Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Дзюбенко, М. Г. Плешаков, Комонотонное приближение периодических функций, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 2, 199–209

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4416>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 12:08:31

Комонотонное приближение периодических функций

Г. А. Дзюбенко, М. Г. Плешаков

Пусть непрерывная на действительной оси $\mathbb{R}$ 2π -периодическая функция f меняет монотонность в различных упорядоченных фиксированных точках $y_i \in [-\pi, \pi)$, $i = 1, \dots, 2s$, $s \in \mathbb{N}$. То есть, на $\mathbb{R}$ имеется множество $Y := \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ точек $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ таких, что на $[y_i, y_{i-1}]$ f не убывает, если i нечетное, и не возрастает, если i четное. Для каждого $n \geq N(Y)$ в работе построен тригонометрический полином P_n порядка $\leq n$, меняющий свою монотонность в тех же точках $y_i \in Y$, что и f , и такой, что

$$\|f - P_n\| \leq c(s)\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right),$$

где $N(Y)$ – постоянная, зависящая только от Y ; $c(s)$ – постоянная, зависящая только от s ; $\omega_2(f, \cdot)$ – модуль непрерывности второго порядка функции f и $\|\cdot\|$ – max-норма.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Пусть C – пространство непрерывных 2π -периодических функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с равномерной нормой $\|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, $\mathbb{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$, – пространство тригонометрических полиномов $P_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$ порядка $\leq n$, где $a_j \in \mathbb{R}$ и $b_j \in \mathbb{R}$,

$$E_n(f) := \inf_{P_n \in \mathbb{T}_n} \|f - P_n\|$$

– величина наилучшего приближения функции f полиномами $P_n \in \mathbb{T}_n$. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Напомним классическую оценку Джексона–Зигмунда–Ахиезера–Стечкина (полученную Джексоном для $k = 1$, Зигмундом и Ахиезером для $k = 2$ и Стечкиным для $k \geq 3$): если $f \in C$, то

$$E_n(f) \leq c(k)\omega_k\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где $c(k)$ – постоянная, которая зависит только от k , и $\omega_k(f, \cdot)$ – модуль непрерывности порядка k функции f . Подробнее см., например, в книге [1; с. 204–212].

Учитывая интенсивное развитие теории комонотонного приближения на отрезке, профессора Демидович и Конягин около 20 лет назад поставили вопрос: верен ли комонотонный аналог неравенства (1) для периодических функций? Для случая $k = 1$ положительный ответ был дан вторым автором настоящей статьи (см. [2]). Он же [3; с. 64–83], используя рассуждения статей Шведова [4], [5] и ДеВора, Левиатана

и Шевчука [6], показал, что для $k > 2$ комонотонный аналог неравенства (1) не верен. Отметим также, что для $k = 1$ был известен положительный результат Лоренца и Целлера [7] для колоколообразных (четных и невозрастающих на $[0, \pi]$) 2π -периодических функций.

Таким образом, до настоящего времени оставался открытым вопрос о справедливости комонотонного аналога неравенства (1) для случая $k = 2$, т.е. о справедливости периодического аналога результата Шведова [8], доказанного им для (непериодических) функций, заданных на отрезке. На важность этого вопроса обратили внимание профессора Теляковский и Шведов во время защиты кандидатской диссертации Плешакова.

В работе, в теоремах 1 и 2 дается положительный ответ на указанный вопрос. Чтобы их сформулировать дадим необходимые определения. Пусть на $[-\pi, \pi)$ имеется $2s$, $s \in \mathbb{N}$, фиксированных точек y_i :

$$-\pi \leq y_{2s} < y_{2s-1} < \dots < y_1 < \pi,$$

а для остальных индексов $i \in \mathbb{Z}$ точки y_i определяются равенством $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ (т.е. $y_0 = y_{2s} + 2\pi, \dots, y_{2s+1} = y_1 - 2\pi, \dots$). Обозначим $Y := \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Пусть $\Delta^{(1)}(Y)$ – множество всех функций $f \in C$, которые не убывают на $[y_1, y_0]$, не возрастают на $[y_2, y_1]$, не убывают на $[y_3, y_2]$ и т.д.,

$$E_n^{(1)}(f) := \inf_{P_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)} \|f - P_n\|$$

– величина наилучшего комонотонного приближения функции f полиномами $P_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$. Заметим, если функция f дифференцируема, то $f \in \Delta^{(1)}(Y)$ тогда и только тогда, когда $f'(x)\Pi(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, где

$$\Pi(x) := \Pi(x; Y) := \prod_{i=1}^{2s} \sin \frac{x - y_i}{2}, \quad \Pi(x) > 0, \quad x \in (y_1, y_0).$$

ТЕОРЕМА 1. Если $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, то

$$E_n^{(1)}(f) \leq c(s)\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \quad n \geq N(Y), \quad (2)$$

где $N(Y)$ – постоянная, которая зависит только от $\min_{i=1, \dots, 2s} \{y_i - y_{i+1}\}$, и $c(s)$ – постоянная, которая зависит только от s .

Следующая теорема 2 является простым следствием теоремы 1 и неравенства Уитни $\|f - f(0)\| \leq \omega_2(f, 2\pi)$ (см. [9]).

ТЕОРЕМА 2. Если $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, то

$$E_n^{(1)}(f) \leq C(Y)\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

где $C(Y)$ – постоянная, которая зависит только от $\min_{i=1, \dots, 2s} \{y_i - y_{i+1}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Мы предполагаем, что постоянные $N(Y)$ и $C(Y)$ в теоремах 1 и 2 нельзя заменить постоянными, не зависящими от $\min_{i=1, \dots, 2s} \{y_i - y_{i+1}\}$. Данное предположение не рассматривается в этой статье.

В п. 2 “Вспомогательные факты” мы приведем в удобном для нас виде конструкции и леммы из работ [2]–[13] и их следствия. Единственное отличие состоит в том, что вместо неотрицательного ядра типа Джексона будет использовано строго положительное ядро, являющееся суммой двух “соседних” ядер типа Джексона.

2. Вспомогательные факты. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$h := h_n := \frac{\pi}{n}, \quad x_j := x_{j,n} := -jh, \quad I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}], \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Положим

$$m = 20.$$

Для фиксированного $Y = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ и фиксированного n обозначим

$$O_i := O_i(Y, n, m) := (x_{j+m}, x_{j-m}), \quad \text{если } y_i \in [x_j, x_{j-1}).$$

Пусть

$$O := O(Y, n, m) := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} O_i.$$

Будем писать $j \in H := H(Y, n, m)$, если $x_j \in \mathbb{R} \setminus O$. Выберем $N(Y) := N(Y, m)$ так, что

$$\overline{O}_i \cap \overline{O}_{i-1} = \emptyset \quad (4)$$

для всех $n \geq N(Y)$ и всех $i = 1, \dots, 2s$ (таким образом, $N(Y)$ зависит только от $\min_{i=1, \dots, 2s} \{y_i - y_{i+1}\}$).

Обозначим

$$\chi(x, a) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ 1, & \text{если } x > a, \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}, \quad \chi_j(x) := \chi(x, x_j),$$

$$(x - x_j)_+ := (x - x_j) \chi_j(x),$$

$$\Gamma_j(x) := \Gamma_{j,n}(x) := \min \left\{ 1, \frac{1}{n |\sin((x - (x_j + h/2))/2)|} \right\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и отметим, что

$$\left\| \sum_{j=1-n}^n \Gamma_j^2 \right\| < 6 \quad (5)$$

(подробнее см. [2]).

Для каждого $j \in \mathbb{Z}$ введем положительный полином

$$J_j(x) := J_{j,n}(x) := \left(\frac{\sin(n(x - x_j)/2)}{\sin(x - x_j)/2} \right)^2 + \left(\frac{\sin(n(x - x_{j-1})/2)}{\sin((x - x_{j-1})/2)} \right)^2, \quad (6)$$

$$J_j \in \mathbb{T}_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(т.е. сумму двух “соседних” ядер типа Джексона). Всюду далее $n > N(Y) = N(Y, m)$.

Пусть

$$\overline{H} := \left\{ j : j \in H\left(Y, n, \frac{m}{2}\right), \|j\| < n + \frac{m}{2} \right\}.$$

Для каждого $b \in \mathbb{N}$, $b \geq s + 2$, обозначим

$$t_j := t_j(x) := t_{j,n}(x; b; Y) := \frac{1}{d_j} \int_{x_j - \pi}^x J_j^b(u) \Pi(u) du, \quad j \in \overline{H}, \quad (7)$$

где

$$d_j := \int_{x_j - \pi}^{x_j + \pi} J_j^b(u) \Pi(u) du$$

(в частности, $d_j \neq 0$ для $j \in \overline{H}$ и $b \geq s + 2$; см. детальную оценку аналогичной величины в работе [2; лемма 1]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Полином J_j^b в (7) можно заменить более простым полиномом

$$\left(\frac{\sin(n(x - x_j)/2)}{\sin((x - x_j)/2)} \right)^{2b} + \left(\frac{\sin(n(x - x_{j-1})/2)}{\sin((x - x_{j-1})/2)} \right)^{2b}.$$

Далее в леммах 1, 2 и в следствии леммы 2 через $\bar{c}$, $\bar{c}_1 = \bar{c}_1(s, b)$ и $\bar{c}_2 = \bar{c}_2(s, b)$ будут обозначены положительные постоянные, которые могут зависеть только от s и b . В следующей лемме 1 мы приведем лемму 2 (до замечания включительно) из работы [2], а также неравенства (5.22) и (5.27) из леммы 1 работы [12].

ЛЕММА 1. Если $j \in \overline{H}$ и $b \geq s + 2$, то

$$t'_j(x) \Pi(x) \Pi(x_j) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

$$t_j(x_j \pm \pi) = \chi_j(\pm \pi), \quad (9)$$

$$|\chi_j(x) - t_j(x)| \leq \bar{c}(\Gamma_j(x))^{2b-s-1}, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (10)$$

$$|t'_j(x)| \leq \bar{c} \frac{1}{h} (\Gamma_j(x))^{2b-s}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

$$|t'_j(x)| \geq \bar{c}_1 \frac{1}{h} (\Gamma_j(x))^{2b+2s}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus O\left(Y, n, \frac{m}{2}\right), \quad (12)$$

$$|t'_j(x)| \geq \bar{c}_1 \frac{1}{h} (\Gamma_j(x))^{2b+2s} \left| \frac{x - y_i}{x_j - y_i} \right|, \quad x \in O_i\left(Y, n, \frac{m}{2}\right), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (13)$$

Заметим, что лемма 1 доказывается с помощью неравенств

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{c}h} \Gamma_j^{2b}(x) \left| \frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)} \right| &\leq |t'_j(x)| \leq \frac{\bar{c}}{h} \Gamma_j^{2b}(x) \left| \frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)} \right|, \\ \left| \frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)} \right| &\leq \Gamma_j^{-s}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad j \in \overline{H}, \\ \left| \int_x^{x_j + \pi} \Gamma_j^a(u) du \right| &\leq \bar{c}h \Gamma_j^{a-1}(x), \quad a \in \mathbb{N}, \quad x \in [x_j, x_j + 2\pi], \\ \left| \int_x^{x_j - \pi} \Gamma_j^a(u) du \right| &\leq \bar{c}h \Gamma_j^{a-1}(x), \quad a \in \mathbb{N}, \quad x \in [x_j - 2\pi, x_j]. \end{aligned}$$

Обозначим

$$H_0 := \{j : j \in H(Y, n, m), |j| < n\}$$

и для каждого $j \in H_0$ положим

$$\tau_j(x) := \tau_{j,n}(x; b; t_j) := \alpha \int_{x_j - \pi}^x t_{j+m/2}(u) du + (1 - \alpha) \int_{x_j - \pi}^x t_{j-m/2}(u) du, \quad (14)$$

где число α выбрано из условия

$$\tau_j(x_j + \pi) = \pi$$

(заметим, что из оценки (10) и выбора m и b вытекают неравенства $0 \leq \alpha \leq 1$; подробнее, см. [10; с. 923]).

Отметим, что функции t_j и τ_j можно представить на $\mathbb{R}$ в виде

$$t_j(x) = \frac{1}{2\pi} + \widehat{R}_j(x), \quad j \in \overline{H}, \quad (15)$$

$$\tau_j(x) = \frac{1}{4\pi} x^2 + \frac{\pi - x_j}{2\pi} x + \widetilde{R}_j(x), \quad j \in H_0, \quad (16)$$

где $\widehat{R}_j$ и $\widetilde{R}_j$ – некоторые полиномы из $\mathbb{T}_{cn}$; см. аналогичные случаи в [2] и [10] соответственно.

Зафиксируем $j \in \overline{H}$. Обозначим

$$\{z_i\}_{i=1}^{2s} := \{Y \cap (x_j - \pi, x_j + \pi)\},$$

где точки z_i пронумерованы справа налево; $z_{2s+1} := x_j - \pi$ и $z_0 := x_j + \pi$ (т.е. z_0 и z_1 могут совпадать). Через $i(j)$ обозначим индекс $i = 0, \dots, 2s$ такой, что $z_{i(j)+1} < x_j < z_{i(j)}$. Следующая лемма 2 является леммой 1 работы [11]; она доказывается аналогично лемме 5.2 работы [13].

ЛЕММА 2. Для каждого $j \in \overline{H}$ и каждого $b \geq 2s + 2$ существует $2s$ фиксированных точек u_i таких, что

$$\begin{aligned} z_{2s+1} < u_{2s} < \dots < z_{i(j)+2} < u_{i(j)+1} < z_{i(j)+1}, \\ z_{i(j)} < u_{i(j)} < \dots < u_2 < z_1 \leq u_1 \leq z_0, \end{aligned}$$

и таких, что функция

$$\overset{\circ}{t}_j := \overset{\circ}{t}_j(x) := t_{j,n}(x; b; Y \cup \mathbf{U}), \quad \mathbf{U} := \{u_i : u_i = u_{i+2s} + 2\pi, i \in \mathbb{Z}\},$$

удовлетворяет соотношениям (9)–(11), (15) и, кроме того,

$$|\chi_j(x) - \overset{\circ}{t}_j(x)| \leq \bar{c}_2(\Gamma_j(x))^{2b-2s-1} \left| \frac{x - y_i}{x_j - y_i} \right|, \quad x \in O_i\left(Y, n, \frac{m}{2}\right), \quad i = 1, \dots, 2s;$$

в частности,

$$\chi_j(y_i) - \overset{\circ}{t}_j(y_i) = 0, \quad i = 1, \dots, 2s.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Вместо $\overset{\circ}{t}_j$ в лемме 2 можно использовать функцию

$$t_{j,n}(x; b) + \sum_{i=1}^{2s} \frac{\chi_j(y_i) - t_{j,n}(y_i; b)}{t'_{j,n}(y_i; b; Y_i)} t'_{j,n}(x; b; Y_i),$$

где $t_{j,n}(x; b)$ – полином, определенный равенством (7) с $\Pi(x) \equiv 1$,

$$Y_i := (Y \setminus \{y_i + 2\pi\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}) \cup \{\underline{y}_i + 2\pi\nu\}_{\nu \in \mathbb{Z}}$$

и $b \geq 3s + 2$.

СЛЕДСТВИЕ ЛЕММЫ 2. Для каждого $j \in H_0$ и каждого $b \geq 2s + 2$ функция

$$\overset{\circ}{\tau}_j(x) := \tau_{j,n}(x; b; \overset{\circ}{t}_j),$$

определенная формулой (14), удовлетворяет равенству (16) и, кроме того,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tau}_j(x_j \pm \pi) &= ((x_j \pm \pi) - x_j)_+, & \overset{\circ}{\tau}'_j(x_j \pm \pi) &= \chi_j(\pm\pi), \\ |(x - x_j)_+ - \overset{\circ}{\tau}_j(x)| &\leq \bar{c}h(\Gamma_j(x))^{2(b-s-1)}, & x \in [-\pi, \pi], \end{aligned} \quad (17)$$

$$|\chi_j(x) - \overset{\circ}{\tau}'_j(x)| \leq \bar{c}_2(\Gamma_j(x))^{2b-2s-1}, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (18)$$

$$\begin{aligned} |\chi_j(x) - \overset{\circ}{\tau}'_j(x)| &\leq \bar{c}_2(\Gamma_j(x))^{2b-2s-1} \left| \frac{x - y_i}{x_j - y_i} \right|, \\ x &\in O_i\left(Y, n, \frac{m}{2}\right), \quad i = 1, \dots, 2s. \end{aligned} \quad (19)$$

3. Вспомогательные леммы. Всюду далее $c > 0$ обозначают различные абсолютные постоянные или постоянные которые зависят только от s . Они могут быть различными, даже если находятся в одной строке. Обозначим

$$Q := \{(2\nu - 1)n\}_{\nu \in \mathbb{Z}}.$$

ЛЕММА 3. Если $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, то для каждого $n > N(Y)$ существует ломаная $L \in \Delta^{(1)}(Y)$, которая имеет узлы только в точках x_j с $j \in H \setminus Q$ и такая, что

$$\|f - L\| \leq c\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right). \quad (20)$$

Подчеркнем, что ломаной L в лемме 1 не разрешено иметь узлы в x_j , если $x_j \in O$ и если x_j таково, что $j \in Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $n > N(Y)$. Для удобства предположим, что

$$\{x_j : j \in Q\} \not\subset \overline{O} \setminus O \quad (21)$$

(если это не так, то пусть $n > N(Y) + 4$, или пусть $m = 22$ вместо $m = 20$, чтобы (21) и (4) выполнялись). Пусть $L^* := L^*(x)$ обозначает непрерывную ломаную с узлами $\{x_j : j \in H \setminus Q\} \cup Y$, которая интерполирует f в каждом своем узле. Очевидно,

$$L^* \in \Delta^{(1)}(Y). \quad (22)$$

Более того, из неравенства Уитни вытекает оценка

$$\|f - L^*\| \leq c\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right). \quad (23)$$

“Подправим” L^* так, чтобы получить L . Обозначим

$$(\bar{y}_i, \underline{y}_i) := O_i, \quad i = 1, \dots, 2s,$$

т.е. $\bar{y}_i$ и $\underline{y}_i$ – левый и правый концы интервала O_i соответственно. Через $\check{L} := \check{L}(x)$ обозначим непрерывную ломаную, состоящую на $[y_{2s}, y_0]$ из $6s$ звеньев таких, что $\check{L}(y_i) = 0$, $i = 0, \dots, 2s$, и при каждом $i = 0, \dots, 2s$,

$$\check{L}(\bar{y}_i) = f(y_i) - f(\bar{y}_i) \quad \text{и} \quad \check{L}(\underline{y}_i) = f(y_i) - f(\underline{y}_i).$$

Очевидно, что $\check{L}$ можно периодически продолжить на $\mathbb{R}$. Так как $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, то

$$\check{L}'(x)\Pi(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus O. \quad (24)$$

Покажем, что

$$\|\check{L}\| \leq c\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right). \quad (25)$$

Для каждого $i = 0, \dots, 2s$ через $\bar{l}_i$ обозначим линейную функцию, которая интерполирует f в точках $\bar{y}_i$ и y_i , а через $\underline{l}_i$ – линейную функцию, которая интерполирует f в y_i и $\underline{y}_i$. Если $x \in O_i$, то из неравенства Уитни вытекают оценки

$$\begin{aligned} |f(x) - \bar{l}_i(x)| &\leq c\omega_2(f, \underline{y}_i - \bar{y}_i) \leq c\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \\ |f(x) - \underline{l}_i(x)| &\leq c\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

и, следовательно, с учетом (24) имеем

$$\|\check{L}\| = \max_{x \in O} |\check{L}(x)| \leq |\bar{l}_i(x) - \underline{l}_i(x)| \leq c\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right).$$

Теперь из определений L^* и $\check{L}$ видно, что ломаная

$$L = L^* + \check{L}$$

является искомой в лемме 3. Действительно, мы получили равенство

$$L(x) \equiv f(y_i), \quad x \in \bar{O}_i, \quad i \in \mathbb{Z},$$

из которого с учетом (22) и (24) видно, что $L \in \Delta^{(1)}(Y)$, а (20) следует из (23) и (25). Лемма 3 доказана.

Обозначим

$$\delta_j := L(x_j) - L(x_{j-1}), \quad \Delta_j := L(x_{j+1}) - 2L(x_j) + L(x_{j-1}), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

СЛЕДСТВИЕ ЛЕММЫ 3. Если L – ломаная из леммы 3, то

$$\delta_j \Pi(x_j) \leq 0, \quad j \in H, \quad (26)$$

$$|\Delta_j| \leq \omega_2 \left(L - f + f, \frac{\pi}{n} \right) \leq c\omega_2 \left(f, \frac{\pi}{n} \right), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (27)$$

$$\Delta_j = \delta_j = 0, \quad j \notin H, \quad (28)$$

$$\Delta_j = 0, \quad j \in Q. \quad (29)$$

Обозначим

$$b_1 := s + 2, \quad b_2 := 3(s + 1), \quad c_1 := \bar{c}_1(s, b_1),$$

$$c_2 := \bar{c}_2(s, b_2), \quad n_1 := 2 \left[1 + \frac{c_2}{c_1} \right] n$$

($[\cdot]$ – целая часть). Для каждого $j = 1 - n, \dots, n - 1$ через j^* и j_* обозначим индексы такие, что

$$x_{j^*, n_1} = \frac{x_{j, n} + x_{j-1, n}}{2} \quad \text{и} \quad x_{j_*, n_1} = \frac{x_{j+1, n} + x_{j, n}}{2}$$

соответственно.

ЛЕММА 4. Для каждого $j \in H_0$ две функции

$$\tau_{j^*}(x) := \tau_{j^*, n_1}(x; b_2; \overset{\circ}{t}_j) + \frac{h_n}{2} t_{j^*, n_1}(x; b_1; Y),$$

$$\tau_{j_*}(x) := \tau_{j_*, n_1}(x; b_2; \overset{\circ}{t}_j) - \frac{h_n}{2} t_{j_*, n_1}(x; b_1; Y)$$

при $x \in [-\pi, \pi]$ удовлетворяют неравенствам

$$(\tau'_{j^*}(x) - \chi_{j^*}(x)) \Pi(x) \Pi(x_j) \geq 0, \quad (30)$$

$$(\tau'_{j_*}(x) - \chi_{j_*}(x)) \Pi(x) \Pi(x_j) \leq 0, \quad (31)$$

$$|(x - x_j)_+ - \tau_{j^*}(x)| \leq ch_n \Gamma_{j, n}^2(x), \quad (32)$$

где $j^* = j^*$ или j_* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из двух аналогичных неравенств (30) и (31) мы проверим только (30). Если $x \in [-\pi, \pi] \setminus O(Y, n_1, m/2)$, то из (8), (12), (18) и выбора n_1 следует, что

$$(\tau'_{j^*}(x) - \chi_{j^*}(x)) \Pi(x) \Pi(x_j) = \left(\frac{h_n}{2} t'_{j^*, n_1}(x; b_1; Y) + \tau'_{j^*, n_1}(x; b_2; \overset{\circ}{t}_j) - \chi_{j^*}(x) \right) \Pi(x) \Pi(x_j)$$

$$\geq c_1 \frac{h_n}{2h_{n_1}} \Gamma_{j^*, n_1}^{4(s+1)}(x) - c_2 \Gamma_{j^*, n_1}^{4s+5}(x)$$

$$\geq \left(c_1 \frac{h_n}{2h_{n_1}} - c_2 \right) \Gamma_{j^*, n_1}^{4(s+1)}(x) \geq 0.$$

Собирая (8), (13) и (19), мы доказываем (30) аналогично для остальных x . Неравенства (17) и (10) влекут (32). А именно,

$$\begin{aligned} |(x - x_j)_+ - \tau_{j^*}(x)| &= \left| \left((x - x_j)_+ - (x - x_{j^*})_+ - \frac{h_n}{2} \chi_{j^*}(x) \right) \right. \\ &\quad \left. + ((x - x_{j^*})_+ - \tau_{j^*, n_1}(x; b_2; \overset{\circ}{t}_j)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_n}{2} (\chi_{j^*}(x) - t_{j^*, n_1}(x; b_1; Y)) \right| \\ &\leq ch_n \Gamma_{j, n}^2(x) + ch_{n_1} \Gamma_{j^*, n_1}^{4(s+1)}(x) + ch_n \Gamma_{j^*, n_1}^{s+3}(x) \leq ch_n \Gamma_{j, n}^2(x). \end{aligned}$$

Для индекса j_* неравенство (32) доказывается аналогично. Лемма 4 доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть L – ломаная из леммы 3. Представим ее на $[-\pi, \pi]$ в виде

$$L(x) \equiv l(x) + \frac{1}{h} \sum_{j=1-n}^{n-1} \Delta_j (x - x_j)_+ \equiv l(x) + \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0} \Delta_j (x - x_j)_+,$$

где

$$l(x) := L(-\pi) + [x_n, x_{n-1}; L](x + \pi) := L(-\pi) + \frac{L(x_n) - L(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x + \pi)$$

и где мы использовали (28).

Положим

$$P_n(x) := l(x) + \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0} \Delta_j \tau_j(x), \quad (33)$$

где

$$\tau_j(x) := \begin{cases} \tau_{j^*}(x), & \text{если } \Delta_j \Pi(x_j) \geq 0, \\ \tau_{j_*}(x), & \text{если } \Delta_j \Pi(x_j) < 0. \end{cases}$$

Убедимся, что P_n – это искомый в теореме 1 полином. Для начала покажем, что P_n – это вообще тригонометрический полином порядка sn . Подставим (15) и (16) в (33). С учетом (28) и (29) имеем

$$P_n(x) = \frac{A}{4\pi} x^2 + [x_n, x_{n-1}; L]x + \frac{n}{\pi} x \sum_{j \in H_0} \Delta_j \left(\frac{\pi - x_{j^*}}{2\pi} \pm \frac{h}{2} \frac{1}{2\pi} \right) + R_n(x),$$

где

$$A := \frac{n}{\pi} \sum_{j=1-n}^{n-1} \Delta_j = -\frac{n}{\pi} \Delta_n = 0,$$

$$R_n(x) := L(-\pi) + [x_n, x_{n-1}; L]\pi + \frac{n}{\pi} \sum_{j \in H_0} \Delta_j \widehat{\widehat{R}}_{j^*}(x)$$

– некоторый полином порядка cn , т.е.

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= x \left([x_n, x_{n-1}; L] + \frac{n}{2\pi^2} \sum_{j \in H_0} \Delta_j \left(\pi - x_j \mp \frac{h}{2} \pm \frac{h}{2} \right) \right) + R_n(x) \\
 &= x \left([x_n, x_{n-1}; L] + \frac{A}{2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1-n}^{n-1} \Delta_j j \right) + R_n(x) \\
 &= \frac{x}{\pi} \left(nL(x_{n-1}) - nL(x_n) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} [(n-1)(L(x_n) - L(x_{-n})) - n(L(x_{n-1}) - L(x_{1-n}))] \right) \\
 &\quad + R_n(x) = x \frac{n}{2\pi} (L(x_{n-1}) - 2L(x_n) + L(x_{1-n})) + R_n(x) = R_n(x),
 \end{aligned}$$

так как $L(x_n) = L(x_{-n})$ и $L(x_{1-n}) = L(x_{n+1})$.

Докажем, что $P_n \in \Delta^{(1)}(Y)$. Пусть $x \in [-\pi, \pi]$, тогда с учетом (28) неравенства (26), (30), (31) и $x_{j^*} \leq x_{(j-1)^*}$ позволяют записать

$$\begin{aligned}
 P'_n(x) \Pi(x) &= \left([x_n, x_{n-1}; L] \chi_n(x) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0} \Delta_j (\tau'_j(x) - \chi_{j^*}(x)) + \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0} (\delta_{j+1} - \delta_j) \chi_{j^*}(x) \right) \Pi(x) \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0} \Delta_j (\tau'_{j^*}(x) - \chi_{j^*}(x)) \Pi(x) - \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0 \cup \{n\}} \delta_j (\chi_{j^*}(x) - \chi_{(j-1)^*}(x)) \Pi(x) \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0} \frac{1}{\Pi^2(x_j)} (\Delta_j \Pi(x_j)) ((\tau'_{j^*}(x) - \chi_{j^*}(x)) \Pi(x) \Pi(x_j)) \\
 &\quad - \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0 \cup \{n\}} \frac{1}{\Pi^2(x_j)} (\delta_j \Pi(x_j)) ((\chi_{j^*}(x) - \chi_{(j-1)^*}(x)) \Pi(x) \Pi(x_j)) \geq 0
 \end{aligned}$$

(здесь $n^* := n$ и $-n^* := -n$).

Чтобы доказать (2) мы представим разность $f - P_n$ на $[-\pi, \pi]$ в виде

$$f(x) - P_n(x) = f(x) - L(x) + L(x) - P_n(x) = f(x) - L(x) + \frac{1}{h} \sum_{j \in H_0} \Delta_j ((x - x_j)_+ - \tau_j(x)).$$

Теперь оценка (2) следует из (20), (32), (27) и (5). Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, М., 1977.
- [2] М. Г. Pleshakov, “Comonotone Jackson’s inequality”, *J. Approx. Theory*, **99**:2 (1999), 409–421.
- [3] М. Г. Плешаков, *Комонотонное приближение периодических функций классов Соболева*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, СГУ, Саратов, 1997.
- [4] А. С. Шведов, “Комонотонное приближение функций многочленами”, *Докл. АН СССР*, **250**:1 (1980), 39–42.

- [5] А. С. Шведов, “Порядки коприближений функций алгебраическими многочленами”, *Матем. заметки*, **29**:1 (1981), 117–130.
- [6] R. A. DeVore, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, “Approximation of monotone functions: a counter example”, *Curves and Surfaces With Application in CAGD* (Chamonix–Mont-Blanc, 1996), Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 1997, 95–102.
- [7] G. G. Lorentz, K. L. Zeller, “Degree of approximation by monotone polynomials. I”, *J. Approx. Theory*, **1**:4 (1968), 501–504.
- [8] А. С. Шведов, “Коприближение кусочно-монотонных функций многочленами”, *Матем. заметки*, **30** (1981), 839–846.
- [9] H. Whitney, “On functions with bounded n -th differences”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **36** (1957), 67–95.
- [10] П. А. Попов, “Аналог нерівності Джексона для коопуклого наближення періодичних функцій”, *Укр. матем. журн.*, **53**:7 (2001), 919–928.
- [11] П. А. Попов, М. Г. Плешаков, “Знакосохраняющее приближение периодических функций”, *Укр. матем. журн.*, **55**:8 (2003), 1087–1098.
- [12] G. A. Dzyubenko, J. Gilewicz, I. A. Shevchuk, “Piecewise monotone pointwise approximation”, *Constr. Approx.*, **14**:3 (1998), 311–348.
- [13] J. Gilewicz, I. A. Шевчук, “Комонотонное приближение”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **2**:2 (1996), 319–363.

Г. А. Дзюбенко

Международный математический центр НАН Украины, Киев,
Украина

E-mail: dzyuben@imath.kiev.ua

Поступило

28.09.2005

М. Г. Плешаков

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

E-mail: PleshakovMG@info.sgu.ru