Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. I, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 2, 232–263

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4418>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 17:47:51

О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. I

В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский

Рассматривается математическая задача о распределении тождественных частиц по целочисленным уровням энергии при условии, что число частиц не задано, а суммарная энергия системы ограничена сверху. Рассматриваются системы как целой, так и дробной размерности. Числа заполнения могут принимать либо произвольные целые неотрицательные значения (“бозе-частицы”), либо значения из конечного множества $\{0, 1, \dots, R\}$ (так называемые парастатистики; например, при $R = 1$ получается статистика Ферми–Дирака). При условии, что все варианты, удовлетворяющие заданным ограничениям, равновероятны, изучается явление концентрации большинства вариантов при больших энергиях вблизи отвечающего заданной парастатистике предельного распределения.

Библиография: 10 названий.

1. Введение

В работах [1]–[3] изучена с математической точки зрения задача о кумулятивных вероятностях распределения системы тождественных частиц по уровням энергии при условии, что задано число частиц и ограничение на суммарную энергию системы, а все варианты распределения, удовлетворяющие заданным ограничениям, равновероятны. В данной заметке мы обратимся к случаю, когда число частиц не задано, а ограничение накладывается только на суммарную энергию. Предполагается, что уровни энергии – целые числа. Рассматриваются системы как целой, так и дробной размерности (точные определения даны в основном тексте работы). Числа частиц на уровнях (числа заполнения) могут принимать либо произвольные целые неотрицательные значения (“бозе-частицы”), либо значения из конечного множества $\{0, 1, \dots, R\}$ (так называемые парастатистики, ср. [4]; например, при $R = 1$ наши “частицы” подчиняются статистике Ферми–Дирака). Допускается также, чтобы число R зависело от номера уровня энергии. Вычисляются асимптотические кумулятивные распределения и энтропия рассматриваемых систем, получены поправки к интегральным формулам для энергии и числа частиц, аналогичные указанной в [5] поправке порядка $V^{2/3}$ для закона Стефана–Больцмана (см. [6]).

1.1. Пример: трехмерная система. Прежде чем описывать общую постановку задачи, решаемой в данной работе, рассмотрим простейший пример. Для этого примера мы, в частности, сформулируем некоторые из основных утверждений, доказанных нами ниже.

Пусть каждой точке (x, y, z) положительного октанта трехмерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^3$ (кроме точки $(0, 0, 0)$) сопоставлено каким-то образом произвольное неотрицательное целое число N_{xyz} , $x, y, z \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$, $x + y + z \geq 1$. Такой набор чисел обозначим через $\{N_{xyz}\}$. Рассмотрим всевозможные наборы $\{N_{xyz}\}$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{x,y,z} (x + y + z) N_{xyz} \leq M, \quad (1)$$

где $M > 0$ – заданное целое число, а сумма берется по всем указанным выше точкам (x, y, z) . Число $\mathcal{N}(M)$ таких наборов конечно, ибо из (1) вытекает, что каждое из чисел N_{xyz} не превосходит M , а те из них, для которых $x + y + z > M$, с необходимостью равны нулю.

Все наборы $\{N_{xyz}\}$, удовлетворяющие условию (1) будем считать равноправными (или, если угодно, равновероятными – можно представить себе, что набор выбирается случайным образом, причем вероятность выбора любого конкретного набора одинакова и равна $1/\mathcal{N}(M)$).

Хотя сами наборы $\{N_{xyz}\}$ случайны и равновероятны (а точнее, именно благодаря этому обстоятельству), при больших M некоторые “агрегированные” характеристики этих наборов с большой вероятностью располагаются вблизи некоторых вполне определенных значений. Одной из таких характеристик является сумма $\sum_{x,y,z} N_{xyz}$ всех чисел N_{xyz} . Оказывается, эта сумма для большинства вариантов близка к числу N , которое определяется следующим образом:

$$N = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j+1)(j+2)}{2(e^{bj} - 1)}, \quad (2)$$

где b – решение уравнения

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j(j+1)(j+2)}{2(e^{bj} - 1)}. \quad (3)$$

(Это решение всегда существует, единственно и стремится к нулю при $M \rightarrow \infty$, так что $N \rightarrow \infty$ при $M \rightarrow \infty$. Более того, N и M имеют порядок b^{-3} и b^{-4} соответственно.) Именно, зафиксируем произвольную положительную функцию $\psi(x)$, которая стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ (например, итерированный сколько угодно раз логарифм $\psi(x) = \ln[\ln[\dots \ln[x] \dots]]$) и положим

$$\Delta N = \sqrt{N \ln N} \psi(N). \quad (4)$$

(Таким образом, с точностью до произвольно медленно растущего множителя величина ΔN есть просто $\sqrt{N \ln N}$.) Тогда справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют такие постоянные C_k , $k = 1, 2, \dots$, что*

$$\mathbf{P} \left(\left| \sum_{x,y} N_{xyz} - N \right| > \Delta N \right) \leq C_k N^{-k}. \quad (5)$$

Разумеется, вероятность в левой части формулы (5) определяется как отношение числа $\mathcal{N}(M, \Delta N)$ наборов $\{N_{xyz}\}$, удовлетворяющих условию (1) и таких, что

$$|N - \sum N_{xyz}| > \Delta N,$$

к общему числу $\mathcal{N}(M)$ наборов $\{N_{xyz}\}$, удовлетворяющих условию (1):

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{x,y,z} N_{xyz} - N\right| > \Delta N\right) := \frac{\mathcal{N}(M, \Delta N)}{\mathcal{N}(M)}. \quad (6)$$

Другая характеристика – это сумма $\sum_{x,y,z} (x+y+z)N_{xyz}$. Из условия задачи известно лишь, что она не превосходит M (и, разумеется, неотрицательна, поскольку все N_{xyz} неотрицательны). Оказывается, однако, что на самом деле для подавляющего большинства вариантов эта сумма весьма близка к M . Именно, положим

$$\Delta M = \frac{M}{N} \Delta N. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 2. *Существуют такие постоянные C_k , $k = 1, 2, \dots$, что*

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{x,y,z} (x+y+z)N_{xyz} - M\right| > \Delta M\right) \leq C_k N^{-k}. \quad (8)$$

Утверждения теорем 1 и 2 остаются верными и в том случае, если суммирование по (x, y, z) распространяется не на все точки, а лишь на некоторое подмножество целочисленной решетки (причем постоянные C_k не будут зависеть от конкретного выбора подмножества). При этом, конечно, N и M также следует заменить на соответствующие части сумм, входящих в формулы (2) и (3). Произвольные подмножества нас, впрочем, мало интересуют, и мы сформулируем соответствующие утверждения в нужном нам случае. Совокупность целочисленных точек (x, y, z) из положительного октанта, для которых

$$x + y + z = j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

назовем j -м уровнем энергии, а число q_j таких точек на этом уровне – его кратностью (нетрудно видеть, что $q_j = (j+1)(j+2)/2$). Обозначим теперь через N_j сумму всех чисел N_{xyz} , находящихся на j -м уровне энергии:

$$N_j = \sum_{x+y+z=j} N_{xyz}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Существуют такие постоянные C_k , $k = 1, 2, \dots$, что для любого $l \in \mathbb{Z}_+$ справедливы оценки*

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^l N_j - \sum_{j=1}^l \frac{(j+1)(j+2)}{2(e^{bj} - 1)}\right| > \Delta N\right) \leq C_k N^{-k}, \quad (9)$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^l j N_j - \sum_{j=1}^l \frac{j(j+1)(j+2)}{2(e^{bj} - 1)}\right| > \Delta M\right) \leq C_k N^{-k}. \quad (10)$$

Оценим теперь *энтропию* S рассматриваемой системы. Под энтропией в данной работе будем понимать логарифм числа $\mathcal{N}(M)$ всевозможных целочисленных неотрицательных наборов $\{N_{xyz}\}$, удовлетворяющих ограничению (1):

$$S = \ln \mathcal{N}(M).$$

(Определение, связанное с колмогоровской сложностью, используется в [7]; здесь мы эти вопросы не затрагиваем.)

ТЕОРЕМА 4. При $M \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$S \equiv \ln \mathcal{N}(M) = bM - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j+1)(j+2)}{2} \ln(1 - e^{-bj}) + O(\ln N). \quad (11)$$

Закончим рассмотрение примера, вернувшись к формулам (2) и (3). Эти формулы задают M и N как суммы некоторых рядов. Оказывается, однако, что эти ряды можно приблизить интегралами, интегральными суммами которых они являются. Справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть M и N заданы формулами (2) и (3). Тогда при $M \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$N = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{2(e^{bx} - 1)} + O(N^{2/3}), \quad (12)$$

$$M = \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{2(e^{bx} - 1)} + O(N). \quad (13)$$

Точность выражений (12) и (13), однако, недостаточна для того, чтобы в теоремах 1–4 можно было заменить суммы (2) и (3) на интегралы (12) и (13). К ним нужно добавить последующие члены разложения, полученные из формулы Эйлера–Маклорена. Соответствующие результаты описаны ниже в п. 1.3.3.

1.2. Постановка задачи. Отталкиваясь от описанного выше примера, рассмотрим теперь общую постановку задачи для системы произвольной размерности и при возможном наличии ограничений типа “парастатистики”.

1.2.1. *Системы целой положительной размерности.* Рассмотрим положительный квадрант d -мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$ и каждой его точке $(j_1, \dots, j_d)$ (кроме точки 0) сопоставим неотрицательное целое число

$$N_{j_1 \dots j_d} \in \{0, 1, \dots, R_{j_1 + \dots + j_d}\}.$$

Здесь каждое из чисел $R_j > 0$, $j = 1, 2, \dots$ – либо целое положительное, либо $+\infty$ (в последнем случае соответствующее число $N_{j_1 \dots j_d}$ может быть любым целым неотрицательным).

Рассмотрим всевозможные такие наборы

$$\{N_{j_1 \dots j_d}\}, \quad j_1, \dots, j_d \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad j_1 + \dots + j_d > 0, \quad (14)$$

удовлетворяющие условию

$$\sum_{j_1, \dots, j_d} (j_1 + \dots + j_d) N_{j_1 \dots j_d} \leq M, \quad (15)$$

где $M > 0$ – заданное целое число, а сумма берется по всем значениям индексов $j_1, \dots, j_d$, указанных в (14). По тем же причинам, что и в рассмотренном выше примере, число $\mathcal{N}(M)$ таких наборов конечно. Считая их равноправными (равновероятными), поставим следующие задачи:

- 1) вычислить значение N , около которого концентрируется большинство значений суммы $\sum_{j_1, \dots, j_d} N_{j_1 \dots j_d}$, и доказать соответствующую оценку, аналогичную полученной в теореме 1, а также получить подобную оценку для M ;
- 2) найти асимптотические кумулятивные распределения, аналогичные указанным в теореме 3, по уровням энергии;
- 3) найти асимптотическую формулу для энтропии $S = \ln \mathcal{N}(M)$.

1.2.2. Системы произвольной размерности. Чтобы обобщить указанную выше постановку на случай дробных “размерностей” d , переформулируем ее так, чтобы избавиться от непосредственного упоминания решетки $\mathbb{Z}^d$ и индексов $j_1, \dots, j_d$. Именно, пусть j – некоторый уровень энергии, и пусть q_i – его кратность, т.е. число различных наборов неотрицательных целых чисел $j_1, \dots, j_d$, для которых справедливо соотношение

$$j = j_1 + \dots + j_d.$$

Перенумеруем все числа $N_{j_1 \dots j_d}$, лежащие на одном и том же уровне энергии j , в произвольном фиксированном порядке от 1 до q_j и будем в дальнейшем обозначать их через N_{jk} , $k = 1, \dots, q_i$. Далее, через N_j обозначим сумму всех N_{jk} для заданного уровня энергии j ,

$$N_j = \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk}. \quad (16)$$

Теперь $N_{jk} \in \{0, 1, \dots, R_j\}$, а условие (15) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{\infty} j N_j \equiv \sum_{j=1}^{\infty} j \sum_{k=1}^{q_i} N_{jk} \leq M, \quad (17)$$

и чтобы обобщить постановку задачи на произвольные d , осталось выяснить, каким образом можно задавать в таком случае кратности q_i . Напомним прежде всего формулу для q_j при натуральных d :

$$q_j = \frac{(j + d - 1)!}{(d - 1)!j!} \equiv C_{j+d-1}^j. \quad (18)$$

Правую часть выражения (18) можно записать через Γ -функцию в виде

$$q_j = \frac{\Gamma(j + d)}{\Gamma(d)\Gamma(j + 1)}. \quad (19)$$

Это выражение представляет собой аналитическую функцию от d , т.е. задает “аналитическое продолжение” выражения (18) для q_i по параметру d . Этим мы и воспользуемся, определяя кратности для значений d , не являющихся натуральными числами.

В данной работе мы всюду считаем, что $d \geq 1$. Случай $d < 1$ (и, в частности, случай отрицательной размерности) будет рассмотрен в другом месте (см. по этому поводу также [8]).

При дробном d выражение (19) непосредственно использовать нельзя, поскольку кратности должны быть целыми числами. Поэтому положим

$$q_j = \left\lfloor \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} \right\rfloor, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

1.3. Основные результаты. Перейдем к изложению результатов. Доказательства даны в последующих параграфах.

1.3.1. *Определение системы и энтропия.* Будем рассматривать систему размерности $d \geq 1$, определяемую следующим образом.

Для уровней энергии $j = 1, 2, \dots$ кратностей (20) и заданных максимальных “заселенностей” $R_j \in \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ каждого из подуровней рассматриваем всевозможные наборы неотрицательных чисел N_{jk} , $k = 1, \dots, q_j$, таких, что

$$N_{jk} \in \{0, 1, \dots, R_j\} \quad (\text{или } N_{jk} \in \{0, 1, 2, \dots\}, \text{ если } R_j = \infty), \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} \leq M. \quad (22)$$

Все такие наборы считаем равновероятными.

Описанная выше система полностью определяется размерностью d , числом M и последовательностью $\{R_j\}$. Введем зависящие от указанных данных числовые характеристики системы, которые играют важную роль в формулировке результатов.

Определим число $b = b(M)$ как положительное решение уравнения

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} j \left[\frac{q_j}{e^{bj} - 1} - \frac{q_j(R_j + 1)}{e^{(R_j+1)b} - 1} \right]. \quad (23)$$

(Здесь и в дальнейшем мы принимаем для сокращения записи соглашение, при котором подразумевается, что в такого рода суммах слагаемые, содержащие R_j , опускаются для тех j , для которых $R_j = \infty$.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для любого $M > 0$ уравнение (23) имеет единственное решение $b = b(M) > 0$. Функция $b(M)$ монотонно убывает и стремится к нулю при $M \rightarrow \infty$. Более точно, при $M \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$M \asymp b^{-d-1}. \quad (24)$$

Здесь запись $A \asymp B$ означает, что частное A/B ограничено сверху и снизу положительными постоянными.

Доказательство будет дано в п. 4.2.

Как мы увидим ниже, выражения в квадратных скобках в формуле (23) играют роль “предельного распределения”, вблизи которого в определенном смысле концентрируются для большинства вариантов суммарные числа заполнения

$$N_j = \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} \quad (25)$$

соответствующих уровней j . Поэтому естественно ввести для этих выражений специальное обозначение. Именно, мы положим

$$\bar{N}_j = q_j \left[\frac{1}{e^{bj} - 1} - \frac{R_j + 1}{e^{(R_j+1)bj} - 1} \right], \quad j = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

где b – решение уравнения (23). Далее, обозначим через

$$N = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{N}_j \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{q_j}{e^{bj} - 1} - \frac{q_j(R_j + 1)}{e^{(R_j+1)bj} - 1} \right] \quad (27)$$

сумму всех чисел (26). Число N , как мы опять же увидим ниже, представляет собой то значение, около которого концентрируются в большинстве вариантов сумма чисел заполнения, т.е. общее число частиц в системе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $d > 1$. Тогда для величины N , задаваемой формулой (27), выполнены при $M \rightarrow \infty$ соотношения

$$N \asymp b^{-d}, \quad M \asymp N^{(d+1)/d}. \quad (28)$$

Если $d = 1$ и при этом все R_j одинаковы и конечны, $R_j = R < \infty$ для всех j , то справедливы те же соотношения. Наконец, если $d = 1$ и $R_j = \infty$ для всех j , то выполнена оценка

$$N \asymp b^{-1} |\ln b|. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в п. 4.2.

Всюду далее (если явно не оговорено противное) считается, что M , N и b связаны формулами (23), (27).

Обозначим через $\mathcal{N}(M)$ общее число наборов $\{N_{jk}\}$, удовлетворяющих ограничениям (21), (22).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Энтропией рассматриваемой системы назовем число

$$S = \ln \mathcal{N}(M). \quad (30)$$

Асимптотику энтропии при $M \rightarrow \infty$ дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 9. При $M \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$S \equiv \ln \mathcal{N}(M) = bM + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}} + O(\ln N). \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будет дано в п. 2.2.

1.3.2. Теоремы о концентрации. Всюду в этом пункте предполагается, что $d > 2$. Доказательства теорем из этого пункта будут даны в п. 3.2.

Пусть $\psi(x)$ – фиксированная положительная функция, которая стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, и пусть

$$\Delta N = \sqrt{N \ln N} \psi(N), \quad \Delta M = \frac{M}{N} \Delta N. \quad (32)$$

ТЕОРЕМА 10. *Существуют такие постоянные C_k , $k = 1, 2, \dots$, что*

$$P\left(\left|\sum_j N_j - N\right| > \Delta N\right) \leq C_k N^{-k}, \quad (33)$$

$$P\left(\left|\sum_j j N_j - M\right| > \Delta M\right) \leq C_k N^{-k}. \quad (34)$$

Для кумулятивных вероятностей справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 11. *Существуют такие постоянные C_k , $k = 1, 2, \dots$, что для любого $l \in \mathbb{Z}_+$ справедливы оценки*

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^l N_j - \sum_{j=1}^l \bar{N}_j\right| > \Delta N\right) \leq C_k N^{-k}, \quad (35)$$

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^l j N_j - \sum_{j=1}^l j \bar{N}_j\right| > \Delta M\right) \leq C_k N^{-k}, \quad (36)$$

где числа $\bar{N}_j$ определены в (26).

Теоремы 10 и 11 суть частные случаи следующей более общей теоремы.

ТЕОРЕМА 12. *Пусть $f = \{f_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, – произвольная последовательность комплексных чисел, такая, что*

$$|f_j| \leq C_0 j^\alpha, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (37)$$

где $\alpha \in [0, 1]$ – заданное число. Обозначим

$$\Delta = N^{\alpha/d} \Delta_N, \quad (38)$$

где $\Delta_N = \sqrt{N \ln N} \psi(N)$, а $\psi(x)$ – функция, сколь угодно медленно растущая на бесконечности (см. (32)).

Пусть набор $\{N_{jk}\}$ неотрицательных целых чисел случайным и равновероятным для всех вариантов образом выбирается из множества (21), (22). Определим числа N_j второй из формул в (22). Тогда существуют такие постоянные C_k , $k = 1, 2, \dots$, зависящие только от α и C_0 , что при всех M справедливы оценки

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^{\infty} f_j (N_j - \bar{N}_j)\right| > \Delta\right) \leq C_k N^{-k}, \quad (39)$$

где числа $\bar{N}_j$ определены в (26).

Теорема 12 фактически устанавливает слабую сходимость величин N_j с вероятностью 1 к предельному распределению $\bar{N}_j$ при $M \rightarrow \infty$. Оказывается, однако, что справедлив и более сильный результат, который мы сформулируем для случая $R_j = \infty$, $j = 1, 2, \dots$.

Определим случайную функцию $\xi_M(x)$ на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ следующим образом. Из множества Ω_M всех наборов $\{N_{jk}\}$, $k = 1, \dots, q_j$, неотрицательных целых

чисел таких, что

$$N_{jk} \in \{0, 1, \dots\}, \quad (40)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} \leq M, \quad (41)$$

случайным образом (считая, что все они равновероятны) выбираем какой-либо набор $\{N_{jk}\}$ и полагаем

$$\xi_M(x) = b^{d-1} \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} \quad \text{при } x \in [b(j-1), bj), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (42)$$

Таким образом, получаем последовательность $\xi_M(x)$, $M = 1, 2, \dots$, независимых случайных функций.

Определим также функцию $\xi(x)$ формулой

$$\xi(x) = \frac{1}{\Gamma(d-1)} \frac{x^{d-1}}{e^x - 1}. \quad (43)$$

Зафиксируем неотрицательные числа γ и δ такие, что

$$\gamma < 1 - \frac{2}{d}, \quad \delta < \frac{2}{d}, \quad (44)$$

а также достаточно большую положительную постоянную μ (точное значение которой можно получить, если проследить за константами в доказательстве теоремы 13). Для каждого M положим ¹

$$\sigma = N^{-\delta}$$

и зададим точки $x_l \in \mathbb{R}_+$, $l = 1, \dots, s \leq N^\gamma$, формулой

$$x_l = \mu \sigma l, \quad l = 1, \dots, s.$$

Пусть $f_l(x)$ – гауссовы экспоненты

$$f_l(x) = e^{-(x-x_l)^2/2\sigma^2}, \quad l = 1, \dots, s, \quad (45)$$

а P_M – проектор в $L^2(\mathbb{R}_+)$ на подпространство, порожденное функциями (45).

ТЕОРЕМА 13. *С вероятностью 1 имеет место сходимость*

$$\|P_M(\xi_M - \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \rightarrow 0 \quad \text{при } M \rightarrow \infty. \quad (46)$$

Теорема 13 допускает эквивалентную “невероятностную” формулировку. Рассмотрим прямое произведение

$$\Omega^\infty = \prod_{M=1}^{\infty} \Omega_M$$

определенных выше конечных множеств Ω_M и снабдим его минимальной σ -алгеброй множеств, содержащей всевозможные *цилиндрические множества*

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \times \Omega_{k+1} \times \Omega_{k+2} \dots, \quad (47)$$

¹Напомним, что M , N и b связаны формулами (23) и (27).

где k – произвольное конечное, а $A_j \subset \Omega_j$ – произвольные подмножества. Определим на Ω^∞ меру, задавая ее на множествах вида (47) формулой

$$d\mu(A) = \frac{\#(A_1)}{\#(\Omega_1)} \times \frac{\#(A_2)}{\#(\Omega_2)} \times \dots \times \frac{\#(A_k)}{\#(\Omega_k)}$$

и продолжая на всю σ -алгебру стандартным образом. (Здесь $\#(A)$ – число элементов в множестве A .)

Зададим теперь функции $\xi_M(x, \omega)$, $x \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \Omega^\infty$, полагая

$$\xi(x, \omega) = \frac{1}{\Gamma(d-1)} \frac{x^{d-1}}{e^x - 1}, \quad (48)$$

$$\xi_M(x, \omega) = b^{d-1} \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} \quad \text{при } x \in [b(j-1), bj), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (49)$$

если $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_M, \dots)$, причем $\omega_M = \{N_{jk}\}$. Таким образом, ξ вовсе не зависит от аргумента ω , а ξ_M зависит только от компоненты ω_M . Так определенные функции являются элементами пространства

$$B = L^1(\Omega^\infty, d\mu; L^2(\mathbb{R}_+))$$

функций класса L^1 относительно меры $d\mu$ на пространстве Ω^∞ со значениями в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Определим проекторы $\mathcal{P}_M$ в пространстве B , полагая

$$[\mathcal{P}_M u](\cdot, \omega) = Pu(\cdot, \omega)$$

(определенный выше проектор P применяется к функции u , рассматриваемой как элемент пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$ при каждом фиксированном ω).

ТЕОРЕМА 14. *Имеет место сходимость*

$$\|\mathcal{P}_M(\xi_M - \xi)\|_B \rightarrow 0 \quad \text{при } M \rightarrow \infty. \quad (50)$$

1.3.3. Интегральные формулы для M и N и поправки к ним. В формулах (27) и (23) величины N и M выражаются как функции от b в виде бесконечных сумм. Оказывается, однако, что если $R(x) \equiv R = \text{const}$, то эти функции можно разложить по степеням b (при этом число членов разложения зависит от размерности d). Сформулируем соответствующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. *Пусть $R_j \equiv R = \text{const}$. Тогда при $b \rightarrow 0$ имеют место асимптотические разложения*

$$M = b^{-d-1}(K_0 + K_1 b + \dots + K_m b^m + O(b^{m+1})), \quad (51)$$

$$N = b^{-d}(L_0 + L_1 b + \dots + L_m b^m + O(b^{m+1})), \quad (52)$$

где $m = \lceil d/2 - 1 \rceil$ – наименьшее целое число, не меньшее, чем $d/2 - 1$, а коэффициенты разложения выражаются явными формулами. В частности,

$$K_0 = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_0^\infty \left[\frac{x^d}{e^x - 1} - \frac{(R+1)x^d}{e^{x(R+1)} - 1} \right] dx = \frac{\Gamma(d+1)\zeta(d+1)(1 - (R+1)^{-d})}{\Gamma(d)}, \quad (53)$$

$$L_0 = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_0^\infty \left[\frac{x^{d-1}}{e^x - 1} - \frac{(R+1)x^{d-1}}{e^{x(R+1)} - 1} \right] dx = \zeta(d)(1 - (R+1)^{-d+1}), \quad (54)$$

$$K_1 = \frac{d(d-1)}{2\Gamma(d)} \int_0^\infty \left[\frac{x^{d-1}}{e^x - 1} - \frac{(R+1)x^{d-1}}{e^{x(R+1)} - 1} \right] dx = \frac{d(d-1)(1 - (R+1)^{-d+1})\zeta(d)}{2}, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{d(d-1)}{2\Gamma(d)} \int_0^\infty \left[\frac{x^{d-2}}{e^x - 1} - \frac{(R+1)x^{d-2}}{e^{x(R+1)} - 1} \right] dx \\ &= \frac{d(d-1)\Gamma(d-1)\zeta(d-1)}{2\Gamma(d)} (1 - (R+1)^{-d+2}), \end{aligned} \quad (56)$$

где $\zeta(s)$ – дзета-функция Эйлера. (Из доказательства будет ясно, как в явном виде вычислять последующие члены.) Если $R = \infty$, то содержащие $R+1$ слагаемые в правых частях формул (51) и (52) следует отбросить.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Как показывает теорема 10, не имеет смысла получать асимптотические разложения величин M и N с большей точностью, чем это сделано в предложении 15. Действительно, вычислять N имеет смысл с точностью до $O(N^{1/2}) = O(b^{-d/2})$, а M – с точностью до $O((M/N)N^{1/2}) = O(b^{-d/2+1})$. Отсюда и получается условие на m .

2. Общее число вариантов и энтропия

В этом параграфе мы докажем оценки снизу и сверху для общего числа $\mathcal{N}(M)$ вариантов наборов $\{N_{jk}\}$, удовлетворяющих условиям (21), (22), и выведем из этих оценок теорему 9 об энтропии.

2.1. Оценка снизу для общего числа вариантов $\mathcal{N}(M)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. Для общего числа вариантов $\mathcal{N}(M)$ справедлива при $M \rightarrow \infty$ оценка

$$\mathcal{N}(M) \geq Cb^{1+d/2} \exp \left\{ bM + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}} \right\}, \quad (57)$$

где $b = b(M)$ определяется из уравнения (23).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать оценку (57), нам будет удобно наряду с общим числом $\mathcal{N}(M)$ вариантов наборов $\{N_{jk}\}$, для которых суммарная энергия не превосходит M , ввести число $\mathcal{N}_0(M)$ наборов с энергией, в точности равной M , т.е. число целочисленных наборов $\{N_{jk}\}$, $j = 1, 2, \dots$, $k = 1, \dots, q_j$, таких, что

$$N_{jk} \in \{0, 1, \dots, R_j\} \quad (\text{или } N_{jk} \in \{0, 1, 2, \dots\}, \text{ если } R_j = \infty), \quad (58)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} jN_j \equiv \sum_{j=1}^{\infty} j \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} = M. \quad (59)$$

Очевидно, что $\mathcal{N}(M) \geq \mathcal{N}_0(M)$, поэтому достаточно доказать оценку снизу для $\mathcal{N}_0(M)$. Дальнейшие рассуждения состоят из двух частей. Сначала мы выразим $\mathcal{N}_0(M)$ в виде быстроосциллирующего интеграла, а затем оценим этот интеграл с помощью рассуждений, близких к методу Лапласа.

2.1.1. *Интегральная формула для $\mathcal{N}_0(M)$.* В этом пункте мы предъявим для числа $\mathcal{N}_0(M)$ интегральную формулу. Для того, чтобы ее получить, представим $\mathcal{N}_0(M)$ в виде суммы

$$\mathcal{N}_0(M) = \sum_{\{N_{jk}\}} \delta_{M, \sum_{j=1}^{\infty} j N_j} = \sum_{\{N_{jk}\}} \delta_{M, \sum_{j=1}^{\infty} j N_j} e^{b(M - \sum_{j=1}^{\infty} j N_j)} \quad (60)$$

по всевозможным наборам $\{N_{jk}\}$ неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих условию (58), где

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

– символ Кронекера. Справедливость представления (60) вытекает из того, что показатель экспоненты в (60) равен нулю для всех ненулевых членов, так что это выражение есть просто сумма единиц по всем наборам $\{N_{jk}\}$, удовлетворяющим (58), (59). Формула (60) справедлива, разумеется, для произвольного b . В дальнейшем в качестве b мы будем использовать решение $b = b(M) > 0$ уравнения (23). Подставляя в (60) представление символа Кронекера в виде

$$\delta_{mn} = \frac{b}{2\pi} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{ib\varphi(m-n)} d\varphi,$$

и переставляя суммирование и интегрирование (что законно, так как даже если ряд из подынтегральных выражений и бесконечен, все равно при $b > 0$ он абсолютно сходится), получаем

$$\mathcal{N}_0(M) = \frac{be^{bM}}{2\pi} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{ib\varphi M} \sum_{\{N_{jk}\}} e^{-b \sum_{j=1}^{\infty} j N_j (1+i\varphi)} d\varphi. \quad (61)$$

Далее, разлагая экспоненту в произведение экспонент, а сумму – в произведение сумм по всем N_{jk} и суммируя геометрические прогрессии, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\{N_{jk}\}} e^{-b \sum_{j=1}^{\infty} j N_j (1+i\varphi)} &= \sum_{\{N_{jk}\}} e^{-b \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} j N_{jk} (1+i\varphi)} \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{N_{j1}=0}^{R_j} e^{-bj N_{j1} (1+i\varphi)} \dots \sum_{N_{jq_j}=0}^{R_j} e^{-bj N_{jq_j} (1+i\varphi)} \right) \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-(R_j+1)bj(1+i\varphi)}}{1 - e^{-bj(1+i\varphi)}} \right)^{q_j}. \end{aligned}$$

Подстановка этого выражения в (61) дает

$$\mathcal{N}_0(M) = \frac{be^{bM}}{2\pi} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} \exp \left\{ ib\varphi M + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj(1+i\varphi)}}{1 - e^{-bj(1+i\varphi)}} \right\} d\varphi. \quad (62)$$

2.1.2. Оценка снизу для $\mathcal{N}_0(M)$ при $M \rightarrow \infty$. Оценим теперь $\mathcal{N}_0(M)$ снизу, пользуясь интегральным представлением (62). Перепишем (62) в виде

$$\mathcal{N}_0(M) = \frac{be^{bM}}{2\pi} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} \exp\{b^{-d}\Phi(\varphi)\} d\varphi, \quad (63)$$

где фаза $\Phi(\varphi)$ задается формулой

$$\Phi(\varphi) = ib^{d+1}M\varphi + b^d \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj(1+i\varphi)}}{1 - e^{-bj(1+i\varphi)}}. \quad (64)$$

Интеграл (63) можно понимать как интеграл по окружности радиуса $1/b$. Действительно, второе слагаемое в формуле (64) само $2\pi/b$ -периодично, а значения первого слагаемого, умноженного на b^{-d} , на концах отрезка интегрирования отличаются на $2\pi M$, так что экспонента в (63) $2\pi/b$ -периодична. (Напомним, что M пробегает целые положительные значения.)

Оценить интеграл (63) можно с помощью метода Лапласа [9], считая малым параметром величину $h = b^{-d}$. Отметим, что сама фазовая функция $\Phi(\varphi)$ достаточно сложным образом зависит от этого параметра. Следующая лемма по существу означает, что условия применимости метода Лапласа выполнены в рассматриваемом случае. Однако формулировку метода Лапласа в нужной форме нам в литературе обнаружить не удалось, и поэтому далее приходится непосредственно провести оценку интеграла, используя полученные в лемме утверждения. Рассуждения при этом оказываются несколько проще, чем они были бы в доказательстве метода Лапласа, поскольку нас интересует не асимптотика, а лишь оценка снизу. (Подчеркнем, что никаких принципиальных препятствий к получению асимптотики нет.)

ЛЕММА 18. *Задаваемая формулой (64) фазовая функция $\Phi(\varphi)$ обладает следующими свойствами.*

- 1) Все производные фазовой функции (64) ограничены равномерно по $M \rightarrow \infty$ постоянными, не зависящими от выбора последовательности $\{R_j\}$.
- 2) Фазовая функция имеет при каждом M невырожденную стационарную точку $\varphi = 0 \pmod{2\pi/b}$.
- 3) В точке $\varphi = 0$ мнимая часть функции $\Phi(\varphi)$ равна нулю, а ее вещественная часть достигает абсолютного максимума, причем для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, не зависящее от числа M и последовательности $\{R_j\}$, что

$$\operatorname{Re} \Phi(\varphi) < \operatorname{Re} \Phi(0) - \delta \quad \text{при} \quad \varphi \in [-\pi/b, -\varepsilon] \cup (\varepsilon, \pi/b]. \quad (65)$$

- 4) Вторая производная $\Phi''(0)$ вещественна и удовлетворяет оценке

$$\Phi''(0) < -C < 0, \quad (66)$$

где постоянная C не зависит от M и последовательности $\{R_j\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Докажем, что производные функции $\Phi(\varphi)$ равномерно ограничены. Для этого вычислим их. Начнем с первой производной:

$$\Phi'(\varphi) = ib^{d+1}M + ib^{d+1} \sum_{j=1}^{\infty} j q_j \left[\frac{R_j + 1}{e^{(R_j+1)bj(1+i\varphi)} - 1} - \frac{1}{e^{bj(1+i\varphi)} - 1} \right]. \quad (67)$$

Первое слагаемое здесь ограничено, поскольку $M \asymp b^{-d-1}$ в силу предложения 6. Чтобы оценить второе слагаемое, заметим, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{e^{bj(1+i\varphi)} - 1} \right| &= \left| \frac{1}{e^{bj}(\cos bj\varphi + i \sin bj\varphi) - 1} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{(e^{bj} \cos bj\varphi - 1)^2 + (e^{bj} \sin bj\varphi)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(e^{bj} - 1)^2 + 2e^{bj}(1 - \cos bj\varphi)}} \leq \frac{1}{e^{bj} - 1} \end{aligned} \quad (68)$$

(причем равенство достигается только тогда, когда $bj\varphi = 0 \pmod{2\pi}$). Аналогично,

$$\left| \frac{R_j + 1}{e^{(R_j+1)bj(1+i\varphi)} - 1} \right| \leq \frac{R_j + 1}{e^{(R_j+1)bj} - 1} < \frac{1}{e^{bj} - 1}; \quad (69)$$

второе неравенство в (69) верно, поскольку

$$\frac{1}{e^{bj} - 1} - \frac{R_j + 1}{e^{(R_j+1)bj} - 1} = \frac{1}{e^{bj} - 1} \left[1 - \underbrace{\frac{R_j + 1}{1 + e^{bj} + e^{2bj} + \dots + e^{R_j bj}}}_{R_j + 1 \text{ слагаемых}} \right] > 0.$$

Далее, по формуле Стирлинга

$$q_j \simeq \frac{j^{d-1}}{\Gamma(d)}. \quad (70)$$

Применяя лемму 23 (при $l = d \geq 1$, $m = 1$ и $k = 0$), убеждаемся, что сумма в (67) имеет порядок не выше b^{-d-1} , так что и второе слагаемое в формуле для $\Phi'(\varphi)$ ограничено. Ограниченность первой производной доказана.

Вычислим последующие производные, начиная со второй. Имеем

$$\Phi''(\varphi) = b^{d+2} \sum_{j=1}^{\infty} q_j \left[\frac{(R_j + 1)^2 j^2 e^{(R_j+1)bj(1+i\varphi)}}{(e^{(R_j+1)bj(1+i\varphi)} - 1)^2} - \frac{j^2 e^{bj(1+i\varphi)}}{(e^{bj(1+i\varphi)} - 1)^2} \right], \quad (71)$$

а при $s \geq 2$

$$\Phi^{(s)}(\varphi) = b^{d+s} \sum_{2 \leq m \leq s} C_{skm} \sum_{j=1}^{\infty} q_j \left[\frac{(R_j + 1)^s j^s e^{(m-1)(R_j+1)bj(1+i\varphi)}}{(e^{(R_j+1)bj(1+i\varphi)} - 1)^m} - \frac{j^s e^{(m-1)bj(1+i\varphi)}}{(e^{bj(1+i\varphi)} - 1)^m} \right], \quad (72)$$

где C_{skm} – некоторые постоянные. Действительно, (71) получается из (67) непосредственным дифференцированием, а (72) согласуется с (71) при $s = 2$, так что остается лишь проверить индуктивный шаг $s \rightarrow s + 1$, для чего достаточно продифференцировать отдельное слагаемое в правой части (72). Например,

$$\left[\frac{e^{kbj(1+i\varphi)}}{(e^{bj(1+i\varphi)} - 1)^m} \right]' = \frac{ibje^{kbj(1+i\varphi)}}{(e^{bj(1+i\varphi)} - 1)^m} - \frac{imbje^{(k+1)bj(1+i\varphi)}}{(e^{bj(1+i\varphi)} - 1)^{m+1}},$$

и аналогично для слагаемого, содержащего $R_j + 1$.

Теперь, пользуясь оценками (68) и (69), асимптотикой (70) и леммами 23 и 24, получаем равномерную по $M \rightarrow \infty$ и последовательностям $\{R_j\}$ ограниченность производной $\Phi^{(s)}(\varphi)$ для любого s .

2. Покажем, что $\varphi = 0$ – стационарная точка фазовой функции. Действительно, при $\varphi = 0$ правая часть в (67) равна нулю в силу уравнения (23). Невырожденность доказана ниже в п. 4.

3. Из формулы (64) вытекает, что

$$\operatorname{Re} \Phi(\varphi) = b^d \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln |1 + e^{-bj(1+i\varphi)} + e^{-2bj(1+i\varphi)} + \dots + e^{-R_j bj(1+i\varphi)}|$$

(при $R_j = \infty$ ряд под знаком логарифма будет бесконечный) и соответственно

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi(0) - \operatorname{Re} \Phi(\varphi) &= b^d \sum_{j=1}^{\infty} q_j [\ln(1 + e^{-bj} + e^{-2bj} + \dots + e^{-R_j bj}) \\ &\quad - \ln |1 + e^{-bj(1+i\varphi)} + e^{-2bj(1+i\varphi)} + \dots + e^{-R_j bj(1+i\varphi)}|] \\ &\equiv b^d \sum_{j=1}^{\infty} q_j \Delta_j. \end{aligned} \quad (73)$$

Оценим отдельные слагаемые в сумме (73). Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |1 + e^{-bj(1+i\varphi)} + e^{-2bj(1+i\varphi)} + \dots + e^{-R_j bj(1+i\varphi)}| \\ \leq |1 + e^{-bj(1+i\varphi)}| + e^{-2bj} + \dots + e^{-R_j bj}, \end{aligned}$$

и поэтому, в силу монотонного возрастания логарифма,

$$\begin{aligned} \Delta_j &\geq \ln(1 + e^{-bj} + e^{-2bj} + \dots + e^{-R_j bj}) \\ &\quad - \ln(|1 + e^{-bj(1+i\varphi)}| + e^{-2bj} + \dots + e^{-R_j bj}) \\ &\geq \frac{1 + e^{-bj} - |1 + e^{-bj(1+i\varphi)}|}{1 + e^{-bj} + e^{-2bj} + \dots + e^{-R_j bj}} \\ &\geq (1 + e^{-bj} - |1 + e^{-bj(1+i\varphi)}|)(1 - e^{-bj}) \end{aligned} \quad (74)$$

(при переходе к предпоследней строчке мы воспользовались очевидным неравенством $\ln y - \ln x \geq (y - x)/y$ при $y > x > 0$).

Далее,

$$\begin{aligned} 1 + e^{-bj} - |1 + e^{-bj(1+i\varphi)}| &= 1 + e^{-bj} - \sqrt{(1 + e^{-bj} \cos bj\varphi)^2 + e^{-2bj} \sin^2 bj\varphi} \\ &= 1 + e^{-bj} - \sqrt{(1 + e^{-bj})^2 - 2e^{-bj}(1 - \cos bj\varphi)} \\ &= (1 + e^{-bj}) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2e^{-bj}}{(1 + e^{-bj})^2} (1 - \cos bj\varphi)} \right] \\ &\geq \frac{e^{-bj}}{1 + e^{-bj}} (1 - \cos bj\varphi) \geq \frac{e^{-bj}}{2} (1 - \cos bj\varphi) \end{aligned}$$

(при переходе к последней строчке мы воспользовались неравенством $1 - \sqrt{x} \geq (1 - x)/2$ при $x \in [0, 1]$). Подставляя это в (74), получаем

$$\Delta_j \geq \frac{1}{2} e^{-bj} (1 - e^{-bj}) (1 - \cos bj\varphi). \quad (75)$$

Итак, все Δ_j неотрицательны, а это значит, что $\operatorname{Re} \Phi(\varphi)$ действительно достигает абсолютного максимума при $\varphi = 0$.

Покажем теперь, что неравенство (65) выполняется для любого $\varepsilon > 0$ при подходящим образом подобранном $\delta > 0$. Зафиксируем не зависящие от b числа $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, $x_2 > x_1$; тогда

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} \Phi(0) - \operatorname{Re} \Phi(\varphi) \\
 &= b^d \sum_{j=1}^{\infty} q_j \Delta_j \\
 &\geq b^d \sum_{bj \in [x_1, x_2]} q_j \Delta_j \quad (\text{в силу неотрицательности } \Delta_j) \\
 &\geq K_1 b \sum_{bj \in [x_1, x_2]} (bj)^{d-1} e^{-bj} (1 - e^{-bj}) (1 - \cos bj\varphi) \quad (\text{в силу (70), (75)}) \\
 &\geq K_2 b \sum_{bj \in [x_1, x_2]} (1 - \cos bj\varphi),
 \end{aligned}$$

где постоянные $K_1, K_2 > 0$ зависят только от x_1, x_2 .

Пусть $j_1 = j_1(b)$, $j_2 = j_2(b)$ – минимальное и максимальное целые значения j , при которых $bj \in [x_1, x_2]$. Тогда

$$j_2 - j_1 \geq \frac{x_2 - x_1}{b} - 2.$$

Согласно [10; 1.341.3],

$$\begin{aligned}
 b \sum_{bj \in [x_1, x_2]} (1 - \cos bj\varphi) &= b \sum_{j=j_1}^{j_2} (1 - \cos(jb\varphi)) \\
 &= b \left[j_2 - j_1 + 1 + \frac{\cos((j_1 + j_2)b\varphi/2) \sin((j_2 - j_1 + 1)b\varphi/2)}{\sin(b\varphi/2)} \right] \\
 &\geq x_2 - x_1 - b - \left| \sin \frac{b\varphi}{2} \right|^{-1}.
 \end{aligned}$$

Пусть $\varphi \in [-\pi/b, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi/b]$; в силу нечетности синуса достаточно рассмотреть случай, когда $\varphi > 0$. Тогда $b\varphi/2 \in [b\varepsilon/2, \pi/2]$, так что

$$\sin \frac{b\varphi}{2} \geq \sin \frac{b\varepsilon}{2} \geq \frac{2}{\pi} \frac{b\varepsilon}{2} = \frac{b\varepsilon}{\pi}, \quad \sin^{-1} \frac{b\varphi}{2} \leq \frac{\pi}{b\varepsilon},$$

и, комбинируя это с предыдущими неравенствами, получаем, равномерно по b при $b \rightarrow 0$,

$$\operatorname{Re} \Phi(0) - \operatorname{Re} \Phi(\varphi) \geq K_2 \left[x_2 - x_1 - b - \frac{\pi}{\varepsilon} \right].$$

(напомним, что положительная постоянная K_2 зависит от x_1, x_2). Теперь для завершения доказательства п. 3 достаточно выбрать $x_2 > x_1 + \pi/\varepsilon + 1$.

4. Полагая $\varphi = 0$ в формуле (71), получаем

$$\Phi''(0) = -b^{d+2} \sum_{j=1}^{\infty} q_j j^2 \left[\frac{e^{bj}}{(e^{bj} - 1)^2} - \frac{(R_j + 1)^2 e^{(R_j+1)bj}}{(e^{(R_j+1)bj} - 1)^2} \right]. \quad (76)$$

Рассмотрим функцию

$$f(a) = \frac{a^2 e^{ax}}{(e^{ax} - 1)^2}, \quad (77)$$

где $x > 0$ произвольное фиксированное число.

УТВЕРЖДЕНИЕ 19. *Функция $f(a)$ монотонно убывает при $a > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что $f'(a) < 0$ при $a > 0$. Непосредственное вычисление дает

$$f'(a) = \frac{ae^{ax}}{(e^{ax} - 1)^3} [2e^{ax} - axe^{ax} - ax - 2],$$

так что достаточно показать, что выражение в квадратных скобках отрицательно, т.е.

$$\psi(z) \equiv 2e^z - ze^z - z - 2 < 0 \quad \text{при } z > 0.$$

Это действительно так, поскольку

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(z) = e^z - ze^z - 1 = \sum_{j=2}^{\infty} z^j \left(\frac{1}{j!} - \frac{1}{(j-1)!} \right),$$

и все коэффициенты последнего ряда отрицательны, что и доказывает утверждение 19.

Вернемся к доказательству утверждения 4 леммы 18. Пользуясь утверждением 19, из (76) заключаем, поскольку $R_j \geq 1$, что

$$\Phi''(0) \leq -b^{d+2} \sum_{j=1}^{\infty} q_j j^2 \left[\frac{e^{bj}}{(e^{bj} - 1)^2} - \frac{4e^{2bj}}{(e^{2bj} - 1)^2} \right] = -b^{d+2} \sum_{j=1}^{\infty} q_j j^2 \frac{e^{bj}}{(e^{bj} + 1)^2}. \quad (78)$$

Остается воспользоваться асимптотикой (70) кратностей q_j и применить лемму 23.

Лемма 18 доказана.

Продолжим доказательство предложения 17.

Теперь мы можем оценить интеграл (63). По лемме 18 все производные функции $\Phi(\varphi)$ равномерно ограничены. Кроме того, если представить ее в виде $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 вещественны, то

$$\Phi_1'(0) = 0, \quad \Phi_1''(0) < -C < 0, \quad \Phi_2'(0) = \Phi_2''(0) = 0.$$

Отсюда с помощью формулы Тейлора с остаточным членом получаем при $|\varphi| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, оценки

$$\Phi(0) - C_1|\varphi|^2 \leq \Phi_1(\varphi) \leq \Phi(0) - C_2|\varphi|^2, \quad (79)$$

$$|\Phi_2(\varphi)| \leq C_3|\varphi|^3 \quad (80)$$

с положительными постоянными C_j , не зависящими от M и последовательности $\{R_j\}$. Пусть

$$1 = \psi_1(\varphi) + \psi_2(\varphi)$$

– неотрицательное гладкое разбиение единицы на окружности $S^1 \ni \varphi$ радиуса b такое, что $\text{supp } \psi_1 \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ и $\psi_1(\varphi) = 1$ при $\varphi \in [-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$. Представим интеграл

$$I = \int_{S^1} \exp\{b^{-d}\Phi(\varphi)\} d\varphi$$

в виде суммы

$$I = \int_{S^1} \exp\{b^{-d}\Phi(\varphi)\} \psi_1(\varphi) d\varphi + \int_{S^1} \exp\{b^{-d}\Phi(\varphi)\} \psi_2(\varphi) d\varphi \equiv I_1 + I_2.$$

По лемме 18, п. 3

$$\text{Re } \Phi(\varphi) \leq \Phi(0) - \delta, \quad \delta > 0,$$

на носителе подынтегрального выражения в I_2 , а мера носителя имеет порядок b^{-1} . Поэтому

$$|I_2| \leq K \exp\{-b^{-d}\delta/2 + b^{-d}\Phi(0)\}, \quad b \rightarrow 0, \quad (81)$$

с некоторой постоянной K . Оценим теперь интеграл I_1 . Для удобства обозначим временно через $h = b^d$ малый параметр, который стоит в экспоненте нашего интеграла. В отрезке $D = [-\varepsilon, \varepsilon]$ выделим два подотрезка $D_{1/2} \subset D_{1/3} \subset D$, полагая

$$D_{1/2} = [-\varepsilon h^{1/2}, \varepsilon h^{1/2}], \quad D_{1/3} = [-\varepsilon h^{1/3}, \varepsilon h^{1/3}]. \quad (82)$$

Тогда

$$\left| \frac{\Phi_2}{h} \right| \leq C_3 \varepsilon^3 \quad \text{при } \varphi \in D_{1/3},$$

так что (при достаточно малом ε) на отрезке $D_{1/3}$ мнимая часть аргумента экспоненты мала и справедливо соотношение

$$\text{Re } e^{\Phi(\varphi)/h} \geq \frac{1}{2} e^{\Phi_1(\varphi)/h}, \quad \varphi \in D_{1/3}. \quad (83)$$

Далее,

$$\frac{\Phi(0)}{h} \geq \frac{\Phi_1(\varphi)}{h} \geq \frac{\Phi(0)}{h} - C_1 \varepsilon^2, \quad \varphi \in D_{1/2}. \quad (84)$$

Комбинируя это с предыдущим неравенством и учитывая, что длина интервала $D_{1/2}$ равна $2\varepsilon h^{1/2}$, получаем

$$\text{Re} \int_{D_{1/2}} e^{\Phi(\varphi)/h} \psi_1(\varphi) d\varphi \geq C_4 e^{\Phi(0)/h} h^{1/2}.$$

Далее,

$$\text{Re} \int_{D_{1/3} \setminus D_{1/2}} e^{\Phi(\varphi)/h} \psi_1(\varphi) d\varphi \geq 0$$

в силу (83). Кроме этого, справедливо неравенство

$$\frac{\Phi_1(\varphi)}{h} \leq \frac{\Phi_1(0)}{h} - C_2 \varepsilon^2 h^{-1/3}, \quad \varphi \in D \setminus D_{1/3},$$

так что

$$\left| \int_{D \setminus D_{1/3}} e^{\Phi(\varphi)/h} \psi_1(\varphi) d\varphi \right| \leq C_5 e^{\Phi(0)/h} e^{-C_2 \varepsilon^2 h^{-1/3}}.$$

Комбинируя все предыдущие оценки, получаем

$$I = \operatorname{Re} I \geq C_6 b^{d/2} \exp\{b^{-d} \Phi(0)\}.$$

Остается подставить эту оценку в формулу (63) для $\mathcal{N}_0(M)$ с учетом формулы (64) для фазовой функции, и в силу неравенства $\mathcal{N}(M) > \mathcal{N}_0(M)$ мы приходим к оценке (57) для $\mathcal{N}(M)$. Предложение 17 доказано.

2.2. Оценка сверху для общего числа вариантов $\mathcal{N}(M)$ и формула для энтропии. Верхнюю оценку для общего числа вариантов получить оказывается гораздо проще, чем нижнюю. Здесь мы, по существу, используем так называемую статистическую сумму (см., например, [6]). В силу условия (22) на множестве всех наборов $\{N_{jk}\}$, удовлетворяющих условиям (21), (22), при $b > 0$ справедливо неравенство

$$\exp\left\{bM - b \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} j N_{jk}\right\} \geq 1.$$

Поэтому

$$\mathcal{N}(M) = \sum_{\{N_{jk}\}} 1 \quad (\text{сумма по множеству (21), (22)})$$

$$\leq \sum_{\{N_{jk}\}} \exp\left\{bM - b \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} j N_{jk}\right\} \quad (\text{сумма по множеству (21), (22)})$$

$$\leq \sum_{\{N_{jk}\}} \exp\left\{bM - b \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} j N_{jk}\right\} \quad (\text{сумма по множеству (21)})$$

$$= e^{bM} \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{q_j} \left[\sum_{N_{jk}=0}^{R_j} e^{-N_{jk}bj} \right]$$

(а теперь просуммируем геометрические прогрессии)

$$= \exp\left\{bM + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}}\right\}.$$

Таким образом, мы доказали искомую оценку сверху. Именно, справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20. Для общего числа вариантов $\mathcal{N}(M)$ выполнена оценка

$$\mathcal{N}(M) \leq \exp\left\{bM + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}}\right\}, \quad (85)$$

где $b = b(M)$ – решение уравнения (23).

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Конечно, оценка (85) выполнена при любом $b > 0$, а не только при $b = b(M)$. Но оценка с $b = b(M)$ наилучшая. Это можно проверить, минимизируя правую часть в (85) по b : уравнение экстремума в точности совпадает с (23), а анализируя знак второй производной фазы экспоненты, можно установить, что эта точка есть точка минимума.

Теперь мы можем доказать теорему 9 об энтропии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Комбинируя оценки из предложений 17 и 20, мы видим, что

$$\begin{aligned} Cb^{1+d/2} \exp \left\{ bM + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}} \right\} \\ \leq \mathcal{N}(M) \leq \exp \left\{ bM + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}} \right\}. \end{aligned}$$

Переходя к логарифмам, для энтропии $S = \ln \mathcal{N}(M)$ получаем

$$bM + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}} - C_1 |\ln b| \leq S \leq bM + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}},$$

откуда уже непосредственно следует асимптотика (31) с учетом того факта, что если $d > 1$, то $N \simeq b^{-d}$ и, следовательно, $|\ln b| \asymp \ln N$, а если $d = 1$, то

$$N \asymp b^{-1} |\ln b|, \quad \ln N \asymp |\ln b| + \ln |\ln b| = |\ln b| (1 + o(1)) \simeq |\ln b|.$$

3. Концентрация вариантов вблизи предельного распределения

3.1. Общая теорема о сходимости. Все основные результаты данной работы, касающиеся концентрации (в том или ином смысле) большинства вариантов вблизи предельного распределения (26) являются следствиями одной общей теоремы. В данном пункте мы ее сформулируем и докажем, а в следующем – покажем, как из нее выводятся теоремы о концентрации, сформулированные в п. 1.3. В этом пункте считаем, что $d > 2$.

Зафиксируем функцию $\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, сколь угодно медленно растущую на бесконечности (см. (32)).

Пусть $\gamma \in [0, 1]$, $\alpha \in [0, 1]$ – заданные числа, причем

$$\frac{1 - \alpha}{d} < \frac{1 - \gamma}{2}. \quad (86)$$

Обозначим

$$\Delta = N^{(1+\gamma)/2 + \alpha/d} \sqrt{\ln N} \psi(N). \quad (87)$$

Далее, пусть $C_0 > 0$ – заданная постоянная. Пусть набор $\{N_{jk}\}$ неотрицательных целых чисел случайным и равновероятным для всех вариантов образом выбирается из множества (21), (22). Определим числа N_j второй из формул в (22).

Тогда справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 22. *Существуют такие постоянные C_k , $k = 1, 2, \dots$, зависящие только от γ , α и C_0 , что для произвольных s числовых последовательностей $\{f_j^{(1)}\}, \dots, \{f_j^{(s)}\}$, $j = 1, 2, \dots$, где $s \leq N^\gamma$, удовлетворяющих условию*

$$\sum_{l=1}^s |f_j^{(l)}| \leq C_0 j^\alpha, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (88)$$

при всех M справедливы оценки

$$\mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^s \left| \sum_{j=1}^{\infty} f_j^{(l)}(N_j - \bar{N}_j) \right| > \Delta\right) \leq C_k N^{-k}, \quad (89)$$

где числа $\bar{N}_j$ определены формулой (26).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем оценку сверху для числа $\mathcal{N}(\Delta)$ наборов $\{N_{jk}\}$, удовлетворяющих условиям (21), (22), для которых, кроме того,

$$\sum_{l=1}^s \left| \sum_{j=1}^{\infty} f_j^{(l)}(N_j - \bar{N}_j) \right| > \Delta. \quad (90)$$

Условие (90) можно переписать в виде

$$\sum_{l=1}^s \left| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} f_j^{(l)}(N_{jk} - \bar{N}_{jk}) \right| > \Delta, \quad (91)$$

где

$$\bar{N}_{jk} = \frac{\bar{N}_j}{q_j}, \quad k = 1, \dots, q_j.$$

Без ограничения общности можно считать, что все $f_j^{(l)}$ вещественны. Тогда на множестве $\mathcal{A}$ вариантов, удовлетворяющих (21), (22) и (90), выполнены неравенства

$$M - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk} \geq 0, \quad (92)$$

$$\Delta - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} \left(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)} \right) (N_{jk} - \bar{N}_{jk}) \leq 0 \quad (93)$$

для некоторого (зависящего от $\{N_{jk}\}$) набора

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \{0, 1\}^s.$$

Пусть c – произвольное положительное число. Из неравенств (92), (93) вытекает, что на каждом из элементов множества $\mathcal{A}$ справедливо одно из 2^s неравенств

$$b \left(M - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} j N_{jk} \right) - c \Delta + c \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} \left(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)} \right) (N_{jk} - \bar{N}_{jk}) \geq 0.$$

Отсюда следует, что

$$e^{bM - c\Delta} e^{-b \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} j N_{jk}} \sum_{\sigma} \exp \left\{ -c \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} \left(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)} \right) \bar{N}_{jk} + c \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} \left(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)} \right) N_{jk} \right\} \geq 1 \quad (94)$$

на множестве $\mathcal{A}$. Далее,

$$\mathcal{N}(\Delta) = \sum_{\{N_{jk}\} \in \mathcal{A}} 1. \quad (95)$$

Оценим $\mathcal{N}(\Delta)$ сверху, распространяя сумму (95) на все наборы, удовлетворяющие условию (21) и заменяя при этом единицы на левую часть неравенства (94). Это можно сделать, поскольку левая часть в (94) всюду положительна, а при $\{N_{jk}\} \in \mathcal{A}$ не меньше единицы в силу (94). Разлагая экспоненту от суммы в произведение экспонент, получим тогда

$$\mathcal{N}(\Delta) \leq e^{bM-c\Delta} \sum_{\sigma} \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{q_j} \left[e^{-c(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)}) \bar{N}_{jk}} \sum_{N_{jk}=1}^{R_j} e^{-N_{jk}(bj-c(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)}))} \right]$$

(суммируя геометрические прогрессии)

$$\begin{aligned} &= e^{bM-c\Delta} \sum_{\sigma} \exp \left[\sum_{j=1}^{\infty} q_j \left(-c \left(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)} \right) \bar{N}_{jk} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)(bj-c(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)}))}}{1 - e^{-(bj-c(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)}))}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (96)$$

Разумеется, эти выкладки справедливы в том случае, если встречающиеся в них бесконечные суммы и произведения сходятся. Для того, чтобы это так и было, возьмем число c в интервале

$$0 < c < \frac{b}{2C_0}. \quad (97)$$

Тогда в силу оценки (88) и условия $\alpha \leq 1$ имеем

$$\left| c \left(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)} \right) \right| \leq \frac{b}{2C_0} C_0 j^{\alpha} \leq \frac{bj^{\alpha}}{2} \leq \frac{bj}{2}, \quad (98)$$

а значит,

$$bj - c \left(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)} \right) \geq \frac{bj}{2}, \quad (99)$$

так что суммы геометрических прогрессий сходятся и в том случае, когда $R_j = \infty$. Далее, преобразуем входящие в (96) выражения

$$\phi_{jk} \equiv \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)(bj-c(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)}))}}{1 - e^{-(bj-c(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)}))}} - c \left(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)} \right) \bar{N}_{jk}, \quad (100)$$

разлагая функцию

$$F(x) = \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)x}}{1 - e^{-x}}$$

по формуле Тейлора с остаточным членом второго порядка в точке $x = bj$:

$$\begin{aligned} F\left(bj - c\left(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)}\right)\right) \\ = F(bj) - F'(bj)c\left(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)}\right) \\ + \frac{1}{2}F''\left(bj - \theta c\left(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)}\right)\right)\left(c\left(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)}\right)\right)^2, \end{aligned}$$

где число $\theta \in [0, 1]$, разумеется, свое для каждого из выражений (100). Имеем

$$F'(x) = \frac{(R_j + 1)e^{-(R_j+1)x}}{1 - e^{-(R_j+1)x}} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{R_j + 1}{e^{(R_j+1)x} - 1} - \frac{1}{e^x - 1},$$

так что с учетом формулы (26)

$$F'(bj) = -\bar{N}_{jk}.$$

Подставляя полученное выражение в (100), получаем

$$\begin{aligned} \phi_{jk} = \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}} \\ + \frac{1}{2}F''\left(bj - \theta c\left(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)}\right)\right)\left(c\left(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)}\right)\right)^2, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}} + \frac{c^2\left(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)}\right)^2}{2} \min_{x \in [bj/2, 3bj/2]} F''(x) \\ \leq \phi_{jk} \leq \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}} + \frac{c^2\left(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)}\right)^2}{2} \max_{x \in [bj/2, 3bj/2]} F''(x) \end{aligned}$$

(мы воспользовались неравенством (98)).

Прямое вычисление дает

$$F''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} - \frac{(R_j + 1)^2 e^{(R_j+1)x}}{(e^{(R_j+1)x} - 1)^2},$$

так что

$$\max_{x \in [bj/2, 3bj/2]} F''(x) \leq \max_{x \in [bj/2, 3bj/2]} \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^{bj/2}}{(e^{bj/2} - 1)^2}$$

(ибо вычитаемое положительно, а функция

$$\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{1}{e^x - 1} \left[1 + \frac{1}{e^x - 1} \right]$$

монотонно убывает) и

$$\min_{x \in [bj/2, 3bj/2]} F''(x) \geq 0$$

в силу утверждения 19. Итак,

$$\begin{aligned} \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}} \\ \leq \phi_{jk} \leq \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}} + \frac{(c(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)}))^2}{2} \frac{e^{bj/2}}{(e^{bj/2} - 1)^2}. \end{aligned} \quad (101)$$

Таким образом, мы видим, что $|\phi_{jk}|$ экспоненциально убывает при $j \rightarrow \infty$, а так как кратности q_j растут степенным образом, ряды в (96) сходятся.

Теперь, пользуясь правым неравенством в (101), с учетом (96) и (100) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\Delta) &\leq \exp \left\{ bM + \sum_{j=1}^{\infty} \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}} + N^{\gamma} \ln 2 \right. \\ &\quad \left. - c\Delta + \frac{c^2}{2} \sum_{j=1}^{\infty} q_j \frac{(\sum_{l=1}^s (-1)^{\sigma_l} f_j^{(l)})^2 e^{bj/2}}{(e^{bj/2} - 1)^2} \right\} \\ &\leq \exp \left\{ bM + \sum_{j=1}^{\infty} \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}} + N^{\gamma} \ln 2 - c\Delta + c^2 C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{d-1+2\alpha} e^{bj/2}}{(e^{bj/2} - 1)^2} \right\} \\ &\leq \exp \left\{ bM + \sum_{j=1}^{\infty} \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}} + N^{\gamma} \ln 2 - c\Delta + c^2 \tilde{C} b^{-d-2\alpha} \right\}, \end{aligned} \quad (102)$$

где $C, \tilde{C}$ – некоторые постоянные. (В этих выкладках мы воспользовались оценкой (88), формулой (70) для q_j и леммой 23.)

Положим

$$c = \varkappa b^{d/2(1-\gamma)+\alpha} \sqrt{\ln N} \psi(N),$$

где $\varkappa > 0$ – достаточно малая положительная постоянная. Тогда неравенство (97) выполнено в силу условия (86). С учетом асимптотической оценки $N \asymp b^{-d}$ (см. (28)) и формулы (87) для Δ получаем

$$N^{\gamma} \ln 2 - c\Delta + c^2 \tilde{C} b^{-d-2\alpha} \leq -N^{\gamma} [\ln 2 - K_1 \varkappa \ln N \psi^2(N) (1 - \varkappa K_2)],$$

где $K_1, K_2 > 0$ – некоторые постоянные. При достаточно малом $\varkappa$ получим

$$\mathcal{N}(\Delta) \leq C_k \exp \left\{ bM + \sum_{j=1}^{\infty} \ln \frac{1 - e^{-(R_j+1)bj}}{1 - e^{-bj}} \right\} N^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (103)$$

(При $\gamma \neq 0$ вместо множителя $C_k N^{-k}$ можно в этой оценке поставить даже экспоненту $e^{-K_3 N^{\gamma}}$.) Комбинируя (103) с оценкой (57) для числа $\mathcal{N}(M)$, завершаем доказательство теоремы 22.

3.2. Доказательство теорем о концентрации. 1. Теорема (12) является частным случаем теоремы 22 при $\gamma = 0$ (и соответственно $s = 1$).

2. Покажем, как из теоремы 12 вытекают теоремы 10 и 11.

Для доказательства оценок (35) и (36) в теореме 11 достаточно положить соответственно

$$f_j = \begin{cases} 1, & j \leq l, \\ 0, & j > l \end{cases} \quad \text{и} \quad f_j = \begin{cases} j, & j \leq l, \\ 0, & j > l. \end{cases}$$

Теорема 11 тем самым доказана, а теорема 10 получается из теоремы 11 переходом к пределу при $l \rightarrow \infty$.

3. Докажем теорему 13. Прежде всего, отметим, что для неотрицательных функций (45) справедлива оценка

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} \sum_{l=1}^s f_l(x) \leq \sup_{|y| \leq \mu} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-(y-\mu l)^2/2} \equiv C_\mu < \infty, \quad (104)$$

где постоянная C_μ зависит только от μ (и, в частности, не зависит от M). Несложные технические выкладки теперь показывают, что при выполнении условий теоремы справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^s |(f_l, \xi_M - \xi)_{L^2(\mathbb{R}_+)}| &\equiv \sum_{l=1}^s \left| \int_0^\infty f_l(x) (\xi_M(x) - \xi(x)) dx \right| \\ &= b^d \sum_{l=1}^s \left| \sum_{j=1}^\infty f_j^{(l)} (N_j - \bar{N}_j) \right| + O(b), \end{aligned} \quad (105)$$

где

$$f_j^{(l)} = \frac{1}{b} \int_{b(j-1)}^{bj} f_l(x) dx, \quad (106)$$

а постоянная в $O(b)$ не зависит от M . Далее, в силу (104) числа $f_j^{(l)}$ удовлетворяют условиям теоремы 22 при $\alpha = 0$. Применяя эту теорему к правой части (105) с учетом неравенства $\gamma < 1 - 2/d$, получаем, что для каждого фиксированного M

$$\sum_{l=1}^s |(f_l, \xi_M - \xi)_{L^2(\mathbb{R}_+)}| \leq Cb \quad (107)$$

с вероятностью не меньшей, чем $1 - C_k N^{-k}$ для всех k , где C, C_k – постоянные, не зависящие от M . Далее, если P_M – проектор на подпространство, порожденное набором функций (45), то (норма и скалярное произведение подразумеваются в $L^2(\mathbb{R}_+)$, а суммы по l от 1 до s)

$$\|P_M \eta\| = \max \frac{(\sum_l \alpha_l f_l, \eta)}{\|\sum_l \alpha_l f_l\|}, \quad (108)$$

где супремум берется по всем ненулевым векторам $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$. При достаточно большом μ матрица Грама G с элементами $G_{mn} = (f_m, f_n)$ будет иметь диагональное преобладание:

$$2\sqrt{2\pi}\sigma = G_{mm} \geq \lambda \sum_{n \neq m} |G_{mn}|, \quad (109)$$

где $\lambda < 1$ зависит только от μ . Тогда, в силу свойств матриц с диагональным преобладанием,

$$\left\| \sum \alpha_l f_l \right\|^2 = (\alpha, G\alpha) \geq (1 - \lambda) \sum_l G_{ll} \alpha_l^2 \geq 2\sqrt{2\pi}(1 - \lambda)\sigma \max_l \alpha_l^2. \quad (110)$$

С другой стороны,

$$\left(\sum_l \alpha_l f_l, \eta \right) \leq \sum_l |(f_l, \eta)| \max_l |\alpha_l|. \quad (111)$$

Подставляя (110) и (111) в (108), получаем, что если μ достаточно велико, то

$$\|P_M \eta\| \leq K \frac{\sum_l |(f_l, \eta)|}{\sqrt{\sigma}}, \quad (112)$$

где постоянная K зависит только от μ . Поскольку $\sigma = N^{-\delta} \geq K_1 b^{d\delta}$, мы комбинируем (112) с (107) и получаем

$$P(\|P_M(\xi_M - \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq K_2 b^{1-d\delta/2}) \geq 1 - C_k N^{-k} \quad (113)$$

при всех k . Так как $\delta < 2/d$, отсюда непосредственно следует утверждение теоремы 13.

4. Вспомогательные результаты

4.1. Две технические леммы.

ЛЕММА 23. Пусть l – вещественное число, а k, m – целые числа такие, что

$$0 \leq k < m. \quad (114)$$

Рассмотрим суммы

$$\Sigma_{\pm} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^l e^{kbj}}{(e^{bj} \pm 1)^m}, \quad (115)$$

где $b > 0$ – вещественный параметр. Тогда при $b \rightarrow 0$ справедливы соотношения

$$\Sigma_{-} \asymp \begin{cases} b^{-l-1}, & \text{если } l > m-1, \\ b^{-l-1} |\ln b|, & \text{если } l = m-1, \\ b^{-m}, & \text{если } l < m-1, \end{cases} \quad \Sigma_{+} \asymp \begin{cases} b^{-l-1}, & \text{если } l > -1, \\ |\ln b|, & \text{если } l = -1, \\ 1, & \text{если } l < -1. \end{cases}$$

Напомним, что запись $A \asymp B$ означает, что частное A/B ограничено сверху и снизу положительными постоянными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство для суммы Σ_{-} (которую будем обозначать далее просто через Σ). Рассуждение для суммы Σ_{+} вполне аналогично.

Умножая и деля Σ на b^{l+1} , получаем

$$\Sigma = \frac{1}{b^{l+1}} \sum_{j=1}^{\infty} b \frac{(bj)^l e^{kbj}}{(e^{bj} - 1)^m} \equiv \frac{1}{b^{l+1}} \sum_{j=1}^{\infty} b F(x_j),$$

где

$$F(x) = \frac{x^l e^{kx}}{(e^x - 1)^m}, \quad x_j = bj, \quad j = 1, 2, \dots \quad (116)$$

Иными словами (с точностью до множителя b^{-l-1}) сумма (115) есть интегральная сумма для интеграла от функции $F(x)$. Мы используем этот факт для оценки

указанной суммы. (Здесь на первый взгляд напрашивается применение формулы Эйлера–Маклорена, но оно не приводит к успеху при отрицательных $l - m$, так что мы проведем оценки непосредственно.)

Существует не зависящее от b число $x_0 > 1$ такое, что функция $F(x)$ монотонно убывает при всех $x \geq x_0 - 1$. Действительно, с учетом (114) функцию $F(x)$ можно представить в виде произведения

$$F(x) = \frac{x^l}{e^x - 1} \left(1 + \frac{1}{e^x - 1}\right)^k \left(\frac{1}{e^x - 1}\right)^{m-k},$$

в котором второй и третий сомножители монотонно убывают при всех x , а первый сомножитель – при $x \geq l$. (В последнем легко убедиться: производная первого сомножителя имеет вид

$$\left(\frac{x^l}{e^x - 1}\right)' = \frac{e^x(lx^{l-1} - x^l) - lx^{l-1}}{(e^x - 1)^2}$$

и заведомо отрицательна при $x \geq l$.) Таким образом, можно взять

$$x_0 = \max\{2, l + 1\}.$$

Разобьем теперь Σ на две суммы, полагая

$$\Sigma = \frac{1}{b^{l+1}} \left[\sum_{x_j \in (0, x_0]} bF(x_j) + \sum_{x_j \in (x_0, \infty)} bF(x_j) \right] \equiv \frac{1}{b^{l+1}} [\Sigma_1 + \Sigma_2].$$

Все слагаемые (а следовательно, и обе суммы) положительны. Поэтому можно каждую из них оценивать по отдельности.

Оценка суммы Σ_2 . Начнем с оценки второй из сумм. На интервале (x_0, ∞) функция $F(x)$ монотонно убывает, и поэтому

$$\int_{x_0-1}^{\infty} F(x) dx \geq \Sigma_2 \geq \int_{x_0+1}^{\infty} F(x) dx,$$

так что вне зависимости от соотношения между l и m всегда выполнена оценка

$$\Sigma_2 \asymp 1.$$

Оценка суммы Σ_1 . На интервале $(0, x_0]$ имеем $F(x) \asymp x^{l-m}$ и, следовательно,

$$\Sigma_1 \asymp \tilde{\Sigma}_1 \equiv \sum_{x_j \in (0, x_0]} bx_j^{l-m}.$$

Рассмотрим два случая.

Случай $l - m > 0$. В этом случае функция x^{l-m} возрастает и справедливы неравенства

$$\int_0^{x_0+1} x^{l-m} dx \geq \tilde{\Sigma}_1 \geq \int_0^{x_0-1} x^{l-m} dx,$$

так что

$$\Sigma_1 \asymp 1.$$

Случай $l - m < 0$. В этом случае функция x^{l-m} убывает и справедливы неравенства

$$2 \int_{b/2}^{x_0} x^{l-m} dx \geq \tilde{\Sigma}_1 \geq \int_b^{x_0} x^{l-m} dx.$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$\Sigma_1 \asymp \begin{cases} 1 & \text{при } l - m > -1, \\ |\ln b| & \text{при } l - m = -1, \\ b^{l-m+1} & \text{при } l - m < -1. \end{cases}$$

Комбинируя это с оценкой для Σ_1 и умножая на b^{-l-1} , получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 24. Пусть l – вещественное число, а k, m – целые числа такие, что

$$0 \leq k < m \leq l. \quad (117)$$

Далее, пусть заданы произвольные числа

$$a_j \in [1, \infty], \quad j = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим сумму

$$\Phi = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_j j)^l e^{k b a_j j}}{(e^{b a_j j} - 1)^m},$$

где $b > 0$ – вещественный параметр и подразумевается, что те члены в сумме, для которых $a_j = \infty$, опускаются. Тогда при $b \rightarrow 0$ справедлива оценка

$$\Phi \leq C b^{-l-1}$$

с некоторой постоянной C , не зависящей от выбора последовательности $\{a_j\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо равенство

$$\Phi = \frac{1}{b^{l+1}} \left[\sum_{x_j \in (0, x_0]} b F(a_j x_j) + \sum_{x_j \in (x_0, \infty)} b F(a_j x_j) \right] \equiv \frac{1}{b^{l+1}} [\Phi_1 + \Phi_2], \quad (118)$$

где $F(x)$ и x_j задаются формулой (116), а число x_0 то же, что и в доказательстве леммы 23. В силу условия (117) функция $\Phi(x)$ равномерно ограничена сверху при всех $x \in (0, \infty)$:

$$F(x) \leq F_0 < \infty.$$

Поэтому

$$\Phi_1 \leq \sum_{x_j \in (0, x_0]} b F_0 \leq \frac{x_0}{b} b F_0 = x_0 F_0.$$

Чтобы оценить сумму Φ_2 , заметим, что для входящих в нее слагаемых как точки x_j , так и точки $a_j x_j \geq x_j$ лежат на участке монотонного убывания функции $F(x)$, так что

$$\Phi_2 = \sum_{x_j \in (x_0, \infty)} b F(a_j x_j) \leq \sum_{x_j \in (x_0, \infty)} b F(x_j) = \Sigma_2,$$

где Σ_2 – величина, введенная в доказательстве леммы 23. Там же было доказано, что $\Sigma_2 \asymp 1$. Таким образом, мы оценили Φ_1 и Φ_2 сверху постоянными, которые не зависят от выбора последовательности $\{a_j\}$. Подстановка этих оценок в формулу (118) для Φ завершает доказательство леммы.

4.2. Доказательство предложений 6 и 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 6. 1. Рассмотрим функцию $\Psi(b)$, задаваемую правой частью формулы (23):

$$\Psi(b) = \sum_{j=1}^{\infty} jq_j \left[\frac{1}{e^{bj} - 1} - \frac{R_j + 1}{e^{(R_j+1)bj} - 1} \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{jq_j}{e^{bj} - 1} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{jq_j(R_j + 1)}{e^{(R_j+1)bj} - 1}.$$

Применяя к каждому из двух рядов в правой части лемму 23, получаем, что

$$|\Psi(b)| \leq Cb^{-d-1}.$$

С другой стороны, функция $F(a) = a(e^{ax} - 1)^{-1}$ монотонно убывает по a при любом фиксированном $x > 0$ (чтобы в этом убедиться, достаточно вычислить ее производную). Поэтому

$$\Psi(b) \geq \sum_{j=1}^{\infty} jq_j \left[\frac{1}{e^{bj} - 1} - \frac{2}{e^{2bj} - 1} \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{jq_j}{e^{bj} + 1} \asymp b^{-d-1} \quad (119)$$

по лемме 23. В сочетании с предыдущим неравенством это показывает, что $\Psi(b) \asymp b^{-d-1}$.

2. Покажем, что функция $\Psi(b)$ монотонно убывает при всех $b > 0$. Достаточно продифференцировать отдельное слагаемое в сумме и убедиться, что производная отрицательна. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial b} \left[\frac{1}{e^{bj} - 1} - \frac{R_j + 1}{e^{(R_j+1)bj} - 1} \right] = j \left[\frac{(R_j + 1)^2 e^{(R_j+1)bj}}{(e^{(R_j+1)bj} - 1)^2} - \frac{e^{bj}}{(e^{bj} - 1)^2} \right] < 0$$

(последнее неравенство получается, если применить утверждение 19 к выражению в квадратных скобках, которое представляет собой разность значений функции (77) в точках $R_j + 1$ и 1 при $x = bj$).

Наконец, покажем, что функция $\Psi(b)$ принимает произвольно большие и произвольно малые положительные значения. Действительно, если для заданного M_0 взять $b > 0$ настолько малым, что $e^{bM_0} < 2$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{jq_j}{e^{bj} + 1} \geq \frac{M_0}{3},$$

а значит, в силу (119) такое же неравенство верно и для $\Psi(b)$. При больших $b \gg 0$ запишем оценку

$$\Psi(b) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{jq_j}{e^{bj} - 1} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{jq_j}{e^{bj}} = e^{-b/2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{jq_j}{e^{b(j-1/2)}} \leq e^{-b/2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{jq_j}{e^{j-1/2}}.$$

Последний ряд не зависит от b и сходится. Поэтому $\Psi(b)$ произвольно мало при больших b . Предложение 6 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7. Обозначим через $\tilde{\Psi}(b)$ правую часть соотношения (27). Она отличается от $\Psi(b)$ только отсутствием множителя j при квадратной скобке, что влияет на результат при применении леммы 23. В остальном доказательство вполне аналогично п. 1 доказательства предложения 6.

4.3. Доказательство формул с поправками для M и N . В этом пункте мы дадим доказательство предложения 15.

Нужно вычислить суммы

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j q_j}{e^{bj} - 1}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j}{e^{bj} - 1}. \quad (120)$$

Вычислим прежде всего асимптотическое разложение для q_j по степеням j^{-1} :

$$q_j = j^{d-1}(c_0 + c_1 j^{-1} + \dots + c_m j^{-m}) + O(j^{d-m-2}). \quad (121)$$

Для вычисления коэффициентов c_m воспользуемся рядом Стирлинга для $\Gamma(z)$ при $z \rightarrow \infty$:

$$\Gamma(z) = e^{-z} z^{z-1/2} \sqrt{2\pi} \left(\sum_{k=0}^n a_k z^{-k} + O(z^{-n-1}) \right), \quad (122)$$

где

$$a_k = (2k+1)!! b_k,$$

а b_k определяются рекурсивно:

$$b_0 = b_1 = 1, \quad b_k = \frac{1}{k+1} \left(b_{k-1} - \sum_{j=2}^{k-1} j b_j b_{n+1-j} \right).$$

В частности,

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{12}, \quad a_2 = \frac{1}{288}, \quad a_3 = -\frac{139}{51840}, \quad a_5 = -\frac{571}{2488320}.$$

Применяя формулу ряда Стирлинга к $\Gamma(j+d)$ и $\Gamma(j+1)$ в выражении (20) для q_j , получаем асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} q_j &= \Gamma(d)^{-1} \frac{e^{-j-d} (j+d)^{j+d-1/2}}{e^{-j-1} (j+1)^{j+1/2}} \frac{1 + 1/(12(j+d)) + \dots}{1 + 1/(12(j+1)) + \dots} \\ &= \frac{1}{\Gamma(d)} \left(\frac{j}{e} \right)^{d-1} \left(1 + \frac{d}{j} \right)^{j+d-1/2} \left(1 + \frac{1}{j} \right)^{-j-1/2} \frac{1 + 1/(12(j+d)) + \dots}{1 + 1/(12(j+1)) + \dots} \end{aligned}$$

(ошибка, возникающая при замене отношения гамма-функций его целой частью, поглощается остаточным членом). Отсюда получается искомое разложение по степеням j^{-1} . Вычислим для примера первые два члена. Справедливо равенство

$$\left(1 + \frac{x}{j} \right)^j = e^x \left(1 - \frac{x^2}{2j} + O\left(\frac{1}{j^2} \right) \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{d}{j} \right)^{j+d-1/2} \left(1 + \frac{1}{j} \right)^{-j-1/2} \\ &= \left(1 + \frac{d}{j} \right)^j \left(1 + \frac{1}{j} \right)^{-j} \left(1 + \frac{d}{j} \right)^{d-1/2} \left(1 + \frac{1}{j} \right)^{-1/2} \\ &= e^{d-1} \left(1 - \frac{d^2-1}{2j} + O\left(\frac{1}{j^2} \right) \right) \left(1 + \frac{d(d-1/2)-1/2}{j} + O\left(\frac{1}{j^2} \right) \right) \\ &= e^{d-1} \left(1 + \frac{d(d-1)}{2j} + O\left(\frac{1}{j^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{1 + 1/(12(j+d)) + \dots}{1 + 1/(12(j+1)) + \dots} = 1 + O\left(\frac{1}{j^2}\right).$$

Окончательно получаем

$$q_j = \frac{j^{d-1}}{\Gamma(d)} \left(1 + \frac{d(d-1)}{2j}\right) + O(j^{d-3}). \quad (123)$$

Теперь нужно подставить разложения (121) в (120) и затем вычислить суммы вида

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^s}{e^{bj} - 1}.$$

Для этого воспользуемся формулой Эйлера–Маклорена

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} f(j) &= \int_0^n f(x) dx - \frac{1}{2} [f(0) + f(n)] + \sum_{m=1}^{l-1} \frac{B_{2m}}{(2m)!} [f^{(2m-1)}(n) - f^{(2m-1)}(0)] \\ &\quad - \frac{1}{(2l)!} \int_0^n B_{2l}(x - [x]) f^{(2l)}(x) dx, \end{aligned} \quad (124)$$

где B_k – числа Бернулли, а $B_k(x)$ – многочлены Бернулли. В качестве функции $f(x)$ возьмем

$$f(x) = \frac{x^s}{e^{bx} - 1} \equiv b^{-s} F(bx), \quad F(x) = \frac{x^s}{e^x - 1}.$$

Возьмем максимальное l такое, что $2l < s + 1$. Тогда интеграл в правой части равенства (124) абсолютно сходится и в нуле, и при $n \rightarrow \infty$, производные порядка $< 2l$ равны нулю в нуле, и поэтому, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} [n-1] f(j) = \int_0^{\infty} f(x) dx - \frac{1}{(2l)!} \int_0^{\infty} B_{2l}(x - [x]) f^{(2l)}(x) dx. \quad (125)$$

Оценим последний интеграл. Имеем

$$f^{(2l)}(x) = b^{2l-s} F^{(2l)}(bx),$$

так что

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} B_{2l}(x - [x]) f^{(2l)}(x) dx \right| &\leq C b^{2l-s} \int_0^{\infty} |F^{(2l)}(bx)| dx \\ &= C b^{2l-s-1} \int_0^{\infty} |F^{(2l)}(x)| dx = C_1 b^{2l-s-1}, \end{aligned}$$

где C – максимум модуля многочлена Бернулли на отрезке $[0, 1]$. С другой стороны,

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \equiv \int_0^{\infty} \frac{x^s}{e^{bx} - 1} dx = b^{-s-1} \Gamma(s+1) \zeta(s+1),$$

где $\zeta(s)$ – дзета-функция Эйлера.

Итак, окончательно

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^s}{e^{bj} - 1} = b^{-s-1} \Gamma(s+1) \zeta(s+1) (1 + O(b^{2l})), \quad (126)$$

где l – максимальное целое число, такое, что $2l < s + 1$.

Подставляя теперь (123) в (120) и пользуясь (126), получаем формулы (51) и (52). Предложение доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. P. Maslov, *On a distribution in frequency probability theory corresponding to the Bose–Einstein distribution*, [arXiv:math/0612394v1](#).
- [2] V. P. Maslov, “Revision of probability theory from the point of view of quantum statistics”, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:1 (2007), 66–95.
- [3] В. П. Маслов, *Квантовая экономика*, Наука, М., 2007.
- [4] В. П. Маслов, “Парастатистики и общая теорема теории вероятностей в приложении к безрисковым вложениям”, *Матем. заметки*, **81**:3 (2007), 478–480.
- [5] V. P. Maslov, *Quasithermodynamics and a correction to the Stefan–Boltzmann law*, [arXiv:0801.0037v1](#).
- [6] Л. Д. Ландау, И. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ГИТТЛ, М.–Л., 1951.
- [7] В. П. Маслов, В. В. Вьюгин, “Теоремы о концентрации для энтропии и свободной энергии”, *Пробл. передачи информ.*, **41**:2 (2005), 72–88.
- [8] V. P. Maslov, *Negative dimension in general and asymptotic topology*, [arXiv:math/0612543v1](#).
- [9] М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, М., 1977.
- [10] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, ГИФМЛ, М., 1963.

В. П. Маслов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило

11.01.2008

В. Е. Назайкинский

Институт проблем механики РАН
E-mail: nazaikinskii@yandex.ru