_α свяжем автоморфизм α КЛМ Q , определенный следующим образом. Если показатели бесконечного множества КЛМ Q_α больше двух, то $\alpha a = -a$ при $a \in Q_\alpha$ и $\alpha a = a$ при $a \in Q_\beta$, $\beta \neq \alpha$. В противном случае существует бесконечное число циклических групп второго порядка. Автоморфизм α определим таким образом. Если $Q_\alpha = \langle a \rangle$, $Q_{\alpha+1} = \langle b \rangle$, то $\alpha a = b$, $\alpha u = u$ при $u \in Q_\gamma$, $\gamma \neq \alpha, \alpha+1$. Очевидно, что в обоих случаях группа, порожденная всеми автоморфизмами α , будет несчетной элементарной абелевой 2-группой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для произвольной КЛМ Q следующие условия эквивалентны:*

- 1) группа внутренних подстановок $I(Q)$ КЛМ Q является конечной 3-группой;
- 2) ассоциаторная подлуна Q' является конечной 3-луной;

- 3) фактор-луна $Q/Z(Q)$ является элементарной конечной 3-луной;
 4) КЛМ Q имеет такую ассоциативную нормальную подгруппу H , что Q/H и (H, Q, Q) – конечные 3-луны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать леммы 1, 2. Пусть КЛМ Q удовлетворяет условию 1) и пусть для элементов $u_i, u_j, v, w \in Q$ $(u_i, v, w) \neq (u_j, v, w)$. По тождествам $L(x, y)z = z(z, y, x)$, $(x, y, z) = (y, z, x)$ [2] имеем $v(v, w, u_i) \neq v(v, w, u_j)$, $L(u_i, w)v \neq L(u_j, w)v$, $L(u_i, w) \neq L(u_j, w)$. В силу конечности $I(Q)$ отсюда следует, что при фиксированных $v, w \in Q$ КЛМ Q имеет конечное число неединичных ассоциаторов $(u_1, v, w), (u_2, v, w), \dots, (u_r, v, w)$, если первая компонента u ассоциатора (u, v, w) пробегает все множество Q . Аналогично показывается, что при фиксированных $w, u_i, i = 1, 2, \dots, r$, КЛМ Q имеет конечное число неединичных ассоциаторов $(u_i, v_1, w), \dots, (u_i, v_s, w)$, если вторая компонента v ассоциатора (u_i, v, w) пробегает все множество Q . Таким же образом получаем, что при фиксированных $u_i, v_j, i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, s$, КЛМ Q имеет конечное число неединичных ассоциаторов (u_i, v_j, w) , когда w пробегает все множество Q . Отсюда следует, что множество всех неединичных ассоциаторов КЛМ Q конечно. Тогда по лемме 2 ассоциаторная подгруппа Q' конечна и, следовательно, импликация 1) $\Rightarrow$ 2) верна.

2) $\Rightarrow$ 3). В [5] показано, что для элементов a, b произвольной КЛМ L $aZ(L) = bZ(L)$ тогда и только тогда, когда $L(a, b)(a, u, v) = (b, u, v)$ для любых $u, v \in L$. Имеем $L(a, b)(a, u, v) = (a, u, v)((a, u, v), b, a)$. Если КЛМ Q удовлетворяет условию 2), то в ней верно только конечное число неравенств вида $(a, u, v)((a, u, v), b, a) \neq (b, u, v)$. Отсюда следует, что центр $Z(Q)$ имеет конечный индекс в Q . Тогда по лемме 2 $Q/Z(Q)$ – конечная 3-луна и, следовательно, условие 3) верно.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть КЛМ Q удовлетворяет условию 3) и пусть $a_1, a_2, \dots, a_k$ – полная система представителей смежных классов Q по $Z(Q)$. Любой элемент из Q имеет вид $a_i z_i$, где $z_i \in Z(Q)$. Пусть $u = a_i z_i, v = a_j z_j, w$ – произвольные элементы из Q . Используя тождества

$$(uv, x, y) = (u, x, y)((u, x, y), u, v) \cdot (v, x, y)((v, x, y), v, u),$$

$$(x, y, z) = (y, z, x) [2], \text{ получаем}$$

$$L(u, v)w = w(w, v, u) = w(w, a_j z_j, a_i z_i) = w(w, a_j, a_i) = L(a_i, a_j)w,$$

$L(u, v) = L(a_i, a_j)$. Отсюда следует, что группа внутренних подстановок $I(Q)$ порождается конечным числом подстановок $L(a_i, a_j)$. Следовательно, по лемме 1 $I(Q)$ является конечной 3-группой, т.е. условие 1) верно.

Очевидна импликация 3) $\Rightarrow$ 4), если учесть эквивалентность условий 2), 3). Предположим теперь, что в КЛМ Q верно условие 4). В КЛМ внутренние подстановки являются ее автоморфизмами. Тогда из нормальности подгруппы H в Q следует нормальность в Q подгруппы (H, Q, Q) . Обозначим через φ естественный гомоморфизм $Q \rightarrow Q/(H, Q, Q) = \bar{Q}$. Тогда $K = \varphi H$ является ассоциативной нормальной подгруппой КЛМ $\bar{Q}$ и $\bar{Q}/K$ конечна, так как Q/H конечна. Из

$$(K, \bar{Q}, \bar{Q}) = (\varphi H, \varphi Q, \varphi Q) = \varphi(H, Q, Q) = \bar{1}$$

следует, что $K \subseteq Z(\bar{Q})$. Следовательно, $\bar{Q}/Z(\bar{Q})$ – конечная КЛМ и из эквивалентности условий 2), 3) следует, что $\bar{Q}'$ – конечная КЛМ. Но $\bar{Q}' = \varphi Q' = Q'/(H, Q, Q)$.

КЛМ $\overline{Q}'$, (H, Q, Q) конечны. Тогда и ассоциаторная подлупа Q' также конечна. Следовательно, КЛМ Q удовлетворяет условию 2). Этим предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для произвольной КЛМ Q с мультипликативной группой $\mathfrak{M}$ следующие условия эквивалентны:

- 1) группа внутренних автоморфизмов $\text{Int } M$ является конечной 3-группой;
- 2) фактор-группа $\mathfrak{M}/Z(\mathfrak{M})$ является конечной 3-группой;
- 3) коммутант $\mathfrak{M}'$ является конечной 3-группой;
- 4) группа $\mathfrak{M}$ имеет такую абелеву нормальную подгруппу A , что $\mathfrak{M}/A$ и $(A, \mathfrak{M})$ – конечные 3-группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий 1), 2) следует из леммы 1 и изоморфизма $\text{Int } G \cong G/Z(G)$, справедливого для произвольной группы G . Импликации $1) \Leftrightarrow 3)$ следуют из леммы 1 и соотношений $x^y \neq x^z$, $x^{-1}x^y \neq x^{-1}x^z$, $x^{-1}y^{-1}xy \neq x^{-1}z^{-1}xz$, $(x, y) \neq (x, z)$. Теперь, если учесть эквивалентность условий 2), 3), то импликация $2) \Rightarrow 4)$ очевидна, а импликация $4) \Rightarrow 3)$ доказывается аналогично импликации $4) \Rightarrow 2)$ предыдущего предложения. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 2. Для произвольной неассоциативной КЛМ Q с мультипликативной группой $\mathfrak{M}$ следующие условия эквивалентны:

- 1) КЛМ Q удовлетворяет условию минимальности для подлуп;
- 2) а) КЛМ Q периодическая,
б) периодическая группа автоморфизмов КЛМ Q конечна;
- 3) а) КЛМ Q периодическая,
б) периодическая группа автоморфизмов КЛМ Q удовлетворяет условию минимальности для подгрупп;
- 4) а) КЛМ Q периодическая,
б) КЛМ Q удовлетворяет одному из эквивалентных условий предложения 3,
с) элементарные абелевы 3-подгруппы группы автоморфизмов КЛМ Q счетны;
- 5) а) КЛМ Q периодическая,
б) группа $\mathfrak{M}$ допускает изоморфное матричное представление над некоторым полем нулевой характеристики;
- 6) а) КЛМ Q периодическая,
б) нормальные (соответственно неабелевы) подгруппы группы $\mathfrak{M}$ допускают изоморфное матричное представление над некоторыми полями нулевой характеристики;
- 7) а) КЛМ Q периодическая,
б) хотя бы одна максимальная абелева подгруппа группы $\mathfrak{M}$ допускает изоморфное матричное представление над некоторым полем нулевой характеристики;
- 8) а) КЛМ Q периодическая,
б) по [4] группа $\mathfrak{M}$ локально нильпотентна, поэтому если $\mathfrak{M}$ содержит нильпотентную (соответственно разрешимую) подгруппу класса k , то все ее нильпотентные (соответственно разрешимые) подгруппы класса k допускают изоморфные матричные представления над полями нулевой характеристики;

- 9) а) КЛМ Q периодическая,
 б) любая периодическая группа автоморфизмов группы $\mathfrak{M}$ конечна;
 10) а) КЛМ Q периодическая,
 б) справедливо одно из эквивалентных условий предложения 4,
 в) примарные элементарные абелевы группы автоморфизмов группы $\mathfrak{M}$ счетны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть КЛМ Q удовлетворяет условию минимальности. По лемме 5 центр $Z(Q)$ КЛМ Q имеет конечный индекс в Q . Через Φ_1 и Φ_2 обозначим подгруппы периодической группы автоморфизмов Φ КЛМ Q , состоящие из тех автоморфизмов из Φ , которые индуцируют тождественное отображение в $Z(Q)$ и $Q/Z(Q)$ соответственно. Легко видеть, что подгруппы Φ_1, Φ_2 нормальны в Φ . По лемме 10 фактор-группа Φ/Φ_1 , как периодическая группа автоморфизмов абелевой группы $Z(Q)$, удовлетворяющей условию минимальности, конечна. Фактор-группа Φ/Φ_2 , как группа автоморфизмов конечной КЛМ $Q/Z(Q)$, также конечна. Поэтому фактор-группа $\Phi/(\Phi_1 \cap \Phi_2)$ конечна.

По лемме 8

$$\Phi/(\Phi_1 \cap \Phi_2) \cong \text{Hom}(Q/Z(Q), Z(Q)) \cong \text{Hom}(Q/Z(Q)Q', Z(Q)),$$

а по лемме 10 группа $\text{Hom}(Q/Z(Q)Q', Z(Q))$ конечна. Поэтому группа $\Phi/(\Phi_1 \cap \Phi_2)$, а тогда и периодическая группа автоморфизмов Φ , конечна. Следовательно, импликация 1) $\Rightarrow$ 2) верна.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна. Далее, если для КЛМ Q справедливо условие 3), то группа $I(Q)$ удовлетворяет условию минимальности. Из теоремы 1.5 из [11] легко следует, что в p -группах, удовлетворяющих условию минимальности, конечно множество элементов каждого порядка. Поэтому множество всех внутренних подстановок $L(u, v)$ КЛМ Q конечно. Тогда по лемме 1 группа $I(Q)$ конечна. Следовательно, КЛМ Q удовлетворяет одному из эквивалентных условий предложения 3. Этим доказано, что импликация 3) $\Rightarrow$ 4) верна.

4) $\Rightarrow$ 1). Если КЛМ Q удовлетворяет условию 4), то для нее справедливо утверждение:

- (а) если КЛМ Q разлагается в прямое произведение, то любой ее ассоциативный множитель A удовлетворяет условию минимальности.

Действительно, если A содержит бесконечное число примарных компонент при разложении в прямое произведение, то по лемме 11 A имеет несчетную элементарную абелеву 2-группу автоморфизмов. Последнее, очевидно, можно вложить изоморфно в группу автоморфизмов КЛМ Q . Получили противоречие с условием 4, в). Следовательно, A содержит конечное число компонент A_p .

По лемме 5 группа A_p разлагается в прямое произведение $A_p = D \times C$, где D – делимая группа, C – редуцированная группа. По условию 4, а) делимая группа D является периодической, поэтому D – прямое произведение квазициклических групп [8]. Это произведение содержит конечное число сомножителей, так как в противном случае получили бы как и выше противоречие с леммой 11. Поэтому группа D удовлетворяет условию минимальности.

Если $C \neq 1$, то C содержит подгруппу L порядка p . По лемме 8 $\text{Hom}(C/L, L)$ изоморфна некоторой подгруппе группы автоморфизмов группы C . Группа C/L

редуцированная, как гомоморфный образ редуцированной группы C . Если группа C бесконечна, то C/L также бесконечна и по лемме 1.2 из [12] $\text{Hom}(C/L, L)$ содержит несчетную элементарную абелеву p -группу, которая изоморфна некоторой группе автоморфизмов группы C . Это противоречит условию 4, с). Поэтому группа C , а из вышеизложенных рассуждений и прямой множитель A , удовлетворяют условию минимальности.

Согласно лемме 4 периодическая КЛМ Q разлагается в прямое произведение своих примарных компонент Q_p , причем при $p \neq 3$ Q_p ассоциативны. Поэтому для доказательства условия 1) достаточно считать КЛМ Q согласно (а) 3-лупой.

Ввиду леммы 3 из условия 3) предложения 3 следует:

(b) существует конечная подлупа E КЛМ Q такая, что $Q = Z(Q)E$.

Через R обозначим максимальную делимую подгруппу группы $Z(Q)$. Так как $Z(Q)$ является периодической, то R является прямым произведением квазициклических групп [8]. Через R_1 обозначим произведение всех таких квазициклических групп, которые имеют нетривиальное пересечение с EQ' . Пусть $a_i \in R_1 \cap EQ'$ ($i \in I$). В силу делимости в группе R_1 для каждого i существует такая бесконечная последовательность элементов $a_{i_1}, \dots, a_{i_n}, \dots$, что $a_{i_1} = a_i$, $a_{i_n} = a_{i_{n+1}}^3$, $n = 1, 2, \dots$. Отсюда заключаем, что каждый элемент a_i может быть вложен в квазициклическую 3-группу $A_i = \langle a_{i_1}, \dots, a_{i_n}, \dots \rangle$. По условию 2) предложения 3 ассоциаторная подлупа Q' конечна; тогда подлупа $Q'E$ также конечна. Отсюда следует, что подгруппа R_1 является прямым произведением конечного числа квазициклических групп, т.е. удовлетворяет условию минимальности. Более того, R_1 является делимой группой, поэтому по [8; теорема 21.3] $R = R_1 \times R_2$, где R_2 также делимая группа как гомоморфный образ делимой группы. Если $x \in R_2 \cap Q'E$, то как и выше можно показать, что x можно вложить в квазициклическую подгруппу группы R_2 . Но это противоречит максимальной группе R_1 . Поэтому $R_2 \cap Q'E = R_2 \cap (Z(Q) \cap Q'E) = 1$. Ввиду [8; теорема 21.2] существует подгруппа S группы $Z(Q)$, содержащая $Z(Q) \cap Q'E$, такая, что $Z(Q) = R_2 \times S$. Из (b) получаем

$$\begin{aligned} Q &= Z(Q)E = R_2SE = R_2(SQ'E), \\ R_2 \cap SQ'E &= R_2 \cap Z(Q) \cap Q'E = R_2 \cap S(Z(Q) \cap Q'E) = R_2 \cap S = 1. \end{aligned}$$

Так как $R_2 \subseteq Z(Q)$, подлупа R_2 нормальна в Q ; тогда $Q = R_2 \times SQ'E$. Применяя (а), заключаем, что R_2 удовлетворяет условию минимальности, а тогда и подгруппа R удовлетворяет этому условию. Поэтому,

(с) делимые подгруппы центра КЛМ Q удовлетворяют условию минимальности.

Через L обозначим подгруппу порядка три центра $Z(Q)$. Обозначим также $Z^3 = \{x^3 \mid \text{для всех } x \in Z(Q)\}$. Теперь рассмотрим

$$\begin{aligned} \text{Hom}(Q/Q'ELZ^3, L) &= \text{Hom}(Z(Q)Q'E/Q'ELZ^3, L) \\ &= \text{Hom}(Z(Q)/(Q'ELZ^3 \cap Z(Q)), L) \equiv H. \end{aligned}$$

Группа L циклическая порядка три. Тогда из определения группы $\text{Hom } H$ будет элементарной абелевой 3-группой. По лемме 8 она изоморфна группе автоморфизмов КЛМ Q . Поэтому по условию 4, с) H будет счетной. Согласно теореме Прюфера [8] группа $Z(Q)/(Q'ELZ^3 \cap Z(Q))$ разлагается в прямое произведение групп порядка три. Тогда из следствия леммы 6 следует, что группа $Z(Q)/(Q'ELZ^3 \cap Z(Q))$

конечна. Тогда $Z(Q)/Z^3$ будет конечной группой, так как в противном случае $(Q'ELZ^3 \cap Z(Q))/Z^3$ будет бесконечной, и она совпадает с

$$Z^3(Q'ELZ^3 \cap Z(Q))/Z^3 \cong (Q'ELZ \cap Z(Q))/(Q'EL \cap Z^3),$$

которая является элементарной абелевой 3-группой, удовлетворяющей условию минимальности. Следовательно, она конечна. Поэтому

(d) фактор-группа $Z(Q)/Z^3$ конечна.

Далее, $Z(Q)$ – периодическая группа, поэтому по [8; теорема 21.3] $Z(Q) = A \times B$, где A – делимая группа, B – редуцированная группа. По (a) группа A удовлетворяет условию минимальности, а по (d) B/B^3 – конечная группа и так как B – редуцированная группа, то по лемме 9 B конечна. Поэтому центр $Z(Q)$ удовлетворяет условию минимальности, а тогда по (b) КЛМ Q также удовлетворяет этому условию. Следовательно, импликация 4) $\Rightarrow$ 1) верна.

1) $\Rightarrow$ 5). По лемме 5 условие 1) эквивалентно условию: группа $\mathfrak{M}$ разлагается в прямое произведение конечного числа квазициклических групп и конечной группой. Это означает, что $\mathfrak{M}$ является специальной (черниковской) группой и по [13] удовлетворяет условию 5). По лемме 4 мультипликативная группа $\mathfrak{N}$ любой периодической КЛМ разлагается в прямое произведение своих максимальных p -подгрупп $\mathfrak{N}_p$, причем при $p \neq 3$ $\mathfrak{N}_p \subseteq Z(\mathfrak{N})$. Если верно условие 5), то группа $\mathfrak{M}$ имеет вышеуказанный вид и любая максимальная p -подгруппа $\mathfrak{M}_p$ имеет матричное представление. По [13] p -группа, допускающая матричное представление над полем нулевой характеристики, является специальной, т.е. обладает абелевой нормальной подгруппой конечного индекса, представимой в виде прямого произведения конечного числа квазициклических p -групп. Группа $\mathfrak{M}$ периодическая и поскольку при $p \neq 3$ $\mathfrak{M}_p \subseteq Z(\mathfrak{M})$, отсюда следует, что число подгрупп $\mathfrak{M}_p$ не может быть бесконечным. Ввиду этого группа $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию минимальности, а тогда по лемме 5 КЛМ Q также удовлетворяет условию минимальности. Следовательно, импликация 5) $\Rightarrow$ 1) верна.

Импликации 5) $\Rightarrow$ 6); 7); 8) очевидны. В [4] доказано, что для произвольной неассоциативной КЛМ Q с мультипликативной группой $\mathfrak{M}$ следующие условия эквивалентны:

- a) КЛМ Q удовлетворяет условию минимальности;
- b) нормальные (соответственно неабелевы) подгруппы группы $\mathfrak{M}$ удовлетворяют условию минимальности;
- c) хотя бы одна максимальная абелева подгруппа группы $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию минимальности;
- d) если группа $\mathfrak{M}$ содержит нильпотентную (соответственно разрешимую) подгруппу класса k , то все нильпотентные (соответственно разрешимые) подгруппы группы $\mathfrak{M}$ класса k удовлетворяют условию минимальности. Отсюда и из эквивалентности условий 1), 5) следует, что импликации 6); 7); 8) $\Rightarrow$ 1) верны.

Из периодичности КЛМ Q следует периодичность группы $\mathfrak{M}$, а если Q удовлетворяет условию минимальности, то по лемме 5 $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп и фактор-группа $\mathfrak{M}/Z(\mathfrak{M})$ конечна. При этих замечаниях

эквивалентность условий 1), 9) – это следствие 6.1 из [12], а эквивалентность условий 1), 10) – это эквивалентность условий (1), (5) главной теоремы из [12]. Теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ. Бесконечная циклическая группа является примером непериодической абелевой группой с конечной группой автоморфизмов. Это показывает, что условия 2, а)–4, а), 8, а)–10, а) необходимы для справедливости теоремы 2. Прямое произведение бесконечного числа циклических групп простого порядка удовлетворяет условиям 4, а), 4, б) и 10, а), 10, б). Это показывает, что условия 4, с) и 10, с) необходимы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для КЛМ Q с мультипликативной группой $\mathcal{M}$ следующие условия равносильны:

- 1) КЛМ Q конечна;
- 2) КЛМ Q периодическая и ее группа автоморфизмов конечна;
- 3) КЛМ Q периодическая и ее группа автоморфизмов счетна;
- 4) КЛМ Q периодическая и группа автоморфизмов группы $\mathcal{M}$ конечна;
- 5) КЛМ Q периодическая и группа автоморфизмов группы $\mathcal{M}$ счетна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)$ очевидны. Пусть КЛМ Q удовлетворяет условию 3). Согласно [4] КЛМ Q разлагается в прямое произведение $Q = D \times C$, где D – делимая группа, C – редуцированная КЛМ. По [8] группа D разлагается в прямое произведение квазициклических групп. Группа автоморфизмов квазициклической группы изоморфна мультипликативной группе поля p -адических чисел $\sum_{n=-s}^{\infty} a_n p^n$, $0 \leq a_n < p$, у которых “свободный” член a_0 отличен от нуля [7]. Таких чисел существует несчетное множество. Поэтому $D = 1$. Согласно теореме 2 КЛМ C удовлетворяет условию минимальности. Тогда по лемме 5 КЛМ C конечна. Поэтому и КЛМ Q конечна, т.е. Q удовлетворяет условию 1). Далее, если КЛМ Q конечна, то группа M также конечна, а если Q периодическая, то и $\mathcal{M}$ периодическая. Тогда эквивалентность условий 1), 4), 5) – это следствие 6.2 из [12]. Этим следствие доказано.

Теперь, аналогично [12], при помощи теоретико-множественных свойств можем характеризовать класс КЛМ, удовлетворяющих условию минимальности для подлуп, и класс конечных КЛМ. Лупу, принадлежащую классу ω , назовем ω -лупой.

СЛЕДСТВИЕ 2. Через ω обозначим класс луп, удовлетворяющий условиям:

- 1) любая подлупа ω -лупы является ω -лупой;
- 2) любая ω -лупа счетна;
- 3) если Q является ω -лупой, то Q – периодическая лупа и любая периодическая группа автоморфизмов КЛМ Q принадлежит классу ω .

Тогда КЛМ Q удовлетворяет условию минимальности для подлуп, если и только если Q принадлежит классу ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Если КЛМ Q удовлетворяет условию минимальности, то согласно лемме 5 Q является прямым произведением конечного числа квазициклических групп и конечной КЛМ. Квазициклические группы счетны, поэтому КЛМ Q счетна. Выполнение условия 3) следует из теоремы 2.

Достаточность. Если A – ассоциативная КЛМ из класса ω , то по 3) она периодическая и ее периодическая группа автоморфизмов также принадлежит классу ω .

По условию 2) эта группа счетна. Тогда из эквивалентности условий 1) и 4) теоремы 2 следует, что A удовлетворяет условию минимальности. Отсюда при помощи условия 1) получаем, что если КЛМ Q принадлежит классу ω , то любая ее ассоциативная подгруппа удовлетворяет условию минимальности. Тогда по [5], [6] КЛМ Q удовлетворяет условию минимальности.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Через ω обозначим класс луп, удовлетворяющий условиям:*

- 1) *любая подлупа ω -лупы является ω -лупой;*
- 2) *любая ω -лупа счетна;*
- 3) *прямое произведение счетного числа ω -луп является ω -лупой;*
- 4) *группа автоморфизмов ω -лупы принадлежит классу ω .*

КЛМ Q будет конечной тогда и только тогда, когда она принадлежит классу ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть КЛМ Q удовлетворяет условиям 1)–4). Покажем, что она периодическая. Предположим противное. Тогда Q содержит бесконечную циклическую группу Z , которая является ω -лупой по 1). По 3) $F = Z \times Z$ является ω -лупой. Пусть $F = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. Определим автоморфизмы φ, ψ группы F по правилу

$$\varphi a = ab^2, \quad \varphi b = b, \quad \psi a = a, \quad \psi b = a^2b.$$

Согласно условию 4) группа $\Sigma = \langle \varphi, \psi \rangle$ принадлежит классу ω и по 1) ее коммутант Σ' также принадлежит классу ω . По определению группа Σ является свободной группой ранга 2. Хорошо известно, что тогда коммутант Σ' является свободной группой бесконечного ранга. Если L – множество свободных порождающих группы Σ' и S – непустое подмножество множества L , то существует единственный автоморфизм второго порядка, оставляющий на месте элементы множества S , и отображающий элемент множества $L \setminus S$ на обратный. Группа автоморфизмов, порожденная всеми автоморфизмами, полученными, когда S пробегает все подмножества множества L , принадлежит классу ω . Она не является счетной, что противоречит условию 2). Поэтому КЛМ Q является периодической, и ввиду условий 2), 4) и следствия 1 теоремы 2 она конечна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 2, Мир, М., 1977.
- [2] R. H. Bruck, *A Survey of Binary Systems*, Ergeb. Math. Grenzgeb. Neue Folge, **20**, Springer-Verlag, Berlin, 1958.
- [3] Н. И. Санду, “О центрально нильпотентных коммутативных лупах Муфанг”, *Квазигруппы и лупы*, Матем. исслед., **51**, Штиинца, Кишинев, 1979, 145–155.
- [4] N. I. Sandu, “The commutative Moufang loops with minimum conditions for subloops. I”, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, 2003, № 3, 25–40.
- [5] Н. И. Санду, “Коммутативные лупы Муфанг с конечными классами сопряженных подлуп”, *Матем. заметки*, **73**:2 (2003), 269–280.
- [6] N. I. Sandu, “The commutative Moufang loops with minimum conditions for subloops. II”, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, 2004, № 2, 33–48.
- [7] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, Наука, М., 1977.
- [8] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т. 1, Мир, М., 1974.
- [9] Ю. И. Мерзляков, “Матричное представление групп внешних автоморфизмов черниковских групп”, *Алгебра и логика*, **8**:4 (1969), 478–482.

- [10] Ю. И. Мерзляков, *Рациональные группы* Ч. 1. *Алгебраические группы матриц*, Новосибирск. гос. ун-т, Новосибирск, 1967.
- [11] С. Н. Черников, *Группы с заданными свойствами системы подгрупп*, Современная алгебра, Наука, М., 1980.
- [12] A. Schlette, “Artinian, almost abelian groups and their groups of automorphisms”, *Pacific J. Math.*, **29**:2 (1969), 403–425.
- [13] А. Мальцев, “Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами”, *Матем. сб.*, **8**:3 (1940), 405–422.

Н. Т. Лупашко

Тираспольский государственный университет, г. Кишинев

Н. И. Санду

Тираспольский государственный университет, г. Кишинев

E-mail: sandumn@yahoo.com

Поступило

03.10.2005

Исправленный вариант

04.10.2010