Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Х. Мусин, П. В. Федотова, Теорема типа Пэли–Винера для ультрараспределений, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 6, 894–914

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4414>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:51:37

Теорема типа Пэли–Винера для ультрараспределений

И. Х. Мусин, П. В. Федотова

С помощью преобразования Фурье–Лапласа функционалов дано описание пространств, сопряженных к пространствам быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на неограниченном замкнутом выпуклом множестве в $\mathbb{R}^n$.

Библиография: 15 названий.

1. Пространства основных функций и сопряженные к ним. Пусть C – открытый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале [1; с. 73], b – выпуклая непрерывная позитивно однородная степени 1 функция на $\overline{C}$ – замыкании C . Пара (b, C) определяет замкнутое выпуклое неограниченное множество

$$U(b, C) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -\langle \xi, y \rangle \leq b(y) \text{ для всех } y \in C\},$$

не содержащее целую прямую. Отметим, что внутренность $U(b, C)$ непуста и совпадает с множеством

$$V(b, C) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -\langle \xi, y \rangle < b(y) \text{ для всех } y \in \overline{C}\},$$

а замыкание $V(b, C)$ есть множество $U(b, C)$.

Пусть $M = (M_k)_{k=0}^\infty$ – неубывающая последовательность чисел M_k с $M_0 = 1$, удовлетворяющая условиям

i₁) $M_k^2 \leq M_{k-1}M_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$;

i₂) существуют числа $H_1 > 1$, $H_2 > 1$ такие, что $M_{k+1} \leq H_1 H_2^k M_k$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$;

i₃) существуют числа $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$ такие, что $M_k \geq Q_1 Q_2^k k!$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$.

Обозначая для краткости $U(b, C)$ через U , а $V(b, C)$ – через V , определим пространство $G_M(U)$ функций класса C^∞ на U следующим образом. Пусть $(\varepsilon_m)_{m=1}^\infty$ – любая убывающая к нулю последовательность положительных чисел ε_m . Для каждого $m \in \mathbb{N}$ введем пространство $G_m(U)$, состоящее из $C^\infty(U)$ -функций f , для которых конечны нормы

$$p_m(f) = \sup_{x \in V, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(x)|(1 + \|x\|)^m}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00417) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-10052.2006.1).

Положим

$$G_M(U) = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m(U).$$

С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $G_M(U)$ становится линейным пространством. Наделим $G_M(U)$ топологией проективного предела пространств $G_m(U)$.

Цель работы – описать сильное сопряженное пространство к пространству $G_M(U)$ в терминах преобразования Фурье–Лапласа функционалов.

Ранее эта задача изучалась Роевером [2] при дополнительных условиях на последовательность M : при некоторых $h > 0$ и $K > 0$

$$M_{p+q} \leq h^{p+q} M_p M_q, \quad p, q \in \mathbb{Z}_+, \quad (\text{M.2})$$

$$\sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{M_{q-1}}{M_q} \leq Kp \frac{M_p}{M_{p+1}}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (\text{M.3})$$

Заметим, что в этом случае последовательность M – неквазианалитическая. Кроме того, условие (M.2) влечет i_2), а (M.3) вкупе с логарифмической выпуклостью M – условие i_3).

В данной работе дается решение задачи в общей ситуации. При этом использовался подход из работы Тейлора [3], применение которого побудило к дополнительному изучению преобразования Фурье–Лапласа распределений медленного роста с носителем в $U(b, C)$.

Перед формулировкой результатов введем ряд определений и обозначений. Для $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$, $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$ полагаем $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_m v_m$, $\|u\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$.

Для локально выпуклого пространства X через X' обозначаем пространство линейных непрерывных функционалов на X , через X^* – сильное сопряженное пространство.

Если Γ – конус в $\mathbb{R}^m$, то $T_\Gamma = \mathbb{R}^m + i\Gamma$, $\Delta_\Gamma(y)$ – расстояние от точки $y \in \Gamma$ до границы Γ .

Пусть

$$\omega(r) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^k}{M_k} \quad \text{для } r > 0, \quad \omega(0) = 0.$$

Обозначим для краткости $\omega(r/\varepsilon_m)$ через $\omega_m(r)$, $r \geq 0$.

Через $H(\Omega)$ обозначаем совокупность функций, голоморфных на открытом множестве Ω в $\mathbb{C}^m$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим нормированные пространства

$$V_{b,m}(T_C) = \left\{ f \in H(T_C) : N_m(f) = \sup_{z \in T_C} \frac{|f(z)|e^{-b(y)}}{(1 + \|z\|)^m (1 + 1/\Delta_C(y))^m} < \infty \right\},$$

$$H_{b,m}(T_C) = \left\{ F \in H(T_C) : \|F\|_m = \sup_{z \in T_C} \frac{|F(z)|}{e^{b(y) + \omega_m(\|z\|)} (1 + 1/\Delta_C(y))^m} < \infty \right\},$$

где $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in C$. Пусть

$$H_{b,M}(T_C) = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_{b,m}(T_C), \quad V_b(T_C) = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_{b,m}(T_C).$$

С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $H_{b,M}(T_C)$ и $V_b(T_C)$ становятся линейными пространствами. Наделим $H_{b,M}(T_C)$ ($V_b(T_C)$) топологией индуктивного предела пространств $H_{b,m}(T_C)$ ($V_{b,m}(T_C)$).

Пусть $S(U)$ – пространство, состоящее из $C^\infty(U)$ -функций f таких, что для любого $p \in \mathbb{Z}_+$

$$\|f\|_{p,U} = \sup_{x \in V, |\alpha| \leq p} |(D^\alpha f)(x)|(1 + \|x\|)^p < \infty.$$

Пусть $S_p(U)$ – пополнение $S(U)$ по норме $\|\cdot\|_{p,U}$. В $S(U)$ введем топологию проективного предела пространств $S_p(U)$. Известно, что $S^*(U)$ топологически изоморфно пространству S_U^* обобщенных функций медленного роста с носителем в U (см. [4; с. 21]).

Преобразование Фурье–Лапласа функционала $\Phi \in S^*(U)$ ($\Phi \in G_M^*(U)$) определим по формуле

$$\hat{\Phi}(z) = (\Phi, e^{i\langle \xi, z \rangle}), \quad z \in T_C.$$

В данной заметке получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Преобразование Фурье–Лапласа $\mathcal{F}: S^*(U) \rightarrow V(T_C)$, задаваемое по правилу $\mathcal{F}(T) = \hat{T}$, – топологический изоморфизм.

Для случая, когда $b(y) = a\|y\|$ ($a \geq 0$), – это результат Владимирова [1; с. 170]. По существу в теореме 1 достаточно было показать лишь, что $\mathcal{F}$ – отображение “в”.

ТЕОРЕМА 2. Преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм пространств $G_M^*(U)$ и $H_{b,M}(T_C)$.

Доказательство теоремы 1 приведено в п. 2, а теоремы 2 – в п. 3.

В ситуации, рассмотренной Роевером, из его результатов [2; теоремы 2.21.ii, 2.24.ii] следует, что $G_M^*(U)$ топологически изоморфно проективному пределу пространств $H_{C_1,\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$, C_1 – конус, компактный в конусе C), где $H_{C_1,\varepsilon}$ есть индуктивный предел пространств

$$H_{C_1,\varepsilon}^{(m)} = \left\{ F \in H(T_C) : \|F\|_{C_1,\varepsilon}^{(m)} = \sup_{z \in T_{C_1}, \|y\| \geq \varepsilon} \frac{|F(z)|}{e^{b(y) + \omega_m(\|z\|)}} < \infty \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Определение пространств $G_M(U)$ и $H_{b,M}(T_C)$ не зависит от выбора последовательности $(\varepsilon_m)_{m=1}^\infty$. Считаем далее, что $\varepsilon_m = H_2^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$.

2. Описание пространства $S^*(U)$ в терминах преобразования Фурье–Лапласа. Пусть $\text{pr } C$ – пересечение C с единичной сферой,

$$C^* = \{\xi \in \mathbb{R}^m : \langle \xi, x \rangle \geq 0 \text{ для всех } x \in C\}$$

– конус, сопряженный к C . Для $r \geq 0$ пусть $B_r = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| \leq r\}$, $\tilde{B}_r$ – внешность шара B_r .

ЛЕММА 1. Для $y \in C$, $m \in \mathbb{N}$ пусть

$$g(\xi) = -\langle \xi, y \rangle + m \ln(1 + \|\xi\|), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда найдется число $d > 0$, не зависящее от y , такое, что

$$\sup_{\xi \in U} g(\xi) \leq b(y) + dm + 3m \ln \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)} \right) + 2m \ln(1 + \|y\|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу непрерывности и позитивной однородности b на $\overline{C}$ найдется число $r > e$ такое, что $b(y) \leq r\|y\|$ для $y \in \overline{C}$. Отсюда следует, что $U \subset C^* + B_r$. Найдется и число $R_0 > 0$ такое, что для всех $R > R_0$ множество $U_R = U \cap B_R$ непусто. Положим

$$\tilde{U}_R = U \setminus U_R, \quad T_R = (C^* + B_r) \cap B_R, \quad \tilde{T}_R = (C^* + B_r) \setminus T_R.$$

Пусть ξ_0 – произвольная точка из V . Покажем, что для каждого $y \in C$ найдется число $R_1 > R_0$ такое, что $\sup_{\xi \in \tilde{T}_{R_1}} g(\xi) < g(\xi_0)$. Отметим, что если

$$R > R_2 = \max\left(R_0, 2r + \frac{m}{\Delta_C(y)}\right),$$

то

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \tilde{T}_R} g(\xi) &\leq \sup_{\xi_1 \in C^* \cap \tilde{B}_{R-r}} g(\xi_1) + \sup_{\xi_2 \in B_r} g(\xi_2) \\ &= \sup_{\sigma \in \text{pr } C^*} \sup_{t > R-r} (-t\langle \sigma, y \rangle + m \ln(1+t)) + \sup_{\xi_2 \in B_r} g(\xi_2) \\ &\leq \sup_{\sigma \in \text{pr } C^*} (-(R-r)\langle \sigma, y \rangle) + m \ln(1+R-r) + r\|y\| + m \ln(1+r) \\ &= -(R-r)\Delta_C(y) + m \ln(1+R-r) + r\|y\| + m \ln(1+r). \end{aligned} \quad (1)$$

Покажем теперь, что для каждого $y \in C$ можно найти число $R_3 > 0$ так, что для $R \geq R_3$ будет выполнено неравенство

$$-(R-r)\Delta_C(y) + (2m + (r + \|\xi_0\|)\|y\|) \ln(1+R-r) < 0. \quad (2)$$

Тогда, тем более, будет справедливо неравенство

$$-(R-r)\Delta_C(y) + m \ln(1+R-r) + r\|y\| + m \ln(1+r) < g(\xi_0). \quad (3)$$

Отметим, что множество решений неравенства $x - \lambda \ln(1+x) > 0$ с параметром $\lambda > 1$ содержит интервал $[\lambda^2, \infty)$. В качестве λ возьмем число

$$\frac{2m + (r + \|\xi_0\|)\|y\|}{\Delta_C(y)}.$$

Поскольку $r > 1$, то $\lambda > 1$. Таким образом, неравенство (2) будет выполнено для всех

$$R \geq R_3 = r + \left(\frac{2m + (r + \|\xi_0\|)\|y\|}{\Delta_C(y)} \right)^2.$$

Положим теперь

$$R_1 = 3r + R_0 + \frac{m}{\Delta_C(y)} + \left(\frac{2m + (r + \|\xi_0\|)\|y\|}{\Delta_C(y)} \right)^2.$$

Тогда, из (1) и (3) следует, что $\sup_{\xi \in \tilde{U}_{R_1}} g(\xi) < g(\xi_0)$. Значит,

$$\sup_{\xi \in U} g(\xi) = \sup_{\xi \in U_{R_1}} g(\xi).$$

Таким образом, точка $\tilde{\xi}$, в которой достигается точная верхняя грань функции g на U , принадлежит U_{R_1} . Элементарные оценки показывают, что найдется постоянная $d > 0$, зависящая от r , R_0 , m и ξ_0 , такая, что

$$\ln(1 + \|\tilde{\xi}\|) \leq d + 3 \ln \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)} \right) + 2 \ln(1 + \|y\|).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in U} g(\xi) &= g(\tilde{\xi}) = -\langle \tilde{\xi}, y \rangle + m \ln(1 + \|\tilde{\xi}\|) \\ &\leq b(y) + dm + 3m \ln \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)} \right) + 2m \ln(1 + \|y\|). \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть Φ – произвольный функционал из $S^*(U)$. Хорошо известно, что функция $\hat{\Phi}$ голоморфна в T_C (см. [1], [2], [5]–[7]). Далее, найдутся числа $m \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ такие, что

$$|(\Phi, f)| \leq c \|f\|_{m,U}, \quad f \in S(U).$$

Полагая $f(\xi) = e^{i\langle \xi, z \rangle}$, где $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in C$, имеем

$$|\hat{\Phi}(z)| \leq c \sup_{\xi \in V, |\alpha| \leq m} |(iz)^\alpha e^{i\langle \xi, z \rangle}| (1 + \|\xi\|)^m \leq c(1 + \|z\|)^m e^{\sup_{\xi \in V} (-\langle \xi, y \rangle + m \ln(1 + \|\xi\|))}.$$

Воспользовавшись леммой 1, получаем

$$|\hat{\Phi}(z)| \leq c(1 + \|z\|)^{3m} e^{b(y) + dm} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)} \right)^{3m}, \quad z \in T_C.$$

Таким образом, отображение $\mathcal{F}$, ставящее каждому функционалу Φ из $S^*(U)$ его преобразование Фурье–Лапласа $\hat{\Phi}$, действует из $S^*(U)$ в $V_b(T_C)$.

Как известно, $S^*(U)$ (см., например, [4; с. 20]) есть индуктивный предел возрастающей последовательности банаховых пространств $S_p^*(U)$, где $S_p^*(U)$ – сильное сопряженное к пространству $S_p(U)$. Если $\Phi \in S_m^*(U)$, то

$$|(\Phi, f)| \leq \|\Phi\|_{-m,U} \|f\|_{m,U}, \quad f \in S(U),$$

где $\|\Phi\|_{-m,U}$ – норма функционала Φ в $S_m^*(U)$, $m \in \mathbb{N}$. Отсюда, пользуясь леммой 1, получаем

$$N_{3m}(\hat{\Phi}) \leq e^{dm} \|\Phi\|_{-m,U}.$$

Из этого неравенства следует непрерывность $\mathcal{F}$.

Доказательство биективности отображения $\mathcal{F}$, непрерывности $\mathcal{F}^{-1}$ – такое же, как в [1; с. 170–173]. Таким образом, $\mathcal{F}$ – изоморфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассуждения Роевера в конце работы [7] позволяют получить следующую оценку преобразования Фурье–Лапласа функционала $\Phi \in S^*(U)$. Пусть $\varepsilon > 0$, $\eta \in \text{pr } C$. Тогда найдутся числа $K_\varepsilon > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ (не зависящее от $\varepsilon > 0$) такие, что

$$|\hat{\Phi}(z)| \leq K_\varepsilon (1 + \|z\|)^m e^{b(y)}, \quad z = x + iy, \quad y \in \varepsilon\eta + C.$$

3. Пространство $G_M(U)$ и сопряженное к нему. Пользуясь теоремой Арцела–Асколи нетрудно показать, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ единичный шар пространства $G_{m+1}(U)$ относительно компактен в $G_m(U)$. Поэтому $G_M(U)$ – пространство (M^*) (о пространствах (M^*) см. [8], [9]).

В силу специального выбора последовательности $(\varepsilon_m)_{m=1}^\infty$ справедлива следующая лемма [10; лемма 2].

ЛЕММА 2. Для любых $m, p \in \mathbb{N}$ существует постоянная $c \geq 0$ такая, что

$$w_m(r) + p \ln(1+r) \leq w_{m+p}(r) + c, \quad r \geq 0.$$

Далее понадобится общий вид функционала из $G'_M(U)$. В связи с этим введем пространство $C_M(U)$ как проективный предел пространств

$$C_m(U) = \left\{ f \in C(U) : \tilde{p}_m(f) = \sup_{x \in U} |f(x)|(1 + \|x\|)^m < \infty \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

По стандартной схеме (см. [3; предложения 2.10, 2.11, следствие 2.12]) доказывается

ЛЕММА 3. Пусть функционал $T \in G'_M(U)$, числа $c > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ таковы, что

$$|(T, f)| \leq cp_m(f), \quad f \in G_M(U).$$

Тогда найдутся функционалы $T_\alpha \in C'_m(U)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, такие, что

$$|(T_\alpha, f)| \leq \frac{C \tilde{p}_m(f)}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}, \quad f \in C_m(U),$$

и имеет место представление

$$(T, f) = \sum_{|\alpha| \geq 0} (T_\alpha, D^\alpha f), \quad f \in G_M(U).$$

ЛЕММА 4. Пусть $S \in G'_M(U)$. Тогда $\widehat{S} \in H_{b,M}(T_C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим вначале, что для любого $z = x + iy \in T_C$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in C$, функция $f_z(\xi) = e^{i\langle \xi, z \rangle}$ принадлежит пространству $G_M(U)$. Действительно, для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p_m(f_z) &= \sup_{\xi \in V, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|(iz)^\alpha e^{i\langle \xi, z \rangle}| (1 + \|\xi\|)^m}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \\ &\leq \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\|z\|^{|\alpha|}}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \sup_{\xi \in V} e^{-\langle \xi, y \rangle + m \ln(1 + \|\xi\|)} = e^{\omega_m(\|z\|) + \sup_{\xi \in V} (-\langle \xi, y \rangle + m \ln(1 + \|\xi\|))}. \end{aligned}$$

Пользуясь леммами 1 и 2, получаем окончательную оценку

$$p_m(f_z) \leq A e^{b(y) + \omega_{3m}(\|z\|)} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)} \right)^{3m}, \quad (4)$$

где $A = e^{dm}$ не зависит от $z \in T_C$.

Пусть теперь $S \in G'_M(U)$. В силу выше написанного на T_C корректно определена функция $\widehat{S}(z) = (S, e^{i\langle \xi, z \rangle})$. Пользуясь леммами 1 и 3, условием i_3 , легко показать, что $\widehat{S} \in H(T_C)$. Далее, найдутся числа $m \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ такие, что $|(S, f)| \leq c p_m(f)$, $f \in G_M(U)$. Отсюда и из (4) получаем

$$|\widehat{S}(z)| \leq c A e^{b(y) + \omega_{3m}(\|z\|)} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m}.$$

Лемма 4 доказана.

Стандартные рассуждения с применением теоремы Монтеля и леммы 2 убеждают, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ вложения $j_m: H_{b,m}(T_C) \rightarrow H_{b,m+1}(T_C)$ вполне непрерывны. Это означает, что $H_{b,M}(T_C)$ – пространство (LN^*) (о пространствах (LN^*) см. [8], [9]).

При доказательстве леммы 5 и теоремы 2 понадобится следующий результат Роевера [2; теорема 3.1].

ТЕОРЕМА R. Пусть линейное подпространство в $\mathbb{C}^n$ размерности $n - k$ задано с помощью линейных функций $\theta_1 = s_1(\theta_{k+1}, \dots, \theta_n), \dots, \theta_k = s_k(\theta_{k+1}, \dots, \theta_n)$ или коротко $w = s(z)$, $w \in \mathbb{C}^k$, $z \in \mathbb{C}^{n-k}$.

Пусть $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega$ – области голоморфности в $\mathbb{C}^n$ такие, что при некотором $\varepsilon > 0$ ε -окрестность Ω_1 по первым k координатам в полукруговой метрике содержится в Ω_2 , т.е.

$$\{\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) : |\theta_j - \theta_j^0| \leq \varepsilon, j = 1, \dots, k, \\ \theta_j = \theta_j^0, j = k+1, \dots, n, \theta^0 = (\theta_1^0, \dots, \theta_n^0) \in \Omega_1\} \subset \Omega_2.$$

Пусть φ – плюрисубгармоническая функция на Ω , и для $\theta \in \Omega_1$ пусть

$$\varphi_\varepsilon(\theta) = \max\{\varphi(\theta_1 + \xi_1, \dots, \theta_n + \xi_n) : |\xi_j| \leq \varepsilon, j = 1, \dots, k\}.$$

Пусть

$$\Omega' = \{z \in \mathbb{C}^{n-k} : (s(z), z) \in \Omega\}, \quad \Omega'_j = \{z \in \mathbb{C}^{n-k} : (s(z), z) \in \Omega_j\}, \quad j = 1, 2.$$

Пусть $\tilde{\varphi}(z) = \varphi(s(z), z)$, $z \in \Omega'$.

Тогда для заданной функции f , аналитической в Ω' существует функция F , аналитическая в Ω_1 , такая, что $F(s(z), z) = f(z)$, $z \in \Omega'$, и при некотором $K > 0$, зависящем только от k и от $s_1, \dots, s_k$,

$$\int_{\Omega_1} \frac{F(\theta) \exp(-\varphi_\varepsilon(\theta))}{(1 + \|\theta\|^2)^{3k}} d\lambda_n(\theta) \leq K \varepsilon^{-2k} \int_{\Omega'_2} |f(z)|^2 e^{-\tilde{\varphi}(z)} d\lambda_{n-k}(\theta),$$

где λ_n, λ_{n-k} обозначают меру Лебега в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^{n-k}$ соответственно. Если правая часть последнего неравенства конечна, то F зависит от $f, \Omega_1, \varepsilon, \varphi$.

Обозначим через $d(\xi)$ расстояние от точки $\xi \in T_C$ до границы T_C .

ЛЕММА 5. Пусть функция $S \in H(\mathbb{C}^n \times T_C)$ при некотором $m \in \mathbb{N}$ на множестве $\mathbb{C}^n \times T_C$ удовлетворяет неравенству

$$|S(z, \xi)| \leq \exp\left(\omega_m(\|z\|) + b(\operatorname{Im} \xi) + m \ln(1 + \|\xi\|) + m \ln\left(1 + \frac{1}{d(\xi)}\right)\right),$$

и $S(\xi, \xi) = 0$, $\xi \in T_C$.

Тогда существуют функции $S_1, \dots, S_n \in H(\mathbb{C}^n \times T_C)$, числа $K > 0$ и $p \in \mathbb{N}$ такие, что для $(z, \xi) \in \mathbb{C}^n \times T_C$

а) выполнено

$$S(z, \xi) = \sum_{j=1}^n S_j(z, \xi)(z_j - \xi_j);$$

б) при любом $j = 1, \dots, n$

$$|S_j(z, \xi)| \leq K \exp \left(\omega_p(\|z\|) + b(\operatorname{Im} \xi) + p \ln \left(1 + \frac{1}{d(\xi)} \right) + p \ln \left(1 + \|\xi\| \right) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\varphi_j(\xi) = b(\operatorname{Im} \xi) + j \ln \left(\left(1 + \frac{1}{d(\xi)} \right) (1 + \|\xi\|) \right), \quad \xi \in T_C, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Введем плюрисубгармонические в $\mathbb{C}^k \times T_C$ функции

$$h_{l,k,j}(z_1, \dots, z_k, \xi) = \omega_l(\|(z_1 + \xi_1, \dots, z_k + \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)\|) + \varphi_j(\xi),$$

где $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$, $l, k, j \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функцию $L(z, \xi) = S(z + \xi, \xi)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\xi \in T_C$. По условию

$$|L(z, \xi)| \leq \exp(h_{m,n,m}(z, \xi)), \quad (z, \xi) \in \mathbb{C}^n \times T_C, \quad (5)$$

и $L(0, \xi) = S(\xi, \xi) = 0$ для $\xi \in T_C$.

Пусть $R > 0$ – произвольное число. Тогда найдется постоянная $C_{l,j,R} > 0$ такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$, $w, z \in \mathbb{C}^k$, $\xi, \zeta \in T_C$ таких, что

$$\|w - z\| \leq R \quad \text{и} \quad \|\xi - \zeta\| \leq \min \left(R, \frac{d(\zeta)}{4} \right),$$

справедлива оценка

$$|h_{l,k,j}(w, \xi) - h_{l,k,j}(z, \zeta)| \leq C_{l,j,R}. \quad (6)$$

Для доказательства неравенства (6) воспользуемся тем, что для всякого $m \in \mathbb{N}$ при некотором $K_m > 0$, см. [11], лемма 1, в доказательстве которой используются лишь условия i_1 , i_3)

$$|\omega_m(r_2) - \omega_m(r_1)| \leq K_m |r_2 - r_1|, \quad r_1, r_2 \geq 0. \quad (7)$$

Поэтому для точки (w, ξ) , удовлетворяющей нашему условию,

$$\begin{aligned} |h_{l,k,j}(w, \xi) - h_{l,k,j}(z, \zeta)| &\leq 2RK_l + rR + jR + j \left| \ln \left(1 + \frac{d(\xi) - d(\zeta)}{1 + d(\zeta)} \right) \right| \\ &\leq R(2K_l + r + j) + j \left| \frac{d(\xi) - d(\zeta)}{1 + d(\zeta)} \right| \\ &\leq R(2K_l + r + j) + \frac{j}{4} = C_{l,j,R}. \end{aligned}$$

Здесь r – из леммы 1. Итак, неравенство (6) установлено.

где $z \in \mathbb{C}^k$, $\zeta \in T_C$. В качестве ε в этой теореме возьмем 1. Пусть

$$\varphi_1^{(k)}(z_1, \dots, z_k, \zeta) = \max_{|\xi_k| \leq 1} \varphi^{(k)}(z_1, \dots, z_{k-1}, z_k + \xi_k, \zeta).$$

Далее, в обозначениях теоремы Роевера

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{(k)}(z_1, \dots, z_{k-1}, \zeta) &= \varphi^{(k)}(z_1, \dots, z_{k-1}, 0, \zeta) \\ &= 2[h_{m_{k-1}, k-1, m_{k-1}}(z_1, \dots, z_{k-1}, \zeta) \\ &\quad + 2(n+1) \ln(1 + \|(z_1, \dots, z_{k-1}, \zeta)\|)], \end{aligned}$$

где $z_1, \dots, z_{k-1} \in \mathbb{C}$, $\zeta \in T_C$. Ввиду оценки (9)

$$\int_{\mathbb{C}^{k-1} \times T_C} |\psi_j^{(k-1)}(z, \zeta)|^2 e^{-\tilde{\varphi}^{(k)}(z, \zeta)} d\lambda_{k-1+n}(z, \zeta) < \infty, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

По теореме Роевера существует функция $\psi_j^{(k)}$, где $j = 1, \dots, k-1$, голоморфная в $\mathbb{C}^k \times T_C$, такая, что

$$\psi_j^{(k)}(z_1, \dots, z_{k-1}, 0, \zeta) = \psi_j^{(k-1)}(z_1, \dots, z_{k-1}, \zeta), \quad z_1, \dots, z_{k-1} \in \mathbb{C}, \quad \zeta \in T_C,$$

и при некотором $K_j^{(k-1)} > 0$, не зависящем от $\psi_j^{(k-1)}$,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{C}^k \times T_C} \frac{|\psi_j^{(k)}(z_1, \dots, z_k, \zeta)|^2 e^{-\varphi_1^{(k)}(z_1, \dots, z_k, \zeta)}}{(1 + \|(z, \zeta)\|)^3} d\lambda_{n+k}(z, \zeta) \\ &\leq K_j^{(k-1)} \int_{\mathbb{C}^{k-1} \times T_C} |\psi_j^{(k-1)}(z_1, \dots, z_{k-1}, \zeta)|^2 e^{-\tilde{\varphi}^{(k)}(z_1, \dots, z_{k-1}, \zeta)} d\lambda_{n+k-1}(z, \zeta). \end{aligned}$$

Правую часть этого неравенства обозначим через $m_j^{(k)}$.

Для $R > 0$ и $\zeta \in \mathbb{C}^d$ пусть $B(\zeta, R) = \{z \in \mathbb{C}^d : \|z - \zeta\| < R\}$. Напомним, что если функция η плюрисубгармонична в области $\Omega \subset \mathbb{C}^d$, то

$$\eta(z) \leq \frac{1}{\sigma_d(R)} \int_{B(\zeta, R)} \eta(\xi) d\lambda_d(\xi),$$

где $\sigma_d(R) = \sigma_d(1)R^{2d}$ – объем шара радиуса R в $\mathbb{C}^d$, R достаточно мало.

Пусть $(z, \zeta) \in \mathbb{C}^k \times T_C$. Положим $R = \min(1, d(\zeta)/4)$. Воспользуемся вышеприведенным неравенством. Для плюрисубгармонической в $\mathbb{C}^k \times T_C$ функции $|\psi_j^{(k)}(z, \zeta)|$ имеем

$$\begin{aligned} |\psi_j^{(k)}(z, \zeta)| &\leq \frac{1}{\sigma_{n+k}(R)} \int_{B((z, \zeta), R)} |\psi_j^{(k)}(t, u)| d\lambda_{n+k}(t, u) \\ &\leq \frac{1}{\sigma_{n+k}(R)} \left(\int_{\mathbb{C}^k \times T_C} \frac{|\psi_j^{(k)}(t, u)|^2 e^{-\varphi_1^{(k)}(t, u)}}{(1 + \|(t, u)\|)^3} d\lambda_{n+k}(t, u) \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{B((z, \zeta), R)} (1 + \|(t, u)\|)^3 e^{\varphi_1^{(k)}(t, u)} d\lambda_{n+k}(t, u) \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sigma_{n+k}(R)} \sqrt{m_j^{(k)}} (2 + \|(z, \zeta)\|)^3 \left(\int_{B((z, \zeta), R)} e^{\varphi_1^{(k)}(t, u)} d\lambda_{n+k}(t, u) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Поскольку для любого $\xi_k \in \mathbb{C}$, удовлетворяющего условию $|\xi_k| \leq 1$, и для любого $(t, u) \in B((z, \zeta), R)$

$$|\varphi^{(k)}(t_1, \dots, t_{k-1}, t_k + \xi_k, u) - \varphi^{(k)}(z, \zeta)| \leq 2C_{m_{k-1}, m_{k-1}, 2} + 8(n+1),$$

то для $(z, \zeta) \in \mathbb{C}^k \times T_C$, $j = 1, \dots, k-1$

$$|\psi_j^{(k)}(z, \zeta)| \leq A_j^{(k)} \left(1 + \frac{1}{d(\zeta)}\right)^{n+k} (1 + \|(z, \zeta)\|)^3 e^{\varphi^{(k)}(z, \zeta)/2},$$

где

$$A_j^{(k)} = \frac{2^{2n+2k+3}}{\sqrt{\sigma_{n+k}(1)}} e^{C_{m_{k-1}, m_{k-1}, 2+4(n+1)}} \sqrt{m_j^{(k)}}.$$

То есть,

$$\begin{aligned} |\psi_j^{(k)}(z, \zeta)| &\leq A_j^{(k)} \left(1 + \frac{1}{d(\zeta)}\right)^{n+k} (1 + \|(z, \zeta)\|)^{2n+5} e^{h_{m_{k-1}, k, m_{k-1}}(z, \zeta)} \\ &= A_j^{(k)} \exp(\omega_{m_{k-1}}(\|(z_1 + \zeta_1, \dots, z_k + \zeta_k, \zeta_{k+1}, \dots, \zeta_n)\|) + b(\operatorname{Im} \zeta)) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{d(\zeta)}\right)^{m_{k-1}+n+k} (1 + \|(z, \zeta)\|)^{2n+5} (1 + \|\zeta\|)^{m_{k-1}}. \end{aligned}$$

Поскольку для произвольных $z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\|(z, \zeta)\| \leq \|(z_1 + \zeta_1, \dots, z_k + \zeta_k, \zeta_{k+1}, \dots, \zeta_n)\| + 2\|\zeta\|,$$

то

$$\begin{aligned} |\psi_j^{(k)}(z, \zeta)| &\leq B_j^{(k)} (1 + \|(z_1 + \zeta_1, \dots, z_k + \zeta_k, \zeta_{k+1}, \dots, \zeta_n)\|)^{2n+5} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{d(\zeta)}\right)^{m_{k-1}+n+k} (1 + \|\zeta\|)^{m_{k-1}+2n+5} \\ &\quad \times \exp(\omega_{m_{k-1}}(\|(z_1 + \zeta_1, \dots, z_k + \zeta_k, \zeta_{k+1}, \dots, \zeta_n)\|) + b(\operatorname{Im} \zeta)), \end{aligned}$$

где $B_j^{(k)} = A_j^{(k)} 2^{2n+5}$. Положим $\tilde{m}_k = 2n + 5 + m_{k-1}$. Пользуясь леммой 2, найдем постоянную $C_j^{(k)} > 0$ такую, что для $(z, \zeta) \in \mathbb{C}^k \times T_C$

$$|\psi_j^{(k)}(z, \zeta)| \leq C_j^{(k)} e^{h_{\tilde{m}_k, k, \tilde{m}_k}(z, \zeta)}, \quad j = 1, \dots, k-1. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$V_k(z, \zeta) = L_k(z, \zeta) - \psi_1^{(k)}(z, \zeta)z_1 - \dots - \psi_{k-1}^{(k)}(z, \zeta)z_{k-1}, \quad z \in \mathbb{C}^k, \quad \zeta \in T_C.$$

Отметим, что для $z_1, \dots, z_{k-1} \in \mathbb{C}$, $\zeta \in T_C$ $V_k(z_1, \dots, z_{k-1}, 0, \zeta) = 0$. Поэтому функция

$$\psi_k^{(k)}(z, \zeta) = \frac{V_k(z, \zeta)}{z_k} \in H(\mathbb{C}^k \times T_C).$$

Проводя элементарные оценки и пользуясь неравенствами (8), (10) и леммой 2, получаем

$$|V_k(z, \zeta)| \leq C_k^{(k)} e^{h_{\tilde{m}_k+1, k, \tilde{m}_k+1}(z, \zeta)}, \quad (z, \zeta) \in \mathbb{C}^k \times T_C,$$

где $C_k^{(k)}$ – некоторая постоянная. Положим $m_k = \tilde{m}_k + 1$. Действуя точно таким же образом, как и при оценивании $|\psi_1^{(1)}(z_1, \zeta)|$, получим при некотором $C_k^{(k)} > 0$

$$|\psi_k^{(k)}(z, \zeta)| \leq \tilde{C}_k^{(k)} e^{h_{m_k, k, m_k}(z, \zeta)}, \quad z \in \mathbb{C}^k, \quad \zeta \in T_C.$$

Итак,

$$L_k(z, \zeta) = \psi_1^{(1)}(z, \zeta)z_1 + \cdots + \psi_k^{(k)}(z, \zeta)z_k, \quad z \in \mathbb{C}^k, \quad \zeta \in T_C,$$

причем существуют числа $A_k > 0$, $m_k \in \mathbb{N}$ такие, что для $j = 1, \dots, k$

$$|\psi_j^{(k)}(z, \zeta)| \leq A_k e^{h_{m_k, k, m_k}(z, \zeta)}, \quad z \in \mathbb{C}^k, \quad \zeta \in T_C.$$

При $k = n$ получаем

$$L_n(z, \zeta) = L(z, \zeta) = \psi_1^{(n)}(z, \zeta)z_1 + \cdots + \psi_n^{(n)}(z, \zeta)z_n,$$

причем для $j = 1, \dots, n$

$$|\psi_j^{(n)}(z, \zeta)| \leq A_n \exp(h_{m_n, n, m_n}(z, \zeta)), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad \zeta \in T_C.$$

Отсюда для $u \in \mathbb{C}^n$, $\zeta \in T_C$

$$S(u, \zeta) = \psi_1^{(n)}(u - \zeta, \zeta)(u_1 - \zeta_1) + \cdots + \psi_n^{(n)}(u - \zeta, \zeta)(u_n - \zeta_n).$$

Положим

$$S_j(u, \zeta) = \psi_j^{(n)}(u - \zeta, \zeta), \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда $S_j \in H(\mathbb{C}^n \times T_C)$, для $u \in \mathbb{C}^n$, $\zeta \in T_C$

$$S(u, \zeta) = \sum_{j=1}^n S_j(u, \zeta)(u_j - \zeta_j)$$

и, полагая $p = m_n$, $K = A_n$, имеем

$$|S_j(u, \zeta)| \leq K \exp\left(\omega_p(\|u\|) + b(\operatorname{Im} \zeta) + p \ln\left(1 + \frac{1}{d(\zeta)}\right) + p \ln(1 + \|\zeta\|)\right).$$

Лемма 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. По лемме 4 линейное отображение

$$L: S \in G_M^*(U) \rightarrow \hat{S}$$

действует из $G_M^*(U)$ в $H_{b, M}(T_C)$.

Прежде чем показать непрерывность L , заметим, что топология пространства $G_M^*(U)$ может быть описана следующим образом.

Пусть

$$W_k = \{f \in G_M(U) : p_k(f) \leq 1\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Гомотетические образы множеств W_k – множества вида

$$\{f \in G_M(U) : p_k(f) \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

– образуют базис окрестностей в $G_M(U)$. Пусть

$$W_k^0 = \{F \in G'_M(U) : |(F, f)| \leq 1 \text{ для всех } f \in W_k\}$$

– поляра в $G'_M(U)$ окрестности W_k . Пусть $E_k = \bigcup_{\alpha > 0} (\alpha W_k^0)$ – векторное подпространство в $G'_M(U)$, порожденное полярой W_k^0 , $k = 1, 2, \dots$. Наделим E_k топологией, введя в E_k норму

$$q_k(F) = \sup_{f \in W_k} |(F, f)|, \quad F \in E_k.$$

Заметим, что $G'_M(U) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Определим в $G'_M(U)$ топологию λ внутреннего индуктивного предела пространств E_k . Поскольку $G_M(U)$ – пространство (M^*) , то $G_M(U)$ – монтелевское, а значит, и рефлексивное пространство. Но тогда сильная топология в $G'_M(U)$ совпадает с топологией λ [12; с. 699–700].

Пусть теперь $S \in E_m$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $|(S, f)| \leq q_m(S)$ для всех $f \in W_m$. Отсюда следует, что $|(S, f)| \leq q_m(S)p_m(f)$, $f \in G_M(U)$. Полагая в последнем неравенстве $f(\xi) = \exp(i\langle \xi, z \rangle)$, где $z \in T_C$, и пользуясь (4), получаем

$$|\widehat{S}(z)| \leq q_m(S) A e^{b(y) + \omega_{3m}(\|z\|)} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m},$$

где постоянная $A > 0$ не зависит от $z \in T_C$. Отсюда следует, что $\|\widehat{S}\|_{3m} \leq A q_m(S)$, $S \in E_m$, $m = 1, 2, \dots$. А это неравенство означает, что L непрерывно.

Докажем биективность отображения L , действуя по схеме из [3].

Покажем вначале, что L – отображение “на”. Пусть $F \in H_{b,M}(T_C)$, т.е. $F \in H(T_C)$ и при некоторых $c > 0$, $m \in \mathbb{N}$ функция F удовлетворяет оценке

$$|F(z)| \leq c e^{b(y) + \omega_m(\|z\|)} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^m. \quad (11)$$

Покажем, что найдется функционал $T \in G'_M(U)$ такой, что $\widehat{T} = F$. Напомним, что через $d(z)$ обозначаем расстояние от $z = x + iy \in T_C$ до границы T_C . Отметим, что $d(z) = \Delta_C(y)$. Тогда из (11) имеем

$$\int_{T_C} |F(z)|^2 e^{-2(b(y) + \omega_m(\|z\|) + m \ln(1 + 1/d(z)) + (n+1) \ln(1 + \|z\|^2))} d\lambda_n(z) < \infty. \quad (12)$$

Пусть $K = \mathbb{R}^n \times C$. Положим в теореме R (с заменой n на $2n$) $\Omega = \Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}^{2n} + iK$. Заметим, что $\Omega = \Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{C}^n \times T_C$. Так как K – выпуклая область в $\mathbb{R}^{2n}$, то $\mathbb{R}^{2n} + iK$ – область голоморфности. В качестве линейного подпространства в этой теореме рассмотрим подпространство W в $\mathbb{C}^{2n}$:

$$W = \{(z, \xi) \in \mathbb{C}^{2n} : z_1 = \xi_1, \dots, z_n = \xi_n\}$$

комплексной размерности n . Тогда

$$\Omega' = \Omega'_1 = \Omega'_2 = \{z \in \mathbb{C}^n : (z, z) \in \Omega = \mathbb{C}^n \times T_C\} = T_C.$$

Далее, в теореме R в качестве ε возьмем 1, а в качестве φ – функцию

$$\varphi(z, \xi) = 2 \left(b(\operatorname{Im} \xi) + \omega_m(\|z\|) + m \ln \left(1 + \frac{1}{d(\xi)} \right) + (n+1) \ln(1 + \|(z, \xi)\|^2) \right),$$

где $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$, $\xi \in T_C$. Отметим, что $\varphi(z, \xi)$ плюрисубгармонична в $\mathbb{C}^n \times T_C$ и

$$\tilde{\varphi}(z) = 2 \left(b(y) + \omega_m(\|z\|) + m \ln \left(1 + \frac{1}{d(z)} \right) + (n+1) \ln(1 + 2\|z\|^2) \right), \quad z \in T_C.$$

Ввиду (12) $\int_{T_C} |F(z)|^2 e^{-\tilde{\varphi}(z)} d\lambda_n(z) < \infty$. По теореме Роевера существует функция $\Phi \in H(\mathbb{C}^n \times T_C)$ такая, что $\Phi(z, z) = F(z)$ для $z \in T_C$ и при некотором $B > 0$

$$\int_{\mathbb{C}^n \times T_C} \frac{|\Phi(z, \xi)|^2 e^{-\varphi_1(z, \xi)}}{(1 + \|(z, \xi)\|)^{3n}} d\lambda_{2n}(z, \xi) \leq B \int_{T_C} |F(z)|^2 e^{-\tilde{\varphi}(z)} d\lambda_n(z).$$

Здесь

$$\varphi_1(z, \xi) = \max_{|t_1| \leq 1, \dots, |t_n| \leq 1} \varphi(z_1 + t_1, \dots, z_n + t_n, \xi_1, \dots, \xi_n).$$

Пользуясь неравенством (7) и неравенством

$$|\ln(1 + x_2^2) - \ln(1 + x_1^2)| \leq |x_2 - x_1|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

подобно тому, как это было проделано при доказательстве леммы 5 (об этой стандартной технике см., например, [13; с. 205]), переходим от интегральных оценок к равномерным:

$$|\Phi(z, \xi)| \leq c_1 (1 + \|(z, \xi)\|)^{3n} \left(1 + \frac{1}{d(\xi)} \right)^{2n} \exp \left(\frac{\varphi(z, \xi)}{2} \right), \quad (z, \xi) \in \mathbb{C}^n \times T_C,$$

где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная. Таким образом, для $(z, \xi) \in \mathbb{C}^n \times T_C$

$$|\Phi(z, \xi)| \leq c_1 (1 + \|(z, \xi)\|)^{5n+2} \left(1 + \frac{1}{d(\xi)} \right)^{m+2n} e^{b(\operatorname{Im} \xi) + \omega_m(\|z\|)}. \quad (13)$$

Так как $\Phi(z, \xi)$ – целая по z функция, то разлагая $\Phi(z, \xi)$ по степеням z , имеем

$$\Phi(z, \xi) = \sum_{|\alpha| \geq 0} C_\alpha(\xi) z^\alpha, \quad \xi \in T_C, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

По формуле Коши

$$C_\alpha(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|z_1|=R} \dots \int_{|z_n|=R} \frac{\Phi(z, \xi)}{z_1^{\alpha_1+1} \dots z_n^{\alpha_n+1}} dz_1 \dots dz_n,$$

где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $R > 0$ – любое. Отсюда следует, что $C_\alpha \in H(T_C)$. Воспользовавшись (13), имеем для $\xi \in T_C$

$$|C_\alpha(\xi)| \leq \frac{c_1 (1 + \sqrt{n} R)^{5n+2} (1 + \|\xi\|)^{5n+2} e^{b(\operatorname{Im} \xi) + \omega_m(\sqrt{n} R)} (1 + 1/d(\xi))^{m+2n}}{R^{|\alpha|}}.$$

Пользуясь леммой 2, найдем постоянную $c_2 > 0$ такую, что для любого $R > 0$

$$|C_\alpha(\xi)| \leq c_2 \frac{e^{\omega_{m+5n+2}(\sqrt{n} R)}}{R^{|\alpha|}} e^{b(\operatorname{Im} \xi)} (1 + \|\xi\|)^{5n+2} \left(1 + \frac{1}{d(\xi)} \right)^{m+2n}, \quad \xi \in T_C.$$

Следовательно, для $\xi \in T_C$

$$|C_\alpha(\xi)| \leq c_2 \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_{m+5n+2}} \right)^{|\alpha|} \left(\inf_{R>0} \frac{e^{\omega(R)}}{R^{|\alpha|}} \right) e^{b(\operatorname{Im} \xi)} (1 + \|\xi\|)^{5n+2} \left(1 + \frac{1}{d(\xi)} \right)^{m+2n}.$$

Так как (см. [14; гл. 1, п. 8])

$$\inf_{R>0} \frac{e^{\omega(r)}}{r^k} = \frac{1}{M_k}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

то для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\xi \in T_C$ справедлива оценка

$$|C_\alpha(\xi)| \leq c_2 \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_{m+5n+2}} \right)^{|\alpha|} \frac{e^{b(\operatorname{Im} \xi)}}{M_{|\alpha|}} (1 + \|\xi\|)^{5n+2} \left(1 + \frac{1}{d(\xi)} \right)^{m+2n}. \quad (14)$$

Таким образом, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ $C_\alpha \in V(T_C)$. По теореме 1 найдутся функционалы $S_\alpha \in S^*(U)$ такие, что $\widehat{S}_\alpha = C_\alpha$.

Из (14) и свойств пространств (LN^*) следует, что множество

$$\{M_{|\alpha|}(\varepsilon_{m+5n+2}/\sqrt{n})^{|\alpha|} C_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$$

ограничено в $V(T_C)$. Но тогда ввиду топологического изоморфизма пространств $S^*(U)$ и $V(T_C)$ множество

$$\mathcal{A} = \{M_{|\alpha|}(\varepsilon_{m+5n+2}/\sqrt{n})^{|\alpha|} S_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$$

ограничено в $S^*(U)$, а значит, и слабо ограничено. По теореме Шварца [1; с. 93] найдутся числа $c_3 > 0$ и $p \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|(F, f)| \leq c_3 \|\varphi\|_{p,U}, \quad F \in \mathcal{A}, \quad f \in S(U).$$

Итак, для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $f \in S(U)$

$$|(S_\alpha, f)| \leq c_3 \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_{m+5n+2}} \right)^{|\alpha|} \frac{\|f\|_{p,U}}{M_{|\alpha|}}. \quad (15)$$

Определим функционал T на $G_M(U)$ по правилу

$$(T, f) = \sum_{|\alpha| \geq 0} (S_\alpha, (-i)^{|\alpha|} D^\alpha f), \quad f \in G_M(U). \quad (16)$$

Покажем, что он корректно определен. Пользуясь (15), имеем для любых $f \in G_M(U)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |(S_\alpha, D^\alpha f)| &\leq c_3 \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_{m+5n+2}} \right)^{|\alpha|} \frac{1}{M_{|\alpha|}} \sup_{x \in U, |\beta| \leq p} |(D^{\alpha+\beta} f)(x)| (1 + \|x\|)^p \\ &\leq c_3 \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_{m+5n+2}} \right)^{|\alpha|} \frac{1}{M_{|\alpha|}} \sup_{x \in U, |\beta| \leq p} \frac{p_s(f) \varepsilon_s^{|\alpha|+|\beta|} M_{|\alpha|+|\beta|} (1 + \|x\|)^p}{(1 + \|x\|)^s}. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что $M_{k+s} \leq H_1^s H_2^{(k+s)s} M_k$, $k, s \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для $s \geq p$

$$\begin{aligned} |(S_\alpha, D^\alpha f)| &\leq c_3 \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_{m+5n+2}} \right)^{|\alpha|} \frac{p_s(f)}{M_{|\alpha|}} \sup_{x \in U, |\beta| \leq p} \frac{\varepsilon_s^{|\alpha|+|\beta|} H_1^{|\beta|} H_2^{(|\alpha|+|\beta|)|\beta|} M_{|\alpha|}}{(1 + \|x\|)^{s-p}} \\ &\leq c_3 \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_{m+5n+2}} \right)^{|\alpha|} H_1^p p_s(f) \varepsilon_s^{|\alpha|} h_2^{p^2} H_2^{p|\alpha|} = c_3 H_1^p H_2^{p^2} \left(\frac{\sqrt{n} \varepsilon_s H_2^p}{\varepsilon_{m+5n+2}} \right)^{|\alpha|} p_s(f). \end{aligned}$$

Выберем теперь s настолько большим, что $\sqrt{n} \varepsilon_s H_2^p / \varepsilon_{m+5n+2} = q_s < 1$. Итак, для любых $f \in G_M(U)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|(S_\alpha, D^\alpha f)| \leq c_4 q_s^{|\alpha|} p_s(f), \quad \text{где } c_4 = c_3 H_1^p H_2^{p^2}.$$

Отсюда следует, что ряд в правой части в (16) сходится. Причем,

$$|(T, f)| \leq \frac{c_4}{(1 - q)^n} p_s(f), \quad f \in G_M(U).$$

Следовательно, линейный функционал T корректно определен и непрерывен. Кроме того $\hat{T} = F$. Действительно,

$$\begin{aligned} \hat{T}(z) &= \sum_{|\alpha| \leq 0} (S_\alpha, (-i)^{|\alpha|} D^\alpha (e^{i\langle \xi, z \rangle})) = \sum_{|\alpha| \leq 0} (S_\alpha, (-i)^{|\alpha|} (iz)^\alpha (e^{i\langle \xi, z \rangle})) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq 0} z^\alpha (S_\alpha, (e^{i\langle \xi, z \rangle})) = \sum_{|\alpha| \leq 0} C_\alpha(z) z^\alpha = \Phi(z, z) = F(z). \end{aligned}$$

Таким образом, отображение L сюръективно.

Покажем, что отображение L инъективно. Пусть для $T \in G'_M(U)$ $\hat{T} \equiv 0$. Покажем, что T – нулевой функционал. Найдутся числа $m \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ такие, что $|(T, f)| \leq c p_m(f)$, $f \in G_M(U)$. По лемме 3 найдутся функционалы $T_\alpha \in C'_m(U)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, такие, что

$$\begin{aligned} (T, f) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} (T_\alpha, D^\alpha f), \quad f \in G_M(U), \\ |(T_\alpha, g)| &\leq \frac{c}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \tilde{p}_m(g), \quad g \in C_m(U). \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда для любого $z \in T_C$

$$\hat{T}(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} (T_\alpha, (iz)^\alpha e^{i\langle \xi, z \rangle}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} i^{|\alpha|} (T_\alpha, e^{i\langle \xi, z \rangle}) z^\alpha.$$

Пусть $V_\alpha(z) = i^{|\alpha|} (T_\alpha, e^{i\langle \xi, z \rangle})$. Очевидно $V_\alpha \in H(T_C)$. Пользуясь (17) и леммой 1, получаем оценку

$$|V_\alpha(z)| \leq \frac{\mu_m}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} (1 + \|z\|)^{2m} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)} \right)^{3m} e^{b(y)}, \quad (18)$$

где постоянная $\mu_m > 0$ не зависит от $z = x + iy \in T_C$. Рассмотрим функцию

$$S(u, z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} V_\alpha(z) u^\alpha, \quad z \in T_C, \quad u \in \mathbb{C}^n.$$

Имеем, пользуясь (18),

$$\begin{aligned}
 |S(u, z)| &\leq \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\mu_m \|u\|^{|\alpha|}}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} (1 + \|z\|)^{2m} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m} e^{b(y)} \\
 &= \mu_m \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m} e^{b(y)} \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\|u\|^{|\alpha|}}{\varepsilon_{m+1}^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\varepsilon_m}\right)^{|\alpha|} \\
 &\leq \mu_m e^{b(y)} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m} \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\|u\|^{|\alpha|}}{\varepsilon_{m+1}^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \sum_{|\alpha| \geq 0} \left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\varepsilon_m}\right)^{|\alpha|} \\
 &\leq \mu_m e^{b(y)} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m} e^{\omega_{m+1}(\|u\|)} \left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}}\right)^n.
 \end{aligned}$$

Отметим, что $S(z, z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} V_\alpha(z) z^\alpha = 0$ для всех $z \in T_C$. Тогда по лемме 5 найдутся функции $S_1, \dots, S_n \in H(\mathbb{C}^n \times T_C)$ такие, что $S(z, \zeta) = \sum_{j=1}^n S_j(z, \zeta)(z_j - \zeta_j)$ для $z \in \mathbb{C}^n$, $\zeta \in T_C$ и при некоторых $D > 0$ и $p \in \mathbb{N}$ для любых $j = 1, 2, \dots, n$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\zeta \in T_C$

$$|S_j(z, \zeta)| \leq D \exp\left(\omega_p(\|z\|) + b(\operatorname{Im} \zeta) + p \ln\left(1 + \frac{1}{d(\zeta)}\right) + p \ln(1 + \|\zeta\|)\right). \quad (19)$$

Разложим S_j в ряд Тейлора по степеням z :

$$S_j(z, \zeta) = \sum_{|\alpha| \geq 0} S_{j,\alpha}(\zeta) z^\alpha, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad \zeta \in T_C.$$

Из (19) по формуле Коши для коэффициентов степенного ряда

$$\begin{aligned}
 |S_{j,\alpha}(\zeta)| &\leq \inf_{R>0} \frac{\max_{|z_1|=R, \dots, |z_n|=R} |S_j(z, \zeta)|}{R^{|\alpha|}} \\
 &\leq \inf_{R>0} \frac{D \exp(\omega_p(\sqrt{n}R)) \exp(b(\operatorname{Im} \zeta) + p \ln(1 + 1/d(\zeta)) + p \ln(1 + \|\zeta\|))}{R^{|\alpha|}} \\
 &= D \exp\left(b(\operatorname{Im} \zeta) + p \ln\left(1 + \frac{1}{d(\zeta)}\right) + p \ln(1 + \|\zeta\|)\right) \inf_{R>0} \frac{e^{\omega(R)} \sqrt{n}^{|\alpha|}}{(R \varepsilon_p)^{|\alpha|}} \\
 &= D \exp\left(b(\operatorname{Im} \zeta) + p \ln\left(1 + \frac{1}{d(\zeta)}\right) + p \ln(1 + \|\zeta\|)\right) \frac{1}{M_{|\alpha|}} \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_p}\right)^{|\alpha|}.
 \end{aligned}$$

Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, что $\varepsilon_k \sqrt{n} < \varepsilon_p$. Тогда

$$|S_{j,\alpha}(\zeta)| \leq \frac{D \exp(b(\operatorname{Im} \zeta) + p \ln(1 + 1/d(\zeta)) + p \ln(1 + \|\zeta\|))}{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}, \quad \zeta \in T_C. \quad (20)$$

Поскольку преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между пространствами $S^*(U)$ и $V(T_C)$, найдутся функционалы $\psi_{j,\alpha} \in S^*(U)$ такие, что $\hat{\psi}_{j,\alpha} = S_{j,\alpha}$. Из (20) следует, что множество $\{S_{j,\alpha} \varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в $V(T_C)$. Но тогда множество

$$\Psi = \{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \psi_{j,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, j=1, \dots, n}$$

ограничено в $S^*(U)$, а значит, и слабо ограничено. По теореме Шварца [1; с. 93] найдутся числа $c_4 > 0$ и $p \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|(F, \varphi)| \leq c_4 \|\varphi\|_{p,U}, \quad F \in \Psi, \quad \varphi \in S(U).$$

Таким образом, для всех $j = 1, \dots, n$, для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|(\Psi_{j,\alpha}, f)| \leq \frac{c_4}{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \|f\|_{p,U}, \quad f \in S(U). \quad (21)$$

Для $j = 1, \dots, n$ и $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ хотя бы с одной отрицательной компонентой пусть $\Psi_{j,\alpha}$ – нулевой функционал из $S^*(U)$ и $S_{j,\alpha}(z) = 0$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} S(z, \zeta) &= \sum_{j=1}^n S_j(z, \zeta)(z_j - \zeta_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha| \geq 0} S_{j,\alpha}(\zeta) z^\alpha (z_j - \zeta_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha| \geq 0} S_{j,\alpha}(\zeta) z_1^{\alpha_1} \dots z_j^{\alpha_j+1} \dots z_n^{\alpha_n} - \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha| \geq 0} S_{j,\alpha}(\zeta) z^\alpha \zeta_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha| \geq 0} (S_{j,(\alpha_1, \dots, \alpha_j-1, \dots, \alpha_n)}(\zeta) - S_{j,\alpha}(\zeta) \zeta_j) z^\alpha, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad \zeta \in T_C. \end{aligned}$$

Учитывая, что $S(z, \zeta) = \sum V_\alpha(\zeta) z^\alpha$ для всех $\zeta \in T_C$, $z \in \mathbb{C}^n$, имеем для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$V_\alpha(\zeta) = \sum_{j=1}^n (S_{j,(\alpha_1, \dots, \alpha_j-1, \dots, \alpha_n)}(\zeta) - S_{j,\alpha}(\zeta) \zeta_j). \quad (22)$$

Правая часть в (22) может быть представлена в виде

$$\sum_{j=1}^n \widehat{\Psi}_{j,(\alpha_1, \dots, \alpha_j-1, \dots, \alpha_n)}(\zeta) + i \left(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} (e^{i\langle \xi, \zeta \rangle}) \right).$$

То есть, правая часть – преобразование Фурье–Лапласа функционала, действующего по правилу

$$f \in S(U) \rightarrow \sum_{j=1}^n (\Psi_{j,(\alpha_1, \dots, \alpha_j-1, \dots, \alpha_n)}, f) + i \left(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} f \right).$$

Значит,

$$(T_\alpha, f) = (-i)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^n i \left(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} f \right) + (\Psi_{j,(\alpha_1, \dots, \alpha_j-1, \dots, \alpha_n)}, f).$$

Таким образом, для $f \in G_M(U)$

$$\begin{aligned} (T, f) &= \sum_{|\alpha| \geq 0} (T_\alpha, D^\alpha f) \\ &= \sum_{|\alpha| \geq 0} (-i)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^n i \left(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha f \right) + (\Psi_{j,(\alpha_1, \dots, \alpha_j-1, \dots, \alpha_n)}, D^\alpha f). \end{aligned}$$

Для произвольного $N \in \mathbb{N}$ определим множества

$$B_N = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n : \alpha_1 \leq N, \dots, \alpha_n \leq N\},$$

$$R_{N,j} = \{\alpha_1 \leq N, \dots, \alpha_j = N, \dots, \alpha_n \leq N, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

и функционал T_N на $G_M(U)$ по правилу

$$(T_N, f) = \sum_{\alpha \in B_N} (-i)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^n i \left(\Psi_{j,\alpha}, \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha f \right) (\xi) \right) + (\Psi_{j,(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \dots, \alpha_n)}, D^\alpha f).$$

Тогда

$$(T, f) = \lim_{N \rightarrow \infty} (T_N, f), \quad f \in G_M(U).$$

Из представления

$$(T_N, f) = \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha \in B_N} (-i)^{|\alpha|} i \left(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha f \right) + \sum_{\beta \in B_N} (-i)^{|\beta|} (\Psi_{j,(\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \dots, \beta_n)}, D^\beta f)$$

видно, что для фиксированного $j \in \{1, \dots, n\}$ слагаемые, соответствующие мультииндексу α с $\alpha_1 \leq N, \dots, \alpha_j \leq N-1, \dots, \alpha_n \leq N$, и слагаемые, соответствующие мультииндексу $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ с $\beta_1 = \alpha_1, \dots, \beta_j = \alpha_j + 1, \dots, \beta_n = \alpha_n$, взаимно уничтожают друг друга. Поэтому

$$(T_N, f) = \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha \in R_{N,j}} (-i)^{|\alpha|} i \left(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha f \right), \quad f \in G_M(U).$$

Далее, принимая во внимание (21), для всех $f \in G_M(U)$

$$\begin{aligned} |(T_N, f)| &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha \in R_{N,j}} \left| \left(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha f \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha \in R_{N,j}} \frac{c_4}{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \sup_{\xi \in U, |\gamma| \leq p} \left(\left| D^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha f \right) (\xi) \right| (1 + \|\xi\|)^p \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha \in R_{N,j}} \frac{c_4}{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \sup_{\xi \in U, |\gamma| \leq p} (|(D^{(\alpha_1 + \gamma_1, \dots, \alpha_j + \gamma_j + 1, \dots, \alpha_n + \gamma_n)} f)(\xi)| (1 + \|\xi\|)^p). \end{aligned}$$

Выберем натуральное $s > k$ так, что $q = \varepsilon_s H_2^{p+1} / \varepsilon_k < 1$. Тогда для всех $f \in G_M(U)$

$$\begin{aligned} |(T_N, f)| &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha \in R_{N,j}} \frac{c_4}{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} p_s(f) \sup_{\xi \in U, |\gamma| \leq p} \frac{\varepsilon_s^{|\alpha| + |\gamma| + 1} M_{|\alpha| + |\gamma| + 1}}{(1 + \|\xi\|)^{s-p}} \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha \in R_{N,j}} \frac{c_4}{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} p_s(f) \varepsilon_s^{|\alpha|} \sup_{|\gamma| \leq p} H_1^{|\gamma| + 1} H_2^{(|\alpha| + |\gamma| + 1)(|\gamma| + 1)} M_{|\alpha|} \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha \in R_{N,j}} c_4 p_s(f) \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_k} H_2^{p+1} \right)^{|\alpha|} H_1^{p+1} H_2^{(p+1)^2} \\ &< c_4 H_1^{p+1} H_2^{(p+1)^2} p_s(f) n q^N (N+1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $(T_N, f) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ для всех $f \in G_M(U)$. Значит, $(T, f) = 0$ для всех $f \in G_M(U)$. Итак, T – нулевой функционал. Взаимнооднозначность отображения L доказана.

По теореме об открытом отображении [13; с. 12], [15; с. 230] отображение L^{-1} непрерывно. Таким образом, L – топологический изоморфизм.

Теорема 2 доказана.

4. Простой пример множества $U(b, C)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть K – компакт в $\mathbb{R}^n$, $b(y) = \sup_{t \in K} (-\langle y, t \rangle)$ для $y \in \overline{C}$. Тогда $U(b, C) = C^* + K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $C^* + K \subseteq U(b, C)$. Покажем теперь, что $U(b, C) \subseteq C^* + K$. Обозначим для краткости $C^* + K$ через D . Предположим, что существует точка множества $U(b, C)$, не принадлежащая $C^* + K$. Так как множества $C^* + K$ и $U(b, C)$ замкнутые и выпуклые, то найдется точка $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такая, что $H_D(y_0) < H_{U(b, C)}(y_0)$. Отметим, что $y_0 \in \overline{C}$. В противном случае, можно найти точку $\zeta \in C^*$ такую, что $\langle \zeta, y_0 \rangle < 0$. Но тогда

$$H_D(y_0) = \sup_{\xi \in C^*} (-\langle y_0, \xi \rangle) + H_K(y_0) = +\infty,$$

что противоречит тому, что $H_D(y_0)$ конечно. Итак, $y_0 \in \overline{C}$. Значит,

$$\sup_{\xi \in C^*} (-\langle y_0, \xi \rangle) = 0.$$

И тогда

$$H_K(y_0) = H_D(y_0) < H_{U(b, C)}(y_0) \leq H_K(y_0).$$

Получено противоречие. Значит, предположение было неверно. Таким образом, $U(b, C) \subseteq C^* + K$. Окончательно, $U(b, C) = C^* + K$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979.
- [2] J. W. de Roever, *Complex Fourier Transformation and Analytic Functionals with Unbounded Carriers*, Math. Centre Tracts, **89**, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1978.
- [3] B. A. Taylor, “Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **24**:1 (1971), 39–51.
- [4] В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций*, Наука, М., 1986.
- [5] В. С. Владимиров, “О функциях, голоморфных в трубчатых конусах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **27**:1 (1963), 75–100.
- [6] В. С. Владимиров, *Методы теории функций многих комплексных переменных*, Наука, М., 1964.
- [7] J. W. de Roever, “Analytic representations and Fourier transforms of analytic functionals in Z' carried by the real space”, *SIAM J. Math. Anal.*, **9**:6 (1978), 996–1019.
- [8] Ж. Себастьян-и-Сильва, “О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях”, *Математика. Сб. пер.*, **1**:1 (1957), 60–77.
- [9] В. В. Жаринов, “Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS”, *УМН*, **34**:4 (1979), 97–131.

- [10] И. Х. Мусин, “О преобразовании Фурье–Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ ”, *Матем. сб.*, **195**:10 (2004), 83–108.
- [11] И. Х. Мусин, “О преобразовании Фурье–Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций”, *Матем. сб.*, **191**:10 (2000), 57–86.
- [12] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, М., 1969.
- [13] В. В. Напалков, *Уравнения свертки в многомерных пространствах*, Наука, М., 1982.
- [14] С. Мандельбройт, *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Приложения*, ИЛ, М., 1955.
- [15] А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1967.

И. Х. Мусин

Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН

E-mail: musin_ildar@mail.ru

Поступило

22.11.2007

Исправленный вариант

07.11.2008

П. В. Федотова

Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН

E-mail: polina81@rambler.ru